УДК 681.3

О.І. ПРОВОТАР, О.О. ПРОВОТАР

ДОСТОВІРНІСТЬ В НЕЧІТКИХ СИСТЕМАХ ЛОГІЧНОГО ВИВЕДЕННЯ

Анотація. Запропоновано підхід до знаходження числових характеристик вихідних даних в системах нечіткого логічного виведення. Такі характеристики обчислюються на основі ймовірносних оцінок нечітких подій та узагальнених на нечіткий випадок формул Баєса і називаються достовірностями нечітких подій.

Ключові слова: нечітка множина, ймовірність нечіткої події, система нечіткого логічного виведення, достовірність.

ВСТУП

Відомо, що зручним інструментом для подання знань в інформаційних системах є нечіткі множини [1–5]. За допомогою нечітких множин можна описати, наприклад, картину симптоматики захворювання пацієнта в експертних діагностичних системах [6]. Визначення діагнозу пацієнта в таких системах потребує використання механізмів логічного виведення. Зокрема, у випадку нечітких специфікацій як симптоматики, так і діагностування таким механізмом можуть бути так звані нечіткі системи логічного виведення, які будуються на основі ідей та методів індуктивної математики [7].

Під нечіткою специфікацією задачі розуміють упорядковану множину нечітких інструкцій. Нечітку специфікацію задачі разом з алгоритмом, під час виконання якого одержуємо наближений (нечіткий) розв'язок цієї задачі, називатимемо нечіткою системою логічного виведення.

Нехай $x_1, \ldots, x_n$ — вхідні лінгвістичні змінні і y — вихідна лінгвістична змінна [1–5]. Упорядкована множина нечітких інструкцій має вигляд

$$\textbf{якщо } x_1 \in A_{11} \wedge \ldots \wedge x_n \in A_{1n}, \textbf{ то } y \in B_1,$$

$$\textbf{якщо } x_1 \in A_{21} \wedge \ldots \wedge x_n \in A_{2n}, \textbf{ то } y \in B_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\textbf{якщо } x_1 \in A_{m1} \wedge \ldots \wedge x_n \in A_{mn}, \textbf{ то } y \in B_m,$$

де A_{ij} і B_i — нечіткі множини, символ $\wedge$ інтерпретують як t-норму нечітких множин.

Алгоритм обчислення виходу такої специфікації при входах $A'_1, \ldots, A'_n$ полягає у виконанні таких кроків:

1) обчислюємо рівні істинності правил

$$\alpha_i = \min[\max(A'_1(x_1) \wedge A_{i1}(x_1)), \ldots, \max(A'_n(x_n) \wedge A_{in}(x_n))];$$

2) обчислюємо виходи кожного правила

$$B'_i(y) = \min(\alpha_i, B_i(y));$$

3) обчислюємо агрегатний вихід

$$B'(y) = \max(B'_1(y), \ldots, B'_m(y)).$$

ЕКСПЕРТНІ ДІАГНОСТИЧНІ СИСТЕМИ

Нехай $\boldsymbol{X}_1 = \{5, 10, 15, 20\}$, $\boldsymbol{X}_2 = \{5, 10, 15, 20\}$, $\boldsymbol{X}_3 = \{35, 36, 37, 38, 39, 40\}$ — відповідно простори для визначення значень лінгвістичних змінних

$$x_1 = \text{«Кашель»} = \{\text{«}\textit{слабкий (К)}\text{», «}\textit{помірний (К)}\text{», «}\textit{сильний (К)}\text{»}\},$$

$$x_2 = \text{«Нежить»} = \{\text{«}\textit{слабкий (Н)}\text{», «}\textit{помірний (Н)}\text{», «}\textit{сильний (Н)}\text{»}\},$$

$$x_3 = \text{«Температура»} = \{\text{«}\textit{нормальна}\text{», «}\textit{підвищена}\text{», «}\textit{висока}\text{», «}\textit{дуже висока}\text{»}\}.$$

Визначимо елементи цих множин:

«Кашель»: «*слабкий* (*К*)» $= 1/5 + 0.5/10$; «*помірний* (*К*)» $= 0.5/5 + 0.7/10 + 1/15$; «*сильний* (*К*)» $= 0.5/10 + 0.7/15 + 1/20$.

«Нежить»: «*слабкий* (*Н*)» $= 1/5 + 0.5/10$; «*помірний* (*Н*)» $= 0.5/10 + 1/15$; «*сильний* (*Н*)» $= 0.7/15 + 1/20$.

«Температура»: «*нормальна*» $= 0.5/35 + 0.8/36 + 0.9/37 + 0.5/38$; «*підвищена*» $= 0.5/37 + 1/38$; «*висока*» $= 0.5/38 + 1/39$; «*дуже висока*» $= 0.8/39 + 1/40$.

Нехай $\boldsymbol{Y}$ = {Грип, ГРЗ, Ангіна, Запалення легенів} — простір для визначення значень лінгвістичної змінної y. Тоді залежність визначення діагнозу пацієнта від симптомів його захворювання можна описати такою системою специфікацій:

якщо x_1 є «*слабкий* (*К*)» $\wedge x_2$ є «*слабкий* (*Н*)» $\wedge x_3$ є «*підвищена*», **то** $\boldsymbol{y}$ є «$0.5/$ Грип $+ 0.5/$ ГРЗ $+ 0.4/$ Ангіна $+ 0.8/$ Запалення легенів»;

якщо x_1 є «*слабкий* (*К*)» $\wedge x_2$ є «*помірний* (*Н*)» $\wedge x_3$ є «*висока*», **то** y є «$0.8/$ Грип $+ 0.7/$ ГРЗ $+ 0.8/$ Ангіна $+ 0.3/$ Запалення легенів»;

якщо x_1 є «*слабкий* (*К*)» $\wedge x_2$ є «*помірний* (*Н*)» $\wedge x_3$ є «*дуже висока*», **то** y є «$0.9/$ Грип $+ 0.7/$ ГРЗ $+ 0.8/$ Ангіна $+ 0.2/$ Запалення легенів».

Якщо на вхід x_1 цього алгоритму подати величину $A_1' = 1/5 + 0.7/10$, на вхід x_2 — величину $A_2' = 1/5 + 0.5/10$, на вхід x_3 — величину $A_3' = 1/36 + 0.9/37$, то згідно з процедурою виконання алгоритму нечіткої системи логічного виведення одержимо нечіткий розв'язок задачі

$$B = 0.5/\text{ Грип} + 0.5/\text{ ГРЗ} + 0.4/\text{ Ангіна} + 0.5/\text{ Запалення легенів}.$$

Оберненою до цієї задачі може бути задача пошуку симптомів за нечітким діагнозом. А саме, нехай вихід нечіткої системи логічного виведення при входах $A_1' = x_1/5 + x_2/10 + x_3/15 + x_4/20$, $A_2' = 1/5 + 0.5/10$, $A_3' = 1/36 + 0.9/37$ є нечітка множина

$$B = 0.5/\text{ Грип} + 0.5/\text{ ГРЗ} + 0.4/\text{ Ангіна} + 0.5/\text{ Запалення легенів}.$$

Агрегація індивідуальних виходів призводить до такої системи нечітких реляційних рівнянь:

$$\min\,[\max\,(x_1 \wedge 1, x_2 \wedge 0.5), 0.4] = 0.4,$$

$$\min\,[\max\,(x_1 \wedge 1, x_2 \wedge 0.5), 0.5] = 0.5.$$

Розв'язуючи її, одержимо значення симптому «Кашель», яке описується нечіткою множиною «Кашель» $= 0.5/5 + 1/10$.

Ймовірність. В обох попередніх випадках важливим є питання достовірності одержаних результатів. Один із підходів до розв'язання цієї задачі полягає у знаходженні ймовірнісних оцінок одержаних результатів [8]. Як відомо [9], щоб визначити ймовірність події A у просторі елементарних подій $\boldsymbol{X}$, вводять поняття ймовірнісної міри. Це числова функція P, яка ставить у відповідність число $P(A)$ елементарній події A, причому

$$0 \le P(A) \le 1,\ \ P(\boldsymbol{X}) = 1,\ \ P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

для будь-яких $A_1, A_2, \ldots$ таких, що $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \ne j$.

У [7] запропоновано підхід, який за допомогою теореми Баєса дозволяє розв'язувати задачу розпізнавання у такій постановці. Відомі значення функції f від n змінних для m наборів значень аргументу, а також відповідні розподіли ймовірностей. Треба побудувати таку процедуру, яка за довільним набором значень аргументів дозволить визначати відповідне значення функції (з певною ймовірністю).

Узагальнення теореми Баєса. Нечіткою подією A в просторі $\boldsymbol{X}$ будемо називати нечітку множину

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in \boldsymbol{X}\},$$

де $\mu_A : \boldsymbol{X} \to [0,1]$ — функція належності нечіткої множини A. Тоді ймовірність події A можна обчислити за формулою

$$P(A) = \sum_{x \in A} \mu_A(x) P(x).$$

Враховуючи це, можна обчислювати ймовірності будь-яких нечітких подій при заданій ймовірнісній мірі. Зокрема, ймовірність симптому «Кашель» $=$ $= 0.5/5 + 1/10$ при розподілі ймовірностей $P(5) = 0.4$, $P(10) = 0.4$, $P(15) = 0.1$, $P(20) = 0.1$ обчислюється так:

$$P(\text{«Кашель»}) = 0.5 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.4.$$

Умовною ймовірністю події A за умови виконання події B називають ймовірність події A, що обчислена з припущенням того, що відбулась подія B, позначають таку умовну ймовірність $P(A \mid B)$ або $P_B(A)$.

У загальному випадку знайти умовну ймовірність у класичному розумінні ймовірності досить просто. Нехай з n взаємовиключальних та рівноймовірних елементарних подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ подіям A, B та AB сприяють m, k та r елементарних подій відповідно. (Зрозуміло, що $r \le k$, $r \le m$.) Якщо подія B відбулась, то це означає, що відбулась одна з елементарних подій A_j, що сприяє події B. За цієї умови події A сприяє лише r і тільки r елементарних подій A_j, що сприяють AB. Таким чином отримуємо

$$P(A \mid B) = \frac{r}{k} = \frac{r/n}{k/n} = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

звідки ймовірність одночасного настання двох залежних подій буде дорівнювати добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчисленої за умови, що перша відбулась, тобто

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B).$$

Це твердження називають теоремою множення для умовних ймовірностей.

З умовною ймовірністю подій тісно пов'язане поняття незалежності подій. Кажуть, що подія A незалежна від події B, якщо має місце рівність $P(A \mid B) = P(A)$, тобто якщо настання події B ніяким чином не змінює ймовірності настання події A. Властивість незалежності подій є взаємною, тобто якщо подія A незалежна від події B, то подія B також незалежна від події A, і навпаки. У цьому легко можна переконатись, використовуючи теорему множення.

З теореми множення також можна отримати альтернативне означення незалежності подій, а саме, якщо A та B незалежні події, то виконується рівність $P(AB) = P(A)P(B)$, і навпаки, якщо виконується рівність, то події A та B незалежні.

Умовну ймовірність нечіткої події A за умови настання нечіткої події B будемо визначати за Демпстером [10]. А саме, функція розподілу $P_{(A|B)}$ умовної ймовірності нечіткої події A за умови виконання нечіткої події B визначається через функцію розподілу $P_{(A,B)}$ бінарної ймовірності декартового добутку $A \times B$ та функцію розподілу P_B ймовірності нечіткої події B за умови, що вона не дорівнює нулю, тобто для будь-якої пари $(x,\ y)$ з декартового добутку просторів $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}$ виконується

$$Q_{(A\times B)}(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{P_{(A,B)}(x,\ y)}{P_B(y)}, & P_B(y)\neq 0,\\ 1, & P_B(y)=0,\end{cases}$$

$$P_{(A\mid B)}(x,\ y)=\frac{Q_{A\times B}(x,\ y)}{\sum\limits_{x,\ y}Q_{A\times B}(x,\ y)}.$$

Враховуючи це, можна обчислювати умовні ймовірності будь-яких нечітких подій при заданій ймовірнісній мірі. Зокрема, нехай треба обчислити ймовірність у пацієнта симптому $A=$ «Кашель» $=0.5/5+1/10$ з розподілом ймовірностей

$$P_A(5)=0.4,\ P_A(10)=0.4,\ P_A(15)=0.1,\ P_A(20)=0.1$$

за умови, що у пацієнта хвороба

$$B=0.5/\text{Грип}+0.5/\text{ГРЗ}+0.4/\text{Ангіна}+0.5/\text{Запалення легенів}$$

з розподілом ймовірностей

$$P_B(\text{Грип})=0.5,\ P_B(\text{ГРЗ})=0.3,\ P_B(\text{Ангіна})=0.1,\ P_B(\text{Запалення легенів})=0.1.$$

Функцію розподілу бінарної ймовірності декартового добутку $A\times B$ будемо обчислювати за формулою $P_{(A,B)}(x,\ y)=\min(P_A(x),P_B(y))$. Тому функцію розподілу $P_{(A,B)}$ бінарної ймовірності декартового добутку $A\times B$ визначають за допомогою табл. 1. Тоді функцію розподілу $P_{(A|B)}$ визначають за допомогою табл. 2.

Наступним кроком є обчислення декартового добутку $A\times B$. Отже, маємо табл. 3.

Таблиця 1

X_1	Грип	ГРЗ	Ангіна	Запалення легенів
5	0.4	0.3	0.1	0.1
10	0.4	0.3	0.1	0.1
15	0.1	0.1	0.1	0.1
20	0.1	0.1	0.1	0.1

Таблиця 2

X_1	Грип	ГРЗ	Ангіна	Запалення легенів
5	6/95	3/38	3/38	3/38
10	6/95	3/38	3/38	3/38
15	3/190	1/38	3/38	3/38
20	3/190	1/38	3/38	3/38

Таблиця 3

X_1	Грип	ГРЗ	Ангіна	Запалення легенів
5	0.5	0.5	0.4	0.5
10	0.5	0.5	0.4	0.5
15	0	0	0	0
20	0	0	0	0

Тепер можна обчислити ймовініcть події A за умови, що відбулася подія B, так: $P(A/B)=6/38+18/95$.

Використовуючи метод обчислення умовної ймовірності, можна обчислити ймовірність хвороби за заданою симптоматикою.

Розглянемо приклад. Нехай $\boldsymbol{X}_1=\{5,\ 10\}$, $\boldsymbol{X}_2=\{5,\ 10\}$, $\boldsymbol{X}_3=\{36,\ 37,\ 38,\ 39,\ 40\}$ — відповідно простори для визначення значень лінгвістичних змінних

$x_1=$ «Кашель» $=\{$«*слабкий* (*К*)», «*помірний* (*К*)», «*сильний* (*К*)»$\}$,

$x_2=$ «Нежить» $=\{$«*слабкий* (*Н*)», «*помірний* (*Н*)», «*сильний* (*Н*)»$\}$,

$x_3=$ «Температура» $=\{$«*нормальна*», «*підвищена*», *висока*», «*дуже висока*»$\}$.

Визначимо елементи цих множин:

«Кашель»: «*слабкий* (*К*)» $=1/5$; «*помірний* (*К*)» $=0.5/5+0.5/10$; «*сильний* (*К*)» $=1/10$;

«Нежить»: «*слабкий* (*Н*)» $=1/5$; «*помірний* (*Н*)» $=0.5/5+0.5/10$; «*сильний* (*Н*)» $=1/10$;

«Температура»: «*нормальна*» $=1/36+0.5/37$; «*підвищена*» $=1/37+0.5/38$; «*висока*» $=1/38+0.5/39$; «*дуже висока*» $=0.5/39+1/40$.

Нехай $\boldsymbol{Y}$ = {Грип, ГРЗ, Ангіна, Запалення легенів} — простір для визначення значень лінгвістичної змінної y. Тоді залежність визначення діагнозу пацієнта від симптомів його захворювання можна описати такою системою специфікацій:

якщо x_1 є «*слабкий* (*К*)» $\wedge\, x_2$ є «*слабкий* (*Н*)» $\wedge\, x_3$ є «*підвищена*», **то** y є «$0.5/$Грип $+0.5/$ГРЗ $+0.4/$Ангіна $+0.8/$Запалення легенів»;

якщо x_1 є «*слабкий* (*К*)» $\wedge\, x_2$ є «*помірний* (*Н*)» $\wedge\, x_3$ є «*висока*», **то** y є «$0.8/$Грип $+0.7/$ГРЗ $+0.8/$Ангіна $+0.3/$Запалення легенів»;

якщо x_1 є «*слабкий* (*К*)» $\wedge\, x_2$ є «*помірний* (*Н*)» $\wedge\, x_3$ є «*дуже висока*», **то** y є «$0.9/$Грип $+0.7/$ГРЗ $+0.8/$Ангіна $+0.2/$Запалення легенів».

Якщо на вхід x_1 цієї системи специфікацій подати величину $A_1' =1/5+0.5/10$, на вхід x_2 — величину $A_2' =1/5+0.5/10$, на вхід x_3 — величину $A_3' =1/38$, то згідно з алгоритмом виконання системи нечітких специфікацій одержимо нечіткий розв'язок задачі

$$B' = 0.5/\text{Грип} + 0.5/\text{ГРЗ} + 0.5/\text{Ангіна} + 0.5/\text{Запалення легенів}.$$

Отже, треба знайти ймовірність дігнозу B' за симптомами A_1', A_2', A_3' відповідно. Крім того, нехай розподіли ймовірностей у просторах $\boldsymbol{X}_1 = \{5, 10\}$, $\boldsymbol{X}_2 = \{5, 10\}$, $\boldsymbol{X}_3 = \{36, 37, 38, 39, 40\}$, $\boldsymbol{Y}$ = {Грип, ГРЗ, Ангіна, Запалення легенів} задано так:

«Кашель»: $P_{\boldsymbol{X}_1}(5)=0.4$, $P_{\boldsymbol{X}_1}(10)=0.6$;

«Нежить»: $P_{\boldsymbol{X}_2}(5)=0.4$, $P_{\boldsymbol{X}_2}(10)=0.6$;

«Температура»: $P_{\boldsymbol{X}_3}(36)=0.3$, $P_{\boldsymbol{X}_3}(37)=0.3$, $P_{\boldsymbol{X}_3}(38)=0.2$, $P_{\boldsymbol{X}_3}(39)=0.1$, $P_{\boldsymbol{X}_3}(40)=0.1$;

«Діагноз»: $P_{\boldsymbol{Y}}$(Грип) $=0.5$, $P_{\boldsymbol{Y}}$(ГРЗ) $=0.3$, $P_{\boldsymbol{Y}}$(Ангіна) $=0.1$, $P_{\boldsymbol{Y}}$(Запалення легенів) $=0.1$.

Спочатку обчислимо ймовірності гіпотез — нечітких специфікацій логічного виведення. Перетворимо першу гіпотезу

$H_1 =$ **якщо** x_1 є «*слабкий* (*К*)» $\wedge\, x_2$ є «*слабкий* (*Н*)» $\wedge\, x_3$ є «*підвищена*», **то** y є «$0.5/$Грип $+0.5/$ГРЗ $+0.4/$Ангіна $+0.8/$Запалення легенів»

до вигляду

$H_1 = \neg(x_1$ є «*слабкий* (*К*)») $\vee \neg(x_2$ є «*слабкий* (*Н*)») $\vee \neg(x_3$ є «*підвищена*») $\vee$ $\vee\, y$ є «$0.5/$Грип $+0.5/$ГРЗ $+0.4/$Ангіна $+0.8/$Запалення легенів».

Знаходимо відповідні доповнення і одержуємо нечіткі множини:

$$\neg(x_1 \text{ є «}\textit{слабкий (К)}\text{»}) = 1/10;$$

$$\neg(x_2 \text{ є «}\textit{слабкий (Н)}\text{»}) = 1/10;$$

$$\neg(x_3 \text{ є «}\textit{підвищена}\text{»}) = 1/36+0.5/38+1/39+1/40.$$

Далі обчислюємо ймовірності нечітких множин-подій:

$$P(\neg(x_1 \text{ є «}\textit{слабкий (К)}\text{»})) = 0.6\cdot 1 = 0.6;$$

$$P(\neg(x_2 \text{ є «}\textit{слабкий (Н)}\text{»})) = 0.6 \cdot 1 = 0.6;$$

$$P(\neg(x_3 \text{ є «}\textit{підвищена}\text{»})) = 0.3 + 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0.6;$$

$$P(\text{«}0.5/\text{Грип} + 0.5/\text{ГРЗ} + 0.4/\text{Ангіна} + 0.8/\text{Запалення легенів»}) =$$

$$= 0.25 + 0.15 + 0.04 + 0.08 = 0.52.$$

Тоді ймовірність першої гіпотези H_1 дорівнює $P(H_1) = 0.58$.

Аналогічно обчислюємо ймовірності гіпотез

$$H_2 = \textbf{якщо } x_1 \text{ є «}\textit{слабкий (К)}\text{»} \wedge x_2 \text{ є «}\textit{помірний (Н)}\text{»} \wedge x_3 \text{ є «}\textit{висока}\text{», } \textbf{то}$$

$$y \text{ є «}0.8/\text{Грип} + 0.7/\text{ГРЗ} + 0.8/\text{Ангіна} + 0.3/\text{Запалення легенів»}$$

та

$$H_3 = \textbf{якщо } x_1 \text{ є «}\textit{слабкий (К)}\text{»} \wedge x_2 \text{ є «}\textit{помірний (Н)}\text{»} \wedge x_3 \text{ є «}\textit{дуже висока}\text{»,}$$

$$\textbf{то } y \text{ «}0.9/\text{Грип} + 0.7/\text{ГРЗ} + 0.8/\text{Ангіна} + 0.2/\text{Запалення легенів».}$$

Перетворюємо гіпотези до вигляду

$$H_2 = \neg(x_1 \text{ є «}\textit{слабкий (К)}\text{»}) \vee \neg(x_2 \text{ є «}\textit{помірний (Н)}\text{»}) \vee \neg(x_3 \text{ є «}\textit{висока}\text{»}) \vee$$

$$\vee\ y \text{ є «}0.8/\text{Грип} + 0.7/\text{ГРЗ} + 0.8/\text{Ангіна} + 0.3/\text{Запалення легенів»;}$$

$$H_3 = \neg(x_1 \text{ є «}\textit{слабкий (К)}\text{»}) \vee \neg(x_2 \text{ є «}\textit{помірний (Н)}\text{»}) \vee \neg(x_3 \text{ є «}\textit{дуже}$$

$$\textit{висока}\text{»}) \vee y \text{ є «}0.9/\text{Грип} + 0.7/\text{ГРЗ} + 0.8/\text{Ангіна} + 0.2/\text{Запалення легенів».}$$

Знаходимо відповідні доповнення і обчислюємо ймовірності нечітких подій для гіпотези H_2:

$$\neg(x_1 \text{ є «}\textit{слабкий (К)}\text{»}) = 1/10;$$

$$\neg(x_2 \text{ є «}\textit{помірний (Н)}\text{»}) = 0.5/5 + 0.5/10;$$

$$\neg(x_3 \text{ є «}\textit{висока}\text{»}) = 1/36 + 1/37 + 0.5/39 + 1/40;$$

$$P(\neg(x_1 \text{ є «}\textit{слабкий (К)}\text{»})) = 0.6 \cdot 1 = 0.6;$$

$$P(\neg(x_2 \text{ є «}\textit{помірний (Н)}\text{»})) = 0.4 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.5 = 0.5;$$

$$P(\neg(x_3 \text{ є «}\textit{висока}\text{»})) = 0.3 + 0.3 + 0.05 + 0.1 = 0.75;$$

$$P(0.8/\text{Грип} + 0.7/\text{ГРЗ} + 0.8/\text{Ангіна} + 0.3/\text{Запалення легенів}) =$$

$$= 0.5 \cdot 0.8 + 0.7 \cdot 0.3 + 0.8 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.1 = 0.72.$$

Тоді ймовірність гіпотези H_2 дорівнює $P(H_2) = 0.5675$.

Знаходимо відповідні доповнення і обчислюємо ймовірності нечітких подій для гіпотези H_3:

$$\neg(x_1 \text{ є «}\textit{слабкий (К)}\text{»}) = 1/10;$$

$$\neg(x_2 \text{ є «}\textit{помірний (Н)}\text{»}) = 0.5/5 + 0.5/10;$$

$$\neg(x_3 \text{ є «}\textit{дуже висока}\text{»}) = 1/36 + 1/37 + 1/38 + 0.5/39;$$

$$P(\neg(x_1 \text{ є «}\textit{слабкий (К)}\text{»})) = 0.6 \cdot 1 = 0.6;$$

$$P(\neg(x_2 \text{ є «}\textit{помірний (Н)}\text{»})) = 0.4 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.5 = 0.5;$$

$$P(\neg(x_3 \text{ є «}\textit{дуже висока}\text{»})) = 0.3 + 0.3 + 0.2 + 0.2 + 0.5 \cdot 0.1 = 0.85;$$

$$P(0.9/\text{Грип} + 0.7/\text{ГРЗ} + 0.8/\text{Ангіна} + 0.2/\text{Запалення легенів}) =$$

$$= 0.5 \cdot 0.9 + 0.7 \cdot 0.3 + 0.8 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.76.$$

Тоді ймовірність гіпотези H_3 дорівнює $P(H_3) = 0.6775$.

На наступному кроці обчислимо умовні ймовірності $P(B/H_1)$, $P(B/H_2)$, $P(B/H_3)$.

Нехай, як і раніше, $x_1, \dots, x_n$ — вхідні лінгвістичні змінні і y — вихідна лінгвістична змінна. Упорядкована множина нечітких інструкцій має вигляд

$$H_1\text{: } \textbf{якщо } x_1 \in A_{11} \wedge \dots \wedge x_n \in A_{1n}, \textbf{ то } y \in B_1,$$

$$H_2\text{: } \textbf{якщо } x_1 \in A_{21} \wedge \dots \wedge x_n \in A_{2n}, \textbf{ то } y \in B_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$H_n\text{: } \textbf{якщо } x_1 \in A_{m1} \wedge \dots \wedge x_n \in A_{mn}, \textbf{ то } y \in B_m,$$

де A_{ij} і B_i — нечіткі множини, символ $\wedge$ інтерпретують як t-норму нечітких множин.

Відомий також алгоритм обчислення виходу B' такої системи специфікацій при входах $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$, тобто виконується подія

$$B = \textbf{якщо } x_1 \in A'_1 \wedge \dots \wedge x_n \in A'_n, \textbf{ то } y \in B'.$$

Тоді алгоритм обчислення умовної ймовірності $P(B / H_i)$ полягає у виконанні таких кроків:

1) обчислюємо функцію розподілу бінарної ймовірності $P_{(B, H_i)}$:

$$P_{(B, H_i)}(x_1, \dots, x_n, y) =$$
$$= \min [\max (P_{\mathbf{X}_1}(x_1) \cdot \mu_{A'_1}(x_1), \dots, P_{\mathbf{X}_n}(x_n) \cdot \mu_{A'_n}(x_n), P_{\mathbf{Y}}(y) \cdot \mu_{B'}(y)),$$
$$\max (P_{\mathbf{X}_1}(x_1) \cdot \mu_{A_{i1}}(x_1), \dots, P_{\mathbf{X}_n}(x_n) \cdot \mu_{A_{in}}(x_n), P_{\mathbf{Y}}(y) \cdot \mu_{B_i}(y))];$$

2) обчислюємо ймовірнісну функцію декартового добутку за формулою

$$Q_{(B \times H_i)}(x_1, \dots, x_n, y) = \begin{cases} \dfrac{P_{(B, H_i)}(x_1, \dots, x_n, y)}{P_B(y)}, & P_B(y) \neq 0, \\ 1, & P_B(y) = 0; \end{cases}$$

3) обчислюємо функцію розподілу умовної ймовірності за формулою

$$P_{(B | H_1)}(x_1, \dots, x_n, y) = \frac{Q_{(B \times H_1)}(x_1, \dots, x_n, y)}{\sum\limits_{x_1, \dots, x_n, y} Q_{(B \times H_1)}(x_1, \dots, x_n, y)}.$$

Обчислимо для прикладу значення $P_{(B, H_1)}(5, 5, 36, \text{ Грип})$, $Q_{(B \times H_i)}(5, 5, 36, \text{ Грип})$ та $P_{(B | H_1)}(5, 5, 36, \text{ Грип})$.

Маємо

$$P_{(B, H_1)}(5, 5, 36, \text{ Грип}) =$$
$$= \min [\max (P_{\mathbf{X}_1}(5) \cdot \mu_{A'_1}(5), P_{\mathbf{X}_2}(5) \cdot \mu_{A'_2}(5), P_{\mathbf{X}_3}(36) \cdot \mu_{A'_3}(36), P_{\mathbf{Y}}(\text{Грип}), \mu_{B'}(\text{Грип})),$$
$$\max (P_{\mathbf{X}_1}(5) \cdot \mu_{A_{11}}(5), P_{\mathbf{X}_2}(5) \cdot \mu_{A_{12}}(5), P_{\mathbf{X}_3}(36) \cdot \mu_{A_{13}}(36), P_{\mathbf{Y}}(\text{Грип})\, \mu_{B_1}(\text{Грип}))] =$$
$$= \min [\max (0.4, 0.4, 0, 0.25), \max (0.4, 0.4, 0, 0.25)] = 0.4;$$

$$Q_{(B \times H_1)}(5, 5, 36, \text{ Грип}) = P_{(B, H_1)}(5, 5, 36, \text{ Грип}) / P_B(y) = 0.8;$$

$$P_{(B / H_1)}(5, 5, 36, \text{ Грип}) =$$
$$= Q_{(B \times H_1)}(5, 5, 36, \text{ Грип}) / \sum_{x_1, \dots, x_n, y} Q_{(B \times H_1)}(5, 5, 36, \text{ Грип}) = 0.8 / 190 = 8 / 1900.$$

Аналогічно обчислюють значення функцій розподілу бінарної ймовірності, ймовірнісної функції декартового добутку та функції розподілу умовної ймовірності для інших значень аргументів.

Наступним кроком є обчислення декартових добутків $A'_1 \times A'_2 \times A'_3 \times B'$ та $A_{11} \times A_{12} \times A_{13} \times B_1$ з подальшою їхньою агрегацією. Отже, маємо табл. 4 і 5.

Агрегація одержаних таблиць зводиться до їхнього об'єднання. Тепер можна обчислити умовну ймовірність $P(B / H_1)$. А саме, $P(B / H_1) = 131 / 1425$.

Т а б л и ц я 4

$A'_1 \times A'_2 \times A'_3 \times B'$				min
5	5	38	Грип	0.5
5	5	38	ГРЗ	0.5
5	5	38	Ангіна	0.5
5	5	38	Запалення легенів	0.5
5	10	38	Грип	0.5
5	10	38	ГРЗ	0.5
5	10	38	Ангіна	0.5
5	10	38	Запалення легенів	0.5
10	5	38	Грип	0.5
10	5	38	ГРЗ	0.5
10	5	38	Ангіна	0.5
10	5	38	Запалення легенів	0.5
10	10	38	Грип	0.5
10	10	38	ГРЗ	0.5
10	10	38	Ангіна	0.5
10	10	38	Запалення легенів	0.5

Т а б л и ц я 5

$A_{11} \times A_{12} \times A_{13} \times B_1$				min
5	5	37	Грип	0.5
5	5	37	ГРЗ	0.5
5	5	37	Ангіна	0.4
5	5	37	Запалення легенів	0.8
5	5	38	Грип	0.5
5	5	38	ГРЗ	0.5
5	5	38	Ангіна	0.4
5	5	38	Запалення легенів	0.5

Для обчислення ймовірності $P(B/H_2)$ знайдемо декартовий добуток $A_{21} \times A_{22} \times A_{23} \times B_2$. Його задано у табл. 6.

Агрегація одержаних таблиць зводиться до їхнього об’єднання. Тепер можна обчислити умовну ймовірність $P(B/H_2)$. А саме, $P(B/H_2) = 77/950$.

Для обчислення ймовірності $P(B/H_3)$ знайдемо декартовий добуток $A_{31} \times A_{32} \times A_{33} \times B_3$. Його задано у табл. 7.

Агрегація одержаних таблиць зводиться, як і в попередніх випадках, до їхнього об’єднання. Тепер можна обчислити умовну ймовірність $P(B/H_3)$. А саме, $P(B/H_3) = 122/950$.

Далі, використовуючи аналог формули повної ймовірності $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(B/H_i)$, можна обчислити ймовірність події B, тобто ймовірність того, що вихід системи нечіткого логічного виведення є B' при входах A'_1, A'_2, A'_3.

Отже, будемо мати

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(B/H_i) = 0.58 \cdot \frac{131}{1425} + 0.5675 \cdot \frac{77}{950} + 0.6775 \cdot \frac{122}{950} \approx 0.2.$$

Таблиця 6

$A_{21} \times A_{22} \times A_{23} \times B_2$				min
5	5	38	Грип	0.5
5	5	38	ГРЗ	0.5
5	5	38	Ангіна	0.5
5	5	38	Запалення легенів	0.3
5	5	39	Грип	0.5
5	5	39	ГРЗ	0.5
5	5	39	Ангіна	0.5
5	5	39	Запалення легенів	0.3
5	10	38	Грип	0.5
5	10	38	ГРЗ	0.5
5	10	38	Ангіна	0.5
5	10	38	Запалення легенів	0.3
5	10	39	Грип	0.5
5	10	39	ГРЗ	0.5
5	10	39	Ангіна	0.5
5	10	39	Запалення легенів	0.3

Таблиця 7

$A_{31} \times A_{32} \times A_{33} \times B_3$				min
5	5	39	Грип	0.5
5	5	39	ГРЗ	0.5
5	5	39	Ангіна	0.5
5	5	39	Запалення легенів	0.2
5	5	40	Грип	0.5
5	5	40	ГРЗ	0.5
5	5	40	Ангіна	0.5
5	5	40	Запалення легенів	0.2
5	10	39	Грип	0.5
5	10	39	ГРЗ	0.5
5	10	39	Ангіна	0.5
5	10	39	Запалення легенів	0.2
5	10	40	Грип	0.5
5	10	40	ГРЗ	0.5
5	10	40	Ангіна	0.5
5	10	40	Запалення легенів	0.2

ВИСНОВКИ

Запропонований у статті алгоритм дозволяє обчислювати ймовірнісні оцінки для різних нечітких подій. Зрозуміло, що ці оцінки дуже важко інтерпретувати в категоріях частотних характеристик. Тому для таких ймовірнісних оцінок нечітких подій запропоновано ввести інший термін — достовірність. Отже, всі ймовірнісні оцінки нечтіких подій, про які йдеться у статті, є не що інше як характеристика достовірності цих подій.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Provotar O. Fuzzy systems of logical inference and their application. *Proc. of 24th International Workshop CS&P*, 2015. Rzeszow, Poland, September 28–30. 2015. Vol. 2. P. 111–120.
2. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. Москва: Телеком, 2006. 382 с.
3. Zadeh L.A. Fuzzy sets. *Information and Control*. 1965. Vol. 8. P. 338–353.
4. Провотар А.И., Лапко А.В. О некоторых подходах к вычислению неопределенностей. *Проблеми програмування*. 2010. № 2-3. С. 22–27.
5. Zadeh L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*. 1978. Vol. 1. P. 3–28.
6. Гупал А.М., Сергиенко И.В. Оптимальные процедуры распознавания. Киев: Наук. думка, 2008. 232 с.
7. Vejnarová J. Conditional independence relations in possibility theory. *Int. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*. 2000. N 8. P. 253–269.
8. Джексон П. Введение в экспертные системы. Москва: Вильямс, 2001. 624 с.
9. Zadeh L.A. Probability measures of fuzzy events. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1968. Vol. 10. P. 421–427.
10. Гнеденко Б. Курс теории вероятностей. Москва: Едиториал УРСС, 2005. 448 с.

Надійшла до редакції 03.07.2017

А.И. Провотар, А.А. Провотар

ДОСТОВЕРНОСТЬ В НЕЧЕТКИХ СИСТЕМАХ ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА

Аннотация. Предложен подход к определению числових характеристик исходных данных в системах нечеткого логического вывода. Такие характеристики вычисляются на основании вероятностных оценок нечетких событий и обобщенных на нечеткий случай формул Байеса и называются достоверностями нечетких событий.

Ключевые слова: нечеткое множество, вероятность нечеткого события, система нечеткого логического вывода, достоверность.

O.I. Provotar, O.O. Provotar

CREDIBILITY IN FUZZY INFERENCE SYSTEMS

Abstract. The authors propose an approach to find numerical characteristics of initial data in fuzzy inference systems. Such characteristics are calculated on the basis of probabilistic estimates and generalization of Bayesian formula for fuzzy events and are called the credibility of fuzzy events.

Keywords: fuzzy set, probability of fuzzy event, system of fuzzy inference systems, credibility..

Провотар Олександр Іванович,
доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри Київського національного університету імені Тараса Шевченка; професор Жешувського університету, Польща,
e-mail: aprowata@unicyb.kiev.ua.

Провотар Олександр Олександрович,
аспірант Київського національного університету імені Тараса Шевченка, e-mail: aprovata@gmail.com.