УДК 512.643:512.552.12

Ю.Н. БАЗИЛЕВИЧ

НАИЛУЧШЕЕ ПРИВЕДЕНИЕ МАТРИЦ К БЛОЧНО-ТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ ДЛЯ ЗАДАЧ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ

Аннотация. Изложено решение задачи о приведении нескольких комплексных (вообще говоря) $n \times n$-матриц к одинаковому блочно-треугольному виду с максимально возможным количеством блоков на главной диагонали с помощью преобразования подобия. Полученное решение можно использовать для применения методов иерархической декомпозиции при анализе сложных систем.

Ключевые слова: матрица, блочно-треугольный вид, преобразование подобия, централизатор, алгебра над полем, радикал.

ВВЕДЕНИЕ

Декомпозиция линейных систем, описываемых несколькими матрицами коэффициентов, сводится к одновременному приведению этих матриц к блочно-диагональному или к блочно-треугольному виду. Примерами таких систем являются механические системы, не приводимые к обычным главным координатам, а также экономические системы, описываемые матрицами прямых затрат и полной приростной капиталоемкости.

Рассмотрим вначале случай, когда число матриц $d = 2$.

Даны две квадратные матрицы: B_1 и B_2, над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Необходимо найти преобразование подобия

$$\widetilde{B}_\nu = S^{-1} B_\nu S = \begin{bmatrix} \widetilde{B}_{\nu 11} & \widetilde{B}_{\nu 12} & \dots & \widetilde{B}_{\nu 1l} \\ 0 & \widetilde{B}_{\nu 22} & \dots & \widetilde{B}_{\nu 2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{B}_{\nu ll} \end{bmatrix}, \ \nu = 1, 2, \qquad (1)$$

приводящее обе матрицы к одинаковому блочно-треугольному виду. Здесь $\widetilde{B}_{\nu ij}$ — это блок матрицы $\widetilde{B}_\nu$, стоящий в i-м столбце и j-й строке блочно-треугольной матрицы, диагональные блоки $\widetilde{B}_{\nu ii}$ — квадратные подматрицы. Нужно чтобы количество l диагональных блоков было максимально возможным.

Идея метода представлена в [1]. В работах [2, 3] изложены соответствующие вычислительные алгоритмы и результаты расчетов по решению прикладных задач. В настоящей работе приведено подробное теоретическое обоснование разработанных методов. При решении задачи не сделано предположений о полупростоте централизатора матриц, о компактности группы симметрии и т.д.

Отметим, что готовое решение существует только для случая одной матрицы, которую можно привести к ее жордановой форме. Создание канонической формы для пары матриц — известная нерешенная задача; последнюю и эквивалентные ей задачи называют дикими задачами [4].

1. ОБЩАЯ СХЕМА РАСЧЕТОВ

Используются метод коммутирующей матрицы и метод инвариантного подпространства. Первый позволяет найти преобразование подобия, приводящее обе матрицы к блочно-диагональному виду с двумя (как минимум) блоками на главной диагонали, либо установить, что такое приведение данных матриц невозможно. Второй метод предназначен для того, чтобы обе матрицы, не приводящиеся к блочно-диагональному виду, привести к блочно-треугольному виду либо установить, что они не приводятся и к «строго» блочно-треугольному виду. Используется также способ преодоления особого случая.

Этот подход последовательно применяется вначале к исходной паре матриц, а затем к парам блоков, появляющимся на главной диагонали. Процесс продолжается до получения таких пар блоков, которые уже невозможно привести к блочно-треугольному виду. На основании теоремы единственности утверждаем, что это и есть решение задачи.

2. МЕТОД КОММУТИРУЮЩЕЙ МАТРИЦЫ

О возможности применения коммутирующей матрицы для расщепления систем уравнений давно написано в учебниках по квантовой механике (см., например, [5]). Метод коммутирующей матрицы предложен одновременно А.К. Лопатиным [6] и Е.Д. Якубович [7].

Рассмотрим множество $\Lambda(B_\nu)$ всех матриц, коммутирующих с данными матрицами B_1, B_2. Это множество является алгеброй над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел и называется централизатором матриц $\{B_\nu\}$.

Теорема 1. Для возможности одновременного приведения двух матриц к блочно-диагональному виду необходимо и достаточно, чтобы централизатор этих матриц содержал матрицу X с неодинаковыми собственными числами.

Доказательство вытекает из теоремы 3 в [8, гл. VIII] (см. также [1, § 2.5]). ■

Централизатор (точнее, его базис) можно найти, приняв, что все элементы матрицы X неизвестны, и составив систему линейных однородных алгебраических уравнений, соответствующую матричным уравнениям

$$B_1 X = X B_1, \; B_2 X = X B_2. \qquad (2)$$

В результате получим $2n^2$ уравнений с n^2 неизвестными. Множество всех решений такой системы уравнений (при небольшом n) можно получить известными методами. Вычислительный метод преодоления проблем при большом n приведен в [9].

Обозначим $W_1, W_2, \ldots, W_r$ базис централизатора $\Lambda(B_\nu)$. Если ранг r централизатора равен 1, то весь централизатор состоит из матриц, кратных единичной матрице. В этом случае приведение матриц B_ν к блочно-диагональному виду невозможно. Если $r > 1$, то в качестве матрицы X, используемой для нахождения преобразования, выбираем матрицу базиса W_k, имеющую хотя бы два различных собственных числа. Векторы ее канонического базиса являются столбцами искомой матрицы преобразования подобия.

Особый случай, когда $r > 1$, но все матрицы базиса не имеют различных собственных чисел, рассмотрен в разд. 5.

3. МЕТОД ИНВАРИАНТНОГО ПОДПРОСТРАНСТВА

Идея метода предложена в [1, гл. 7]. Рассматриваются матрицы B_ν $(\nu = 1, 2)$, которые не приводятся одновременно к блочно-диагональному виду (если бы они приводились, то это можно было осуществить с помощью метода коммутирующей матрицы). Требуется выяснить, приводятся ли они к блочно-треугольному виду.

Построение алгебры с единицей $\varphi(B_\nu)$, порожденной данными матрицами, — первый шаг метода. Вначале выбираем линейно независимые элементы множества матриц $\{E, B_1, B_2\}$ и называем их «предполагаемым базисом» [2]. Затем рассматриваем все возможные произведения этих матриц. Как только очередное произведение не принадлежит линейной оболочке предполагаемого базиса, добавляем его к этому множеству и рассматриваем произведения элементов нового предполагаемого базиса. Продолжаем до тех пор, пока не получим, что ни одно из произведений не выходит за пределы линейной оболочки. Признаком непринадлежности элемента линейной оболочке предполагаемого базиса является то, что добавление нового вектора дает линейно независимую совокупность векторов. Проверка линейной независимости проводится с помощью программы SLAU5 [1].

Критерий возможности приведения матриц к блочно-треугольному виду (приводимости алгебры): ранг r алгебры $\varphi(B_\nu)$ меньше, чем n^2 (n — порядок матриц). Это вытекает из теоремы Бернсайда [10] (см. также теорему 1′ в [6]).

Вычисление радикала алгебры — второй шаг метода.

Теорема 2. Если для данных матриц $\{B_\nu\}$ ранг r алгебры $\varphi(B_\nu)$ меньше, чем n^2, и централизатор $\Lambda(B_\nu)$ не содержит ни одной матрицы X с различными собственными числами, то алгебра $\varphi(B_\nu)$ неполупростая.

Доказательство. Условие $r < n^2$ означает, что алгебра $\varphi(B_\nu)$ приводима [10, 11]. Приводимая алгебра может быть полупростой или неполупростой. В первом случае матрицы алгебры (в том числе и $\{B_\nu\}$) можно привести к блочно-диагональному виду. Тогда множество $\Lambda(B_\nu)$ содержит матрицы с различными собственными числами, что противоречит условию теоремы. Второй случай — неполупростая алгебра. ■

Неполупростая алгебра имеет нетривиальный радикал, который определяется с помощью расчетных формул [11]: координаты $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r]^{\mathrm{T}}$ любого элемента радикала в базисе алгебры удовлетворяют уравнению

$$D\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \quad D = \{d_{ij}\}, \tag{3}$$

где $d_{ij} = \mathrm{Sp}(W_i W_j)$, Sp — след матрицы, $\{W_i\}$ — базис алгебры.

Общее решение уравнений (3) можно получить известными методами. Следовательно, можно найти базис радикала.

Нахождение инвариантного подпространства и построение матрицы преобразования — третий шаг метода.

Теорема 3. Одновременное приведение пары матриц к блочно-треугольному виду возможно тогда и только тогда, когда существует инвариантное относительно обеих матриц подпространство $U \subset \mathbb{C}^n$ размерности k и $0 < k < n$. В качестве первых k столбцов матрицы преобразования S можно выбрать векторы базиса подпространства U, в качестве последующих — векторы, дополняющие этот базис до базиса $\mathbb{C}^n$.

Этот результат считается общеизвестным, он вытекает, например, из теоремы 2 в [6]. ■

Назовем Z-множеством пересечение всех ядер элементов радикала алгебры $\varphi(B_\nu)$. Иными словами, это множество, обращаемое в нуль всеми матрицами радикала.

Теорема 4. Рассматриваемое Z-множество является подпространством пространства $\mathbb{C}^n$.

Доказательство. Это множество — общее решение соответствующей системы линейных однородных алгебраических уравнений, т.е. подпространство. ■

Теорема 5. Если алгебра неполупростая, то Z-множество является нетривиальным подпространством.

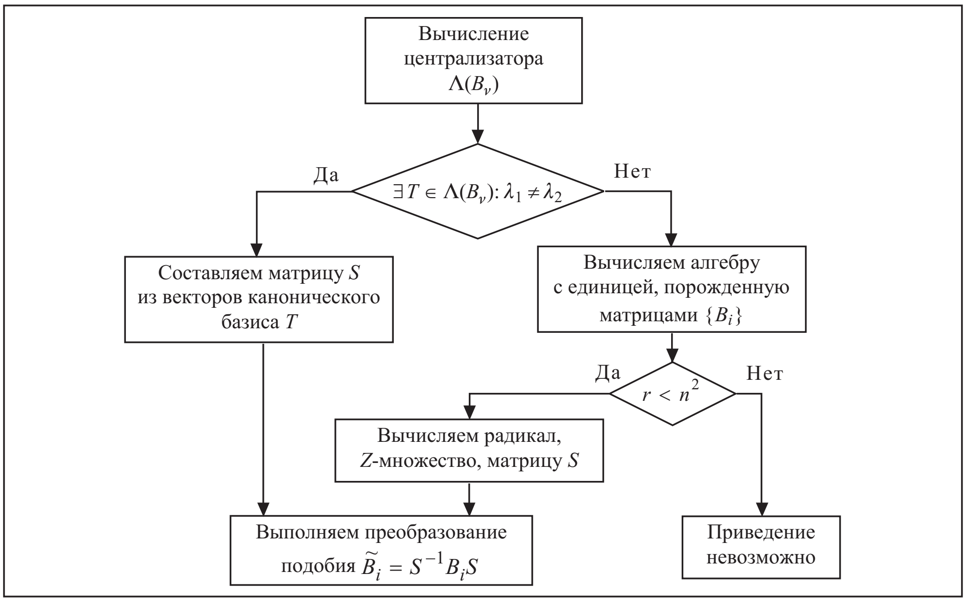

Рис. 1. Этап применения метода инвариантного подпространства

Доказательство. Ненулевой радикал представляет собой семейство матриц $G(\boldsymbol{\tau})$, где $\boldsymbol{\tau}$ — вектор параметров. Радикал является нильпотентной подалгеброй, поскольку все его элементы нильпотентны (см. теорему 2 в [11, § 7]). Следовательно, $\exists\, k \geq 1: G^k(\boldsymbol{\tau}) \neq 0,\ G^{k+1}(\boldsymbol{\tau}) = 0$. Пусть G_1 — ненулевая матрица из множества $G^k(\boldsymbol{\tau})$, а $\boldsymbol{\xi}_1$ — ее ненулевой столбец. Тогда $G(\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{0}\ \forall \boldsymbol{\tau}$, поскольку $G(\boldsymbol{\tau})(G^k(\boldsymbol{\tau})) = 0$. Итак, уравнение $G(\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ имеет ненулевые решения. ■

Теорема 6. Рассматриваемое Z-множество инвариантно относительно матриц $\{B_\nu\}$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{\xi}$ — произвольный элемент Z-множества, т.е. $\boldsymbol{\xi} \in Z \equiv \equiv \{\boldsymbol{\xi} : G(\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}\ \forall \boldsymbol{\tau}\}$. Нужно доказать, что $B_\nu \boldsymbol{\xi} \in Z$ или что $G(\boldsymbol{\tau})\,(B_\nu \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}\ \forall \boldsymbol{\tau}$. Имеем: $B_\nu \in \varphi\,(B_\nu)$, радикал $G(\boldsymbol{\tau})$ алгебры $\varphi(B_\nu)$ является ее идеалом. Поэтому $G(\boldsymbol{\tau})B_\nu \in G(\boldsymbol{\tau})$ или иначе $G(\boldsymbol{\tau})B_\nu = G(\boldsymbol{\tau}_2)$. Отсюда $G(\boldsymbol{\tau})\,(B_\nu \boldsymbol{\xi}) = G(\boldsymbol{\tau}_2)\,\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$. ■

Таким образом, для случая, когда матрицы не приводятся к блочно-диагональному виду, но ранг алгебры $\varphi(B_\nu)$ меньше, чем n^2, создан метод построения нетривиального подпространства, инвариантного относительно этих матриц.

Прямое дополнение к подпространству можно найти как общее решение $\mathbf{x}$ системы линейных однородных алгебраических уравнений $\mathbf{s}_j^{\mathrm{T}} \mathbf{x} = 0,\ j = \overline{1, m}$, где T — знак транспонирования. Для нахождения общего решения можно воспользоваться программой SLAU5 [1].

На рис. 1 прведена блок-схема метода инвариантного подпространства.

4. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

Выполняется следующая теорема единственности.

Теорема 7. Пусть матрицы B_i, $i = 1, 2$, некоторым преобразованием подобия приводятся к блочно-треугольному виду

$$\widetilde{B}_i = S_1^{-1} B_i S_1 = \begin{bmatrix} B_{i11} & B_{i12} & \dots & B_{i1l_1} \\ 0 & B_{i22} & \dots & B_{i2l_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_{il_1 l_1} \end{bmatrix},\ i = 1, 2,$$

причем для каждой пары блоков $\{B_{1kk}, B_{2kk}\}$ дальнейшее упрощение невозможно. Если существует другое преобразование подобия такое, что для полученных блоков дальнейшее упрощение невозможно:

$$\widetilde{B}_i' = S_2^{-1} B_i S_2 = \begin{bmatrix} B'_{i11} & B'_{i12} & \dots & B'_{i1l_2} \\ 0 & B'_{i22} & \dots & B'_{i2l_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B'_{il_2l_2} \end{bmatrix}, \ i = 1, 2,$$

то $l_1 = l_2$ и можно установить соответствие между номерами блоков такое, что блоки B_{ikk} подобны блокам $B'_{ij(k)j(k)}$, т.е. $B_{ikk} = S_k^{-1} B'_{ij(k)j(k)} S_k$.

Эта теорема является следствием теоремы Жордана–Гельдера (см. также теорему 1 в [12]). ■

5. ПРЕОДОЛЕНИЕ ОСОБОГО СЛУЧАЯ

Рассмотрим случай, когда базис централизатора содержит более одной матрицы ($r > 1$), но каждая из них не имеет различных собственных чисел. Тогда возникает предположение, что все матрицы централизатора не имеют различных собственных чисел и, следовательно, исходные матрицы не приводятся к блочно-диагональному виду одновременно. Оказывается, это предположение справедливо, если алгебра $\Lambda(B_j)$ имеет ранг $r \le 3$, и несправедливо при $r = 4$ (см. теорему 6.6 в [1]).

Далее показано, как в рассматриваемом случае привести матрицы к блочно-треугольному виду, не изучая вопрос о возможности приведения их к блочно-диагональному виду.

Теорема 8. Если ранг централизатора $\Lambda(B_\nu)$ матриц $\{B_\nu\}$ больше единицы: $r > 1$, то матрицы $\{B_\nu\}$ приводятся к блочно-треугольному виду.

Доказательство. Выберем такой базис $W_1, \dots, W_r$ централизатора $\Lambda(B_\nu)$, в котором $W_1 = E$. Если матрица W_2 имеет единственное собственное число λ, то матрица $G = W_2 - \lambda E$ нильпотентна. Подпространство $L = \{\boldsymbol{\xi} : G\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}\}$ нетривиальное, поскольку матрица G нильпотентная и ненулевая. Кроме того, $G(B_\nu \boldsymbol{\xi}) = B_\nu G \boldsymbol{\xi} = B_\nu \mathbf{0} = \mathbf{0}$ $\forall \boldsymbol{\xi} \in L$, т.е. подпространство L инвариантно относительно матриц $\{B_\nu\}$. Поэтому существует преобразование, приводящее матрицы $\{B_\nu\}$ к блочно-треугольному виду (теорема 3). ■

Замечание 1. Условие $r > 1$ не является необходимым для приведения матриц к блочно-треугольному виду.

6. ИЛЛЮСТРАЦИЯ МЕТОДОВ

Пример 1. Для матриц

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \ B_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 32 & 3 & 4 \\ 8 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

используем метод коммутирующей матрицы. Все элементы x_{ij} матрицы X рассмотрим в качестве неизвестных. Составим систему алгебраических уравнений, соответствующую матричным уравнениям $B_1 X = X B_1$, $B_2 X = X B_2$. Ее общее решение следующее:

$$x_{12} = \frac{1}{16} x_{21}; \ x_{22} = x_{11}; \ x_{33} = x_{11} - \frac{1}{4} x_{21}; \ x_{13} = x_{23} = x_{31} = x_{32} = 0,$$

где x_{11} и x_{21} — свободные неизвестные. Или иначе

$$X = x_{11}E + x_{21}\begin{bmatrix} 0 & 0.0625 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 \end{bmatrix}.$$

При $x_{11} = 0$, $x_{21} = 1$ собственные числа матрицы X таковы: $\lambda_1 = \lambda_2 = -0.25$; $\lambda_3 = 0.25$. Далее получим собственные векторы матрицы X и построим матрицу преобразования

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -0.25 & 0.25 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Преобразованием подобия исходные матрицы приведем к блочно-диагональному виду

$$\widetilde{B}_1 = \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \; \widetilde{B}_2 = \left[\begin{array}{cc|c} 5 & -4 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 11 \end{array}\right]. \tag{4}$$

Далее рассмотрим блоки $B_{111} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B_{211} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$. Для них множество всех коммутирующих матриц $\Lambda(B_\nu)$ равно αE, где где α — произвольное число. Значит, приведение этих блоков к блочно-диагональному виду невозможно (теорема 1).

Проверим возможность упрощения по методу инвариантного подпространства. Матрицы E, B_{111} и B_{211} линейно независимы. Рассмотрим произведение $U = B_{111}B_{211}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что из равенства $\alpha E + \beta B_{111} + \gamma B_{211} + \lambda U = 0$ вытекает $\alpha = \beta = \gamma = \lambda = 0$, т.е. матрица U не принадлежит линейной оболочке первых трех матриц. Получаем, что $r = 4$, и условие $r < n^2$ не выполняется. Дальнейшее упрощение матриц невозможно. Следовательно, окончательный результат — это матрицы (4).

Пример 2. Рассмотрим матрицы $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что соответствующий централизатор состоит только из матриц вида αE. Следовательно, приведение к диагональному виду матриц $\{B_\nu\}$ невозможно.

Составим алгебру $\varphi(B_\nu)$. Матрицы E, B_1, B_2 линейно независимы. Обозначим их соответственно W_1, W_2, W_3. Рассмотрим все возможные произведения матриц $W_k W_j$ и проверим, являются ли полученные матрицы линейной комбинацией исходных. Поскольку умножение на $W_1 = E$ не изменяет матриц, рассмотрим произведения $W_k W_j$ для $k, j = 2, 3$. Вычислим $W_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Проверим, является ли эта матрица линейной комбинацией первых двух $W_2^2 = \alpha W_1 + \beta W_2$. Это равенство соответствует системе уравнений, из которой получим $\beta = 3$, $\alpha = -2$. Следовательно, матрица W_2^2 является линейной комбинацией матриц W_1 и W_2. Далее вычислим

$$W_2 W_3 = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -7 & -4 \end{bmatrix} = W_3, \; W_3 W_2 = \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ -11 & -8 \end{bmatrix} = -6E + 3W_2 + 2W_3,$$

$$W_3^2=\begin{bmatrix}21 & 12\\ -21 & -12\end{bmatrix}=3W_3\,.$$

Получено, что все произведения принадлежат линейной оболочке матриц W_1, W_2, W_3. Следовательно, эти матрицы образуют базис алгебры $\varphi(B_\nu)$, порожденной матрицами $\{B_\nu\}$. Число элементов базиса $r=3$, т. е. $r< n^2 \equiv 2^2$. Это означает, что приведение к треугольному виду возможно.

Составим матрицу $D=\{\mathrm{Sp}(W_j W_k)\}$. Все произведения $W_j W_k$ уже вычислены. Получим

$$D=\begin{bmatrix}2 & 3 & 3\\ 3 & 5 & 3\\ 3 & 3 & 9\end{bmatrix}.$$

Составим систему уравнений $D\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$, общее решение которой следующее: $\alpha_1=-6\alpha_3$, $\alpha_2=3\alpha_3$, где α_3 — свободная переменная. Положив $\alpha_3=1$, получим $\boldsymbol{\alpha}=[-6\ \ 3\ \ 1]^{\mathrm{T}}$. Вычислим матрицу G:

$$G=-6\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}7 & 4\\ -7 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 4\\ -4 & -4\end{bmatrix}.$$

Уравнения $G\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$ имеют вид $\begin{cases}4\xi_1+4\xi_2=0,\\ -4\xi_1-4\xi_2=0.\end{cases}$ Отсюда $\xi_1=-\xi_2$. Положив $\xi_2=1$, получим, что базис во множестве решений этой системы состоит из вектора $\mathbf{s}_1=\boldsymbol{\xi}=[-1\ \ 1]^{\mathrm{T}}$. В качестве дополнения до базиса всего пространства выбираем вектор $\mathbf{e}_1=[1\ \ 0]^{\mathrm{T}}$. Поэтому $S=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$. Далее получим

$$S^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix};\ \widetilde{B}_1=S^{-1}ES=E;\ \widetilde{B}_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix};$$

$$\widetilde{B}_3=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 4\\ -7 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -7\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

7. ОБОБЩЕНИЯ

Понятно, что исходных матриц может быть больше двух. Ход решения при этом практически не изменяется. Лишь увеличивается число матричных уравнений (2) или количество исходных матриц при составлении алгебры $\varphi(B_\nu)$.

Задачу о получении наилучшего блочно-треугольного вида можно поставить и по-другому: найти такую матрицу преобразования S, при которой максимальный из порядков диагональных блоков будет минимально возможным. Из теоремы единственности следует что, решая задачу о получении максимального количества блоков, одновременно получим блоки минимально возможного порядка.

Рассмотрим задачу о приведении матриц B_ν, $\nu=\overline{1,d}$, к блочно-треугольному виду с помощью преобразования $\hat{B}_\nu=HB_\nu S$, более общего, чем преобразование подобия (1). Здесь H и S — неособенные квадратные матрицы. Эту задачу удалось решить в частном случае, когда одна из исходных матриц неособенная.

Введем обозначения. Пусть $l'(B_\nu, S)$ — количество блоков на главной диагонали матриц $\widetilde{B}_\nu=S^{-1}B_\nu S$, приведенных к блочно-треугольному виду, а $l(B_\nu)=\max\limits_{S:\det S\neq 0} l'(B_\nu, S)$.

Теорема 9. Даны матрицы B_ν, $\nu = \overline{1, d}$, причем $B_1 = E$, тогда $l(NB_\nu) \le l(B_\nu)$, где N — любая неособенная матрица. ■

Получаем, что для нахождения преобразования $\hat{B}_\nu = HB_\nu S$ с максимально возможным количеством блоков на главной диагонали достаточно решить такую задачу с помощью преобразования подобия для вспомогательных матриц $C_\nu = B_1^{-1} B_{\nu+1}$, $\nu = \overline{1, \mu}$, $\mu = d - 1$. Рассматривается случай, когда матрица B_1 неособенная.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, задача полностью решена. Разработан метод, позволяющий привести набор нескольких комплексных (вообще говоря) матриц к наилучшему блочно-треугольному виду. В отличие от [14, 15] в настоящей работе не накладывается никаких ограничений на структуру или свойства исходных матриц.

Этот результат имеет прикладное значение. Таким методом можно упрощать системы линейных дифференциальных уравнений, содержащие несколько матриц коэффициентов [1, 13]. Разделение уравнений на независимые подсистемы соответствует приведению матриц к блочно-диагональному виду, а приведение к блочно-треугольному виду соответствует иерархической (вертикальной) декомпозиции. После такого преобразования первая подсистема не содержит переменных других подсистем. Во второй подсистеме имеются только переменные первой и второй подсистем и т.д. Число таких подсистем может быть бóльшим, чем при обычной декомпозиции.

Тема декомпозиции матриц стала еще актуальней в связи с проблемой упрощения задач полуопределенного программирования [16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Базилевич Ю.Н. Численные методы декомпозиции в линейных задачах механики. Киев: Наук. думка, 1987. 156 с.
2. Базилевич Ю.Н., Коротенко Л.М., Швец И.В. Численное решение задач иерархической декомпозиции линейных математических моделей. Міждержавна наукова-методична конференція. Комп'ютерне моделювання. Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2001. С. 45–46.
3. Базилевич Ю.Н. Точная декомпозиция линейных систем. *Электронный журнал «Исследовано в России»*. 2006. 018. С. 182–190. URL: http://elibrary.lt/resursai/Uzsienio%20leidiniai/MFTI/2006/018.pdf.
4. Дрозд Ю.А. О ручных и диких матричных задачах. Матричные задачи. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977. С. 104–114.
5. Ферми Э. Квантовая механика. Москва: Мир, 1968. 367 с.
6. Лопатин А.К. Об алгебраической приводимости систем линейных дифференциальных уравнений. *Дифференц. уравнения*. 1968. Т. 4, № 3. С. 439–445.
7. Якубович Е. Д. Построение систем замещения для некоторого класса многомерных линейных систем автоматического управления. *Изв. вузов. Радиофизика*. 1969. Т. 12, № 3. С. 362–377.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Москва: Наука, 1967. 576 с.
9. Базилевич Ю.Н., Булдович А.Л. Алгоритм нахождения общего решения системы линейных однородных алгебраических уравнений в случае сверхбольшой разреженной матрицы коэффициентов. *Математические модели и современные технологии: Сб. науч. тр. Ин-т математики НАН Украины*. Киев, 1998. С. 12–13.
10. Ван дер Варден. Алгебра. Москва: Наука, 1976. 648 с.
11. Чеботарев Н.Г. Введение в теорию алгебр. Москва: URSS, 2008. 88 с.

12. Белозеров В.Е., Можаев Г.В. О единственности решения задач декомпозиции и агрегирования линейных систем автоматического управления. *Теория сложных систем и методы их моделирования.* Москва: ВНИИСИ, 1982. С. 4–13.

13. Павловский Ю.Н., Смирнова Т.Г. Проблема декомпозиции в математическом моделировании. Москва: ФАЗИС, 1998. 266 с.

14. Шаваровский Б.З. Преобразования подобия разложимых матричных многочленов и некоторые их связи. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2009. Т. 49, № 9. С. 1539–1553.

15. Икрамов Х.Д. Одновременное приведение к блочно-треугольному виду и теоремы о парах комплексных идемпотент. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2011. Т. 51, № 6. С. 979–982.

16. de Klerk E., Dobre C., Pasechnik D.V. Numerical block diagonalization of matrix *-algebras with application to semidefinite. *Math. Program. Ser. B*. 2011. Vol. 129. P. 91–111.

Надійшла до редакції 16.06.2016

Ю.М. Базилевич

НАЙКРАЩЕ ЗВЕДЕННЯ МАТРИЦЬ ДО БЛОЧНО-ТРИКУТНОГО ВИГЛЯДУ ДЛЯ ЗАДАЧ ІЄРАРХІЧНОЇ ДЕКОМПОЗИЦІЇ

Анотація. Розглянуто розв'язання задачі про зведення декількох комплексних (взагалі кажучи) $n \times n$-матриць до однакового блочно-трикутного вигляду з максимально можливою кількістю блоків на головній діагоналі за допомогою перетворення подібності. Отриманий розв'язок можна використовувати для застосування методів ієрархічної декомпозиції при аналізі складних систем.

Ключові слова: матриця, блочно-трикутний вигляд, перетворення подібності, централізатор, алгебра над полем, радикал.

Yu.N. Bazilevich

BEST REDUCTION OF MATRICES TO THE BLOCK TRIANGULAR FORM FOR HIERARCHICAL DECOMPOSITION PROBLEMS

Abstract. The author solves the problem of reducing several complex (generally speaking) $n \times n$-matrices to the same block triangular form by a similarity transformation with maximum possible number of blocks on the main diagonal. The obtained solution may be used to apply the methods of hierarchical decomposition in the analysis of complex systems.

Keywords: matrix, block-triangular form, similarity transformation, the centralizer, algebra over the field, radical.

Базилевич Юрий Николаевич,
кандидат физ.-мат. наук, доцент ГВУЗ «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры», Днепр, e-mail: bazilevich@yandex.ru.