КІБЕРНЕТИКА

А.С. БАЛАБАНОВ

УДК 004.855:519.216

СТРУКТУРНО ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИЙ В ЦИКЛЕ ЛИНЕЙНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Аннотация. Сформулированы и доказаны ограничения (типа неравенств) для корреляций, вытекающие из линейности и марковских свойств модели с ромбовидной структурой (цикл с одним коллайдером). Представленные неравенства специфичны для базовой модели и некорректны для альтернативных моделей, отличающихся марковскими свойствами из-за присутствия дополнительной связи. Правдоподобность нарушения этих неравенств в альтернативных моделях оценивается стохастической симуляцией. Показано, что представленные неравенства полезны для валидации модели в ситуации неполной наблюдаемости.

Ключевые слова: корреляция, ограничение типа неравенство, система линейных структуральных уравнений, ромбовидная структура модели, марковские свойства.

Известно, что структура системы зависимостей имплицирует определенные ограничения на соотношение показателей зависимостей в модели. Марковские свойства каузальной сети выражаются как равенства для условных вероятностей [1, 2]. Если наблюдаются не все переменные модели, невозможно проверить соответствующие марковские свойства. В такой ситуации для тестирования модели приходится прибегать к проверке альтернативных ограничений и критериев, которые можно вычислить из распределений вероятностей меньшей размерности. Общие алгебраические методы вывода ограничений, имплицируемых структурой каузальной сети, представлены в [3]. Специалистам по каузальным моделям известно ограничение Верма (Verma constraint [4]) для распределений условных вероятностей. Это ограничение характеризует модель инструментальной переменной, где между причиной и эффектом имеется «медиаторная» переменная, связанная с конфаундером через причину. Новые результаты для дискретных моделей можно найти в [5]. Выведенные в [6] равенства характеризуют линейные модели с несколькими скрытыми переменными. Эти равенства установлены для суммы термов с разными знаками. Для практики важно, чтобы ограничения, установленные для модели, позволяли построить тестовый критерий с широкой критической областью. В этом смысле более перспективны простые (но нетривиальные) ограничения. Наиболее известный результат — неравенство для корреляций, установленное теоремой Дж.С. Белла (для определенной квантовой системы) [7]. Большинство прагматических критериев разработано для древовидных структур моделей и линейных форм зависимостей (или для бинарных переменных). В практике анализа данных широко используются ограничения «тетрад» (равенства парных произведений корреляций), которые действуют в линейной модели, где не менее четырех переменных связаны общей «причиной» [1, 8]. Известны также ограничения для соотношений корреляций для некоторых нелинейных (монотонных) форм зависимостей [9]. Если в линейной модели имеем только три индикаторные переменные, то «тетрад» не работает, но действует слабое ограничение типа неравенства (неравенство «треугольника»). «Тетрад»-ограничение легко распространяется на бинарные переменные [10]. Аналогичные равенства выводятся для модели с бинарной общей причиной и дискретными (не обязательно бинарными) индикаторами [11, 12]. Удалось найти нетривиальное равенство («триад») для модели, где имеются только три дискретных (не бинарных) индикатора [11]. Циклические структуры сложнее характеризовать в терминах парных зависимостей. В данной статье анализируется циклическая структура линейных зависимостей.

ХАРАКТЕРНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИЙ

Каузальные сети, где все зависимости линейны, а распределения нормальны, называют гауссовыми сетями, или линейными системами структуральных уравнений. (Иногда гауссовыми сетями называют модели на основе неориентированных связей. Мы рассматриваем модели с ориентированными связями, т.е. каузальные гауссовы сети.) Гауссовы сети удобны тем, что частные корреляции совпадают с условными корреляциями. Напомним, что коллайдером называют фрагмент структуры вида $A \to C \leftarrow B$ (это означает, что A и B влияют на C).

В центре внимания данной работы — циклическая гауссова сеть из четырех (не менее четырех) переменных с одним коллайдером в цикле. Базовая модель описывается системой линейных структуральных уравнений:

$$x = \varepsilon_1; \tag{1}$$

$$z = a \cdot x + \varepsilon_2; \tag{2}$$

$$w = b \cdot x + \varepsilon_3; \tag{3}$$

$$y = c \cdot z + d \cdot w + \varepsilon_4, \tag{4}$$

где $\varepsilon_i \sim N(m_i, \sigma_i^2)$, для всех $i \neq j$ справедливо $\varepsilon_i \perp \varepsilon_j$.

Структура этой модели изображена на рис. 1, *а*. Марковские свойства модели (условные независимости, детерминированные структурой) считываются с графа модели с помощью критерия *d*-сепарации [2]. В гауссовых сетях марковские свойства выражаются нулевыми значениями соответствующих (частных) корреляций [1, 2]. Для модели (1)–(4) имеем $\rho_{ZW;\,X} = 0$ и $\rho_{XY;\,ZW} = 0$. Эта пара обнуляющихся частных корреляций определяет класс марковской эквивалентности моделей. Реверсирование ребра $X \to W$ или ребра $X \to Z$ (но только одного из них) не выводит модель за пределы класса марковской эквивалентности. (Тогда уравнения (1)–(3) соответственно переписываются.) Указанные условные независимости для набора переменных X, Z, W, Y сохраняются даже после введения дополнительной переменной Q со связями $Q \to X$ и $Q \to W$ (рис. 1, *б*). Более того, две указанные условные независимости сохраняются также в модели, где дополнительными связями охвачено ребро коллайдера (см. структуру рис. 1, *в*). Перечисленные варианты структуры модели для краткости будем называть ромбом. Для модели со структурой ромба найдены характерные ограничения для корреляций. Следующее утверждение доказано в [13].

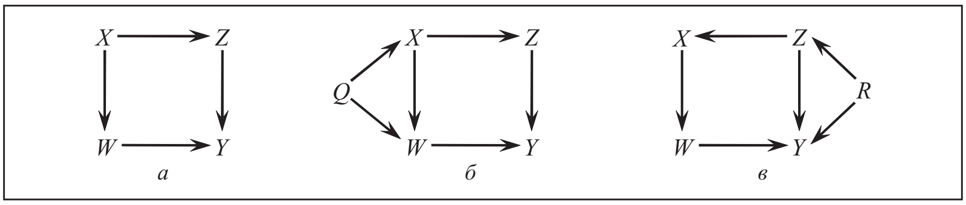

Рис. 1. Варианты базовой модели: простейшая структура (*а*); «эквивалентные» структуры с дополнительной переменной (*б*), (*в*)

Утверждение 1. В системе (1)–(4) при любых значениях параметров справедливо ограничение $\rho^2_{XY} \le \rho^2_{ZY}$ или $\rho^2_{XY} \le \rho^2_{WY}$.

Доказательство из [13] оперирует параметрами модели и непосредственно относится к одному варианту базовой модели. Между тем, такое ограничение выполняется для всего класса марковской эквивалентности, к которому относится модель (1)–(4) (и более того, для всех линейных моделей с указанными двумя независимостями). Доказательство более общего утверждения опирается исключительно на условные независимости и линейность. Сначала предположим, что $\rho^2_{XZ} \ne 1$, $\rho^2_{XW} \ne 1$, $\rho^2_{ZY} \ne 1$ и $\rho^2_{WY} \ne 1$. (Случаи, когда корреляции равны единице, рассмотрим после приведенных ниже утверждений.)

Утверждение 2 (неравенство максимальной коллайдерной корреляции). Если в каузальной гауссовой сети справедливо $\rho_{ZW;\,X} = 0$ и $\rho_{XY;\,ZW} = 0$, то выполняется ограничение $\rho^2_{XY} \le \max\{\rho^2_{ZY}, \rho^2_{WY}\}$.

Доказательство. Условие $\rho_{XY;ZW} = 0$ означает равенство $\rho_{XY;W} = \rho_{XZ;W} \cdot \rho_{ZY;W}$. Раскрывая формулы частных корреляций, получаем

$$(\rho_{XY} - \rho_{XW} \cdot \rho_{WY})(1 - \rho^2_{ZW}) = (\rho_{XZ} - \rho_{XW} \cdot \rho_{ZW})(\rho_{ZY} - \rho_{WY} \cdot \rho_{ZW}). \quad (5)$$

После элементарных алгебраических преобразований (5) и сокращения получаем

$$\rho_{XY}(1 - \rho^2_{ZW}) = \rho_{ZY}(\rho_{XZ} - \rho_{XW} \cdot \rho_{ZW}) + \rho_{WY}(\rho_{XW} - \rho_{XZ} \cdot \rho_{ZW}). \quad (6)$$

Возможно несколько случаев сочетания знаков термов в уравнении (6). Рассмотрим случай, когда оба терма правой части отрицательны. (Тогда левая часть тоже отрицательна.) Очевидно, в этом случае можно переписать (6) в следующем виде с использованием абсолютных величин (модулей):

$$|\rho_{XY}| \cdot (1 - \rho^2_{ZW}) = |\rho_{ZY}| \cdot |\rho_{XZ} - \rho_{XW} \cdot \rho_{ZW}| + |\rho_{WY}| \cdot |\rho_{XW} - \rho_{XZ} \cdot \rho_{ZW}|. \quad (7)$$

Примем предположение «от противного», т.е. пусть имеем

$$\rho^2_{XY} > \rho^2_{ZY}, \ \rho^2_{XY} > \rho^2_{WY}. \quad (8)$$

Сопоставляя (7) и (8), получаем неравенство

$$|\rho_{XY}| \cdot (1 - \rho^2_{ZW}) < |\rho_{XY}| \cdot |\rho_{XZ} - \rho_{XW} \cdot \rho_{ZW}| + |\rho_{XY}| \cdot |\rho_{XW} - \rho_{XZ} \cdot \rho_{ZW}|, \quad (9)$$

где $|\rho_{XY}|$ можно сократить.

Используя первое условие (т.е. $\rho_{ZW} = \rho_{XZ} \cdot \rho_{XW}$), получаем из (9)

$$(1 - \rho^2_{XZ}\rho^2_{XW}) < |\rho_{XZ} - \rho_{XZ} \cdot \rho^2_{XW}| + |\rho_{XW} - \rho_{XW} \cdot \rho^2_{XZ}|. \quad (10)$$

Поскольку всегда справедливо $|\rho_{**}| \le 1$, модуль разности в (10) можно заменить разностью модулей; тогда после элементарных алгебраических преобразований получаем

$$(1-|\rho_{XZ}\rho_{XW}|)\cdot(1+|\rho_{XZ}\rho_{XW}|)<(1-|\rho_{XZ}\rho_{XW}|)\cdot(|\rho_{XZ}|+|\rho_{XW}|). \quad (11)$$

Ввиду положительности обеих частей неравенства (11) общий сомножитель можно сократить. После элементарных манипуляций получаем $(1-|\rho_{XZ}|)\cdot(1-|\rho_{XW}|)<0$, что удовлетворить невозможно. Предположение «от противного» опровергнуто.

Для другого случая, когда оба терма правой части неотрицательны, доказательство идентично. Остается только рассмотреть случай, когда термы правой части (6) — разных знаков (в частности, нуль). Без потери общности, пусть в правой части (6) первый терм по модулю больше второго. Тогда отбросим второй терм, перейдем к модулям и получим неравенство

$$|\rho_{XY}|\cdot(1-\rho_{ZW}^2)< |\rho_{ZY}|\cdot|\rho_{XZ}-\rho_{XW}\cdot\rho_{ZW}|. \quad (12)$$

Используем подходящее неравенство из предположения «от противного» (8), в данном случае $\rho_{XY}^2>\rho_{ZY}^2$, и усиливаем неравенство (12) до следующего:

$$1-\rho_{ZW}^2<|\rho_{XZ}-\rho_{XW}\cdot\rho_{ZW}|. \quad (13)$$

Используя условие утверждения $\rho_{ZW}=\rho_{XZ}\cdot\rho_{XW}$, получаем из (13)

$$1-\rho_{XZ}^2\rho_{XW}^2<|\rho_{XZ}-\rho_{XZ}\cdot\rho_{XW}^2|=|\rho_{XZ}|-|\rho_{XZ}|\cdot\rho_{XW}^2. \quad (14)$$

Из (14) после элементарных алгебраических преобразований получаем

$$(1-|\rho_{XZ}|)\cdot(1+|\rho_{XZ}|\cdot\rho_{XW}^2)<0. \quad (15)$$

Неравенство (15) удовлетворить невозможно; предположение «от противного» опровергнуто.

В базовой модели ребра $X — Z$ и $X — W$ образуют цепочку и формируют транзитную зависимость. Поскольку эти ребра не входят в состав коллайдера (а «расходятся» прочь от корневой вершины), назовем их «дивергентными» ребрами (в противовес коллайдерным ребрам). Ограничение, установленное утверждением 2 для коллайдерных ребер ромба, нельзя распространить на корреляции ρ_{XZ} и ρ_{XW}, соответствующие дивергентным ребрам. (Неравенство $\rho_{XY}^2 \le \max\{\rho_{XZ}^2, \rho_{XW}^2\}$ не корректно.) Но, как показано в [13], для корреляций ρ_{XZ} и ρ_{XW} в базовой модели (1)–(4) выполняется другое ограничение — неравенство для суммы $\rho_{XY}^2 \le \rho_{XZ}^2+\rho_{XW}^2$. Аналогично предыдущему ограничению, неравенство для суммы справедливо для всего класса марковской эквивалентности, к которому относится модель (1)–(4).

Утверждение 3 (неравенство суммы дивергентных корреляций). Если в каузальной гауссовой сети справедливо $\rho_{ZW;\,X}=0$ и $\rho_{XY;\,ZW}=0$, то выполняется ограничение $\rho_{XY}^2 \le \rho_{XZ}^2+\rho_{XW}^2$.

Теперь рассмотрим случаи, когда выполняется одно или несколько равенств $\rho_{XZ}^2=1$, $\rho_{XW}^2=1$, $\rho_{ZY}^2=1$ и $\rho_{WY}^2=1$. Эти случаи соответствуют особым точкам в континуальном пространстве параметров [1, 2]. Такие случаи принято исключать при рассмотрении вероятностных графовых моделей — нет смысла отображать в структуре дубликаты одной переменной. В частности, в указанных случаях бессмысленно говорить о структуре ромба. Тем не менее, можно формально распространить действие утверждений 2 и 3 на эти случаи. Действительно, пусть $\rho^2_{XZ} = 1$. По существу, это означает тождество $X = Z$ или $X = -Z$, и тогда справедливо $\rho^2_{XY} = \rho^2_{ZY}$. Очевидно, что неравенство из утверждения 2 тривиально выполняется. Далее, подставляя $\rho^2_{XZ} = 1$ в неравенство из утверждения 3, получаем $\rho^2_{XY} \le 1 + \rho^2_{XW}$, что тривиально выполняется. Рассмотрим случай $\rho^2_{ZY} = 1$. Тогда можно легко убедиться, что неравенство из утверждения 2 тривиально выполняется. Из $\rho^2_{ZY} = 1$ вытекает $\rho^2_{XZ} = \rho^2_{XY}$. Подставляя последнее равенство в неравенство из утверждения 3, получаем $\rho^2_{XZ} \le \rho^2_{XZ} + \rho^2_{XW}$, что тривиально выполняется. Остальные случаи анализируются аналогично.

Формально можно считать, что выше доказано более абстрактное утверждение, а именно следующее. Если корреляции удовлетворяют равенствам $\rho_{ZW} = \rho_{XZ} \cdot \rho_{XW}$ и $\rho_{XY;W} = \rho_{XZ;W} \cdot \rho_{ZY;W}$ (или $\rho^2_{XW} = 1$, или $\rho^2_{ZW} = 1$, или $\rho^2_{WY} = 1$), то справедливо $\rho^2_{XY} \le \max\{\rho^2_{ZY}, \rho^2_{WY}\}$. Однако без предположений о линейности и структуре модели условия этого утверждения оказываются необоснованными и неправдоподобными. Например, в принципе возможна ситуация, когда равенство $\rho_{ZW} - \rho_{XZ} \cdot \rho_{XW} = 0$ выполняется, несмотря на то, что в структуре модели переменная X не сепарирует Z и W. Но для этого необходимо, чтобы «сумма» всех влияний через открытые параллельные пути между Z и W обнулялась благодаря взаимной аннигиляции. Такое «нелегитимное» обнуление корреляции требует точного баланса коэффициентов (нарушается предположение каузальной необманчивости [1, 2]).

В то же время можно ослабить предположение о форме распределений членов рассеяния («шума») ε_i. Известно, что условные корреляции совпадают с соответствующими частными корреляциями и для некоторых других форм распределений вероятностей [14]. Однако необходимо учитывать, что при отклонении формы распределений от нормальной возможно «нелегитимное» обнуление корреляции не только из-за феномена баланса коэффициентов, но также из-за формы распределения.

Асимметрия свойств пар связей в ромбе (выявленная утверждениями 2 и 3) объясняется тем, что корреляции для дивергентных ребер определяются исключительно локальными параметрами этих связей, а корреляции для коллайдерных ребер зависят от всех параметров цикла.

Объединение утверждений 2 и 3 дает следующий результат.

Следствие 1. Если в каузальной гауссовой сети справедливо $\rho_{ZW;X} = 0$ и $\rho_{XY;ZW} = 0$, то выполняется ограничение $2\rho^2_{XY} \le \rho^2_{XZ} + \rho^2_{XW} + \max\{\rho^2_{ZY}, \rho^2_{WY}\}$.

Ослабленное следствие из утверждений 2 и 3 выражается как $2\rho^2_{XY} \le \rho^2_{XZ} + \rho^2_{XW} + \rho^2_{ZY} + \rho^2_{WY}$.

Можно ли найти более сильные ограничения для базовой модели, чем неравенства из утверждений 2 и 3? Была рассмотрена гипотеза, что «диагональная» корреляция в ромбе всегда должна быть слабее некоторых двух реберных корреляций. Гипотеза «двух корреляций»: в модели (1)–(4) выполняется не менее двух из следующих четырех неравенств: $\rho^2_{XY} < \rho^2_{XZ}$, $\rho^2_{XY} < \rho^2_{XW}$, $\rho^2_{XY} < \rho^2_{ZY}$, $\rho^2_{XY} < \rho^2_{WY}$. Оказалось, что гипотеза неверна. Контрпример — базовая модель со значениями параметров: $\sigma^2_1 = 0{,}3$; $\sigma^2_2 = 0{,}45$; $\sigma^2_3 = 0{,}8$; $\sigma^2_4 = 0{,}1$; $a = 0{,}6$; $b = -0{,}9$; $c = 0{,}4$; $d = -0{,}8$. Эта модель дает следующие значения квадратов корреляций:

$\rho^2_{XY} = 0{,}288$; $\rho^2_{XZ} = 0{,}1935$; $\rho^2_{XW} = 0{,}233$; $\rho^2_{ZY} = 0{,}232$; $\rho^2_{WY} = 0{,}807$. Таким образом, диагональная корреляция сильнее трех «реберных» корреляций, причем она превышает вторую по силе реберную корреляцию на 24 %. (Однако случаи невыполнения этой гипотезы довольно редки.)

И все же удалось найти более сильное ограничение для базовой модели. Оно формулируется так: удвоенный квадрат диагональной корреляции всегда меньше суммы квадратов некоторых двух реберных корреляций. (Это неравенство прямо усиливает следствие 1.) Формулируем соответствующее утверждение без доказательства.

Тезис 1 (неравенство суммы «сильных» корреляций). Если в каузальной гауссовой сети справедливо $\rho_{ZW;X} = 0$ и $\rho_{XY;ZW} = 0$, то среди четырех величин $\rho^2_{XZ}, \rho^2_{XW}, \rho^2_{ZY}, \rho^2_{WY}$ всегда найдутся две такие (не тождественные) $\rho^2_{(1)}$ и $\rho^2_{(2)}$, что выполняется $2\rho^2_{XY} < \rho^2_{(1)} + \rho^2_{(2)}$.

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МОДЕЛИ

Утверждения 2 и 3 ограничивают величину корреляции между переменными X и Y в базовой модели. Если удалить из модели любое ребро, получится модель без цикла, для которой известны более жесткие ограничения. Самой генеральной альтернативой является полносвязная (насыщенная) модель. Полносвязная модель из четырех переменных содержит шесть ребер и не накладывает нетривиальных ограничений. В качестве альтернативной будем рассматривать модель, которая получается из базовой в результате добавления пятого ребра. Альтернативой является структура, где существует третий путь связи между X и Y (рис. 2, *а*). Для описания модели с такой структурой надо заменить структуральное уравнение (4) на уравнение $y = c \cdot z + d \cdot w + f \cdot x + \varepsilon_4$. Структуру этой модели будем называть ромбом с диагональю (см. рис. 2, *а*).

Введение диагонали изменяет марковские свойства модели. В результате условная независимость X и Y становится нелегитимной, а утверждения 2 и 3 некорректны. Легко построить контрпримеры, нарушающие указанные неравенства. Доказанные выше ограничения на ρ^2_{XY} можно рассматривать как средство, помогающее распознать существование третьего пути связи между X и Y.

В структуре, отображенной на рис. 2, *б*, диагональ состоит из двух ребер. Структура, отображенная на рис. 2, *в*, не содержит диагонали, однако в ней также не корректно свойство $\rho_{XY;ZW} = 0$. Это объясняется тем, что благодаря присутствию конфаундера H кондиционирование Z провоцирует [15] зависимость через конфаундер H (то же самое происходит для переменных L и W). Для всех моделей со структурой, отображенной на рис. 2, утверждения 2 и 3 некорректны. Эти структуры характеризуются свойством $\rho_{XY;ZW} \neq 0$, но в них по-прежнему выполняется $\rho_{ZW;X} = 0$. Интересно проанализировать поведение моделей, которые, наоборот, характеризуются свойствами $\rho_{XY;ZW} = 0$ и $\rho_{ZW;X} \neq 0$. Очевидный способ получить модель с такими свойствами — ввести в базовую модель «перемычку» $Z — W$. Это значит, что в описании модели уравнение (3) необходимо заменить на $w = b \cdot x + g \cdot z + \varepsilon_3$. В результате получаем «триангулированный ромб» (рис. 3, *а*).

Структуры, отображенные на рис. 3, *б*, *в*, не содержат «перемычки», но на подмножестве переменных X, Z, W, Y вынужденные условные независимости для этих структур совпадают с независимостями, свойственными триангулированному ромбу (см. рис. 3, *а*). В этих моделях будет $\rho_{ZW;X} \neq 0$ (кондиционирование X провоцирует зависимость через R, Q).

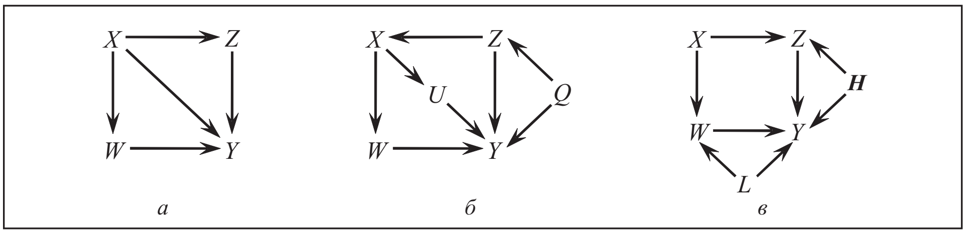

Рис. 2. Модели, где не выполняется условная независимость X и Y при условии на $\{Z, W\}$: структуры с третьим путем между X и Y (*а*) и (*б*); структура с конфаундерами (*в*)

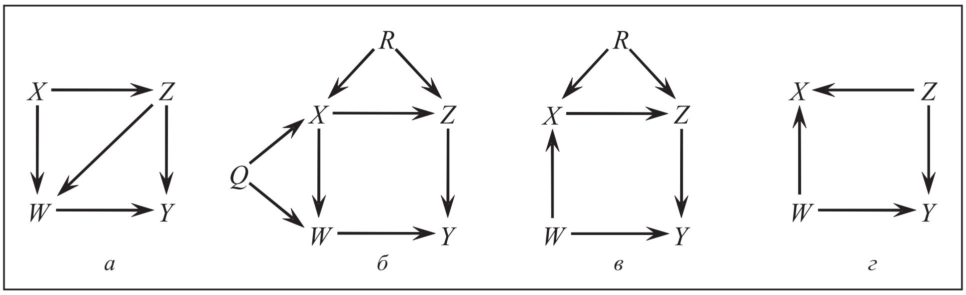

Рис. 3. Модели, где не выполняется условная независимость Z и W при условии на X: триангулированный ромб (*а*); структуры с конфаундерами L, Q (*б*) и (*в*); структура «ромб с двумя коллайдерами» (*г*)

Модель с двумя коллайдерами в цикле (рис. 3, *г*) отличается тем, что в ней выполняется безусловная независимость Z и W. (Заметим, что свойство $\rho_{ZW} = 0$ также можно получить в триангулированном ромбе (см. рис. 3, *а*), но только при соответствующем балансе значений параметров, т.е в случае нарушения предположения каузальной необманчивости.)

Оказывается, что введение перемычки Z—W делает некорректными неравенства для ρ^2_{XY} из утверждений 2 и 3. В равной мере эти неравенства могут нарушаться в других структурах (например, рис. 3, *б*, *в*), где также выполняется $\rho_{ZW;\,X} \neq 0$. Таким образом, одного условия $\rho_{XY;\,ZW} = 0$ недостаточно для гарантирования указанных ограничений для величины ρ^2_{XY}.

Рассмотрим пример модели с «перемычкой». Возьмем следующие значения параметров: $\sigma_1^2 = 0{,}2$; $\sigma_2^2 = 0{,}7$; $\sigma_3^2 = 0{,}1$; $\sigma_4^2 = 0{,}1$; $a = -0{,}7$; $b = -0{,}9$; $c = -0{,}55$; $d = -0{,}9$, $g = -0{,}35$. В такой модели получаем следующие характеристики: $\rho^2_{XY} = 0{,}4637$; $\rho^2_{XZ} = 0{,}1228$; $\rho^2_{XW} = 0{,}316$; $\rho^2_{ZY} = 0{,}277$; $\rho^2_{WY} = 0{,}230$; $\rho^2_{ZW} = 0{,}1935$. Нарушаются оба ограничения из утверждений 2 и 3. Неравенство суммы дивергентных корреляций нарушается незначительно, а неравенство максимальной коллайдерной корреляции нарушается грубо. Диагональная корреляция значительно превышает обе коллайдерные корреляции, в частности $\rho^2_{XY} / \rho^2_{ZY} = 1{,}67$. Заметим, что в этом примере «перемычка» относительно слабая (коэффициент g по модулю меньше всех других коэффициентов).

Рассмотрим свойства модели вида «ромб с двумя коллайдерами» (рис. 3, *г*). В этой модели величина ρ^2_{XY} подчиняется неравенству, сходному с неравенством из утверждения 3. (Но в данном случае неравенство характеризует коллайдерные ребра, а не дивергентные.)

Утверждение 4 (неравенство суммы корреляций независимых факторов). Если в гауссовой сети справедливо $\rho_{ZW} = 0$ и $\rho_{XY;ZW} = 0$, то выполняются ограничения $\rho^2_{XY} \le \rho^2_{XZ} + \rho^2_{XW}$ и $\rho^2_{XY} \le \rho^2_{ZY} + \rho^2_{WY}$.

Доказательство. Ввиду симметрии достаточно доказать одно из двух неравенств. Из условия $\rho_{XY;ZW}=0$ следует равенство $\rho_{XY}(1-\rho_{ZW}^2)=$ $=\rho_{ZY}(\rho_{XZ}-\rho_{XW}\cdot\rho_{ZW})+\rho_{WY}(\rho_{XW}-\rho_{XZ}\cdot\rho_{ZW})$ (см. доказательство утверждения 2, равенство (6)). Отсюда, с учетом $\rho_{ZW}=0$, получаем

$$\rho_{XY}=\rho_{XZ}\rho_{ZY}+\rho_{XW}\rho_{WY}. \tag{16}$$

Рассмотрим случай, когда термы правой части (16) — одного знака. Тогда можно переписать (16) в виде $|\rho_{XY}|=|\rho_{XZ}\rho_{ZY}|+|\rho_{XW}\rho_{WY}|$. Возведем обе части этого равенства в квадрат и получим

$$\rho_{XY}^2=\rho_{XZ}^2\rho_{ZY}^2+\rho_{XW}^2\rho_{WY}^2+2|\rho_{XZ}\rho_{ZY}\rho_{XW}\rho_{WY}|. \tag{17}$$

Поскольку Z и W взаимно независимы, выполняются [16] неравенства

$$\rho_{XZ}^2+\rho_{XW}^2\le 1 \text{ и } \rho_{ZY}^2+\rho_{WY}^2\le 1. \tag{18}$$

Подставляем $\rho_{ZY}^2\le 1-\rho_{WY}^2$ и $\rho_{WY}^2\le 1-\rho_{ZY}^2$ соответственно в первый и второй термы правой части (17) и получаем неравенство

$$\rho_{XY}^2\le\rho_{XZ}^2(1-\rho_{WY}^2)^2+\rho_{XW}^2(1-\rho_{ZY}^2)^2+2|\rho_{XZ}\rho_{ZY}\rho_{XW}\rho_{WY}|. \tag{19}$$

Элементарные преобразования (19) дают

$$\rho_{XY}^2\le\rho_{XZ}^2+\rho_{XW}^2-\rho_{XZ}^2\rho_{WY}^2(1-\rho_{WY}^2)-$$
$$-\rho_{XW}^2\rho_{ZY}^2(1-\rho_{ZY}^2)-(\rho_{XZ}\rho_{WY}-\rho_{XW}\rho_{ZY})^2. \tag{20}$$

Очевидно, что в (20) все слагаемые правой части (кроме первых двух) отрицательны. Отбрасывая отрицательные слагаемые, мы усиливаем неравенство и получаем итоговое $\rho_{XY}^2\le\rho_{XZ}^2+\rho_{XW}^2$.

Остается рассмотреть случай, когда термы правой части (16) — разных знаков. Без потери общности, пусть первый терм больше второго по модулю. Тогда отбрасываем второй терм и получаем неравенство $|\rho_{XY}|\le|\rho_{XZ}\rho_{ZY}|$. Отсюда тривиально следует $\rho_{XY}^2\le\rho_{XZ}^2$.

Заметим, что из (18) следует $\min\{\rho_{XZ}^2,\rho_{XW}^2\}\le 1/2$ и $\min\{\rho_{ZY}^2,\rho_{WY}^2\}\le 1/2$.

При этом охарактеризуем другую альтернативную модель — цикл с тремя коллайдерами. Рассмотрим линейную модель со структурой, отображенной на рис. 4. В такой модели все переменные из тройки H, L и U попарно безусловно независимы. Кроме того, переменная X безусловно независима от L, т.е. $\rho_{XL}^2=0$. Аналогично имеем $\rho_{YU}^2=0$ и $\rho_{ZH}^2=0$. Поэтому выполняется ограничение $\rho_{XY}^2+\rho_{XU}^2\le 1$. Ввиду $\rho_{XZ;U}=0$ имеем $\rho_{XZ}^2\le\rho_{XU}^2$. Следовательно, $\rho_{XY}^2+\rho_{XZ}^2\le 1$. Аналогично получаем неравенства $\rho_{XY}^2+\rho_{ZY}^2\le 1$ и $\rho_{XZ}^2+\rho_{ZY}^2\le 1$. Суммируя три последние неравенства, получаем

$$\rho_{XY}^2+\rho_{XZ}^2+\rho_{ZY}^2\le 3/2. \tag{21}$$

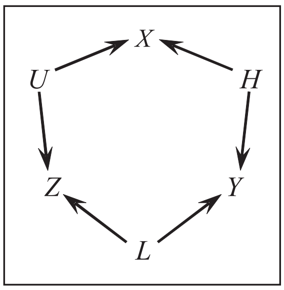

Рис. 4. Циклическая структура с тремя коллайдерами

Сопоставление трех неравенств $\rho^2_{XY} + \rho^2_{XZ} \le 1$, $\rho^2_{XY} + \rho^2_{ZY} \le 1$ и $\rho^2_{XZ} + \rho^2_{ZY} \le 1$ дает следующий результат.

Утверждение 5 (ограничение корреляций в трехколлайдерном цикле). В линейной модели со структурой, отображенной на рис. 4, среди трех корреляций $\rho^2_{XY}, \rho^2_{XZ}, \rho^2_{ZY}$ найдутся по крайней мере две такие $\rho^2_{(1)}$ и $\rho^2_{(2)}$, что выполняется $\rho^2_{(1)} \le 1/2$ и $\rho^2_{(2)} \le 1/2$.

Утверждение 5 и неравенство (21) могут быть полезны, в частности, когда переменные H, L и U — скрытые.

СУПЕР-ДВОЙНИКОВАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ

Структура «ромб с двумя коллайдерами» относится к подклассу «монопотоковых» графов, которые определяются ограничением: между любыми двумя вершинами не может быть двух и более строго ориентированных путей [17, 18]. Ромб с двумя коллайдерами — простейшая структура модели, где может возникать так называемая «двойниковая» ассоциация [17] и «супер-двойниковая» ассоциация [18]. В контексте гауссовых сетей логично вместо термина «ассоциация» подставить «корреляция».

Определение 1. В каузальной гауссовой сети со структурой монопотокового графа корреляция между переменными X и Y называется супер-двойниковой, если X и Y не связаны ребром и для каждого ребра Q—T на каждом пути между X и Y справедливо $\rho^2_{XY} > \rho^2_{QT}$.

Неформально, супер-двойниковая корреляция сильнее всех тех «реберных» корреляций, которые ее «создают». Для гауссовой сети со структурой вида ромб с двумя коллайдерами (см. рис. 3, *г*) величина ρ^2_{XY} может быть в два раза больше каждой «реберной» корреляции.

Для общего случая каузальной сети определить супер-двойниковую корреляцию сложнее. Необходимо исключить из набора для сравнения те связи, которые «не участвуют в создании» корреляции ρ_{XY} (или не вносят заметного вклада в величину ρ_{XY}). Предложим два варианта определения. Назовем путь бесколлайдерным, если он не содержит ни одного фрагмента вида $A \to C \leftarrow B$.

Определение 2а. В каузальной гауссовой сети корреляция между переменными X и Y называется супер-двойниковой (super-twin correlation), если X и Y не связаны ребром и справедливо $\rho^2_{XY} > \rho^2_{QT}$ для каждого ребра Q—T на каждом бесколлайдерном пути между X и Y.

В следующем определении термин «блокирует» взят из критерия d-сепарации.

Определение 2б. В каузальной гауссовой сети корреляция между переменными X и Y называется супер-двойниковой (super-twin correlation), если неравенство $\rho^2_{XY} > \rho^2_{QT}$ выполняется для каждого ребра Q—T такого, что каждая из двух переменных Q и T блокирует некоторый путь между X и Y, не открывая нового пути.

В модели со структурой, отображенной на рис. 2, *в*, не найдется ни одной корреляции, подлежащей сравнению с ρ^2_{XY} согласно определению 2б. (Для подходящего блокирования пути между X и Y в этой модели необходимо кондиционировать две вершины одновременно.) Если пользоваться определением 2а, то для любого из вышеприведенных вариантов модели со структурой ромба (без диагонального ребра) супер-двойниковая корреляция означает, в частности, что

$$\rho^2_{XY} > \max\{\rho^2_{XZ}, \rho^2_{XW}, \rho^2_{ZY}, \rho^2_{WY}\}.$$

Кроме того, должны выполняться аналогичные неравенства для корреляций с участием переменных Q, R, U, H, L. Возникновение супер-двойниковой корреляции автоматически означает, что нарушается неравенство $\rho_{XY}^2 \le \max\{\rho_{ZY}^2, \rho_{WY}^2\}$. Поскольку в ромбе с двумя коллайдерами (см. рис. 3, *г*) возможна супер-двойниковая корреляция, то для этой модели аналог утверждения 2 — некорректный. Однако согласно утверждению 4 величина ρ_{XY}^2 не может превысить сумму квадратов двух соответствующих корреляций (для любого из двух коллайдеров модели).

На первый взгляд может показаться удивительным, что в ромбе с одним коллайдером супер-двойниковая корреляция невозможна, а в ромбе с двумя коллайдерами — возможна. Этот факт можно объяснить тем, что в первом случае диагональная корреляция формируется через цепочки ребер, в то время как во втором случае значения переменных X и Y формируются автономно одними и теми же факторами, причем рассогласование значений X и Y может возникать исключительно благодаря действию независимых источников «шума» $\varepsilon_1, \varepsilon_4$.

Возможность супер-двойниковой корреляции в ромбе с двумя коллайдерами означает, что неравенство из тезиса 1 в данной модели иногда не выполняется.

ОЦЕНКА СПЕЦИФИЧНОСТИ ПРЕДЛОЖЕННЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ. СТОХАСТИЧЕСКАЯ СИМУЛЯЦИЯ

Ограничения, установленные утверждениями 2 и 3, довольно жесткие (можно дать примеры, где они превращаются в равенства). В то же время они эффективны в том смысле, что многие альтернативные модели нарушают эти ограничения. Достаточно добавить в базовую модель одну дополнительную связь (которая меняет марковские свойства), и выведенные неравенства станут некорректными (см. пример выше).

Полученные неравенства могут быть применены, в частности, для валидации и тестирования модели. Поэтому важно, насколько нетривиальными и дискриминативными являются предложенные ограничения корреляций. (Заметим, что неравенство суммы дивергентных корреляций абсолютно неэффективно, когда $\rho_{XZ}^2 + \rho_{XW}^2 \ge 1$.) Желательно, чтобы установленные неравенства были специфичны для базовой модели и нарушались в альтернативных моделях, отличающихся дополнительными связями. Для оценки потенциальной эффективности выведенных ограничений (как критериев) была выполнена стохастическая симуляция. Как альтернативные модели были рассмотрены ромб с «перемычкой» («триангулированный ромб», см. рис. 3, *а*); ромб с диагональю (см. рис. 2, *а*); ромб с двумя коллайдерами (см. рис. 3, *г*).

Параметры моделей генерировались случайно согласно следующей схеме. И значения дисперсий σ_i^2, и значения коэффициентов a, b, c, d, f, g выбирались из интервала $0 \div 1$ согласно равномерному распределению. Помимо основной схемы генерации параметров были использованы модифицированные схемы. Когда значение коэффициента приближается к нулю, соответствующая связь почти вырождается (структура перестает быть ромбом). Чтобы исключить вырождение, рассмотрено подмножество моделей с «устойчивыми связями». В это подмножество моделей попадают только случаи со значениями коэффициентов по модулю больше $1/4$ (но меньше 1). Также отдельно проанализировано подмножество моделей с «усиленной диагональю». Усиленная диагональ означает, что значения коэффициента f (по модулю) выбирались из интервала $1 \div 2$.

Для каждого подмножества моделей было генерировано 5 млн вариантов параметризации. Подсчитаны частоты случаев, когда нарушается соответствующее неравенство и когда возникает супер-двойниковая корреляция. Результаты симуляции представлены в табл. 1.

Таблица 1

Подкласс модели	Частоты нарушения неравенств, %			
	Неравенство максимальной коллайдерной корреляции	Неравенство суммы дивергентных корреляций	Оба неравенства (одновременно)	Супер-двойниковая корреляция
Базовый ромб	0	0	0	0
Ромб с «перемычкой»	2	0,95	0,18	0,3
Ромб с диагональю	25	19,5	8,6	12**
Ромб с усиленной диагональю	81	57	48,5	61**
Ромб с «перемычкой» и с устойчивыми связями	5,5	2	0,5	1
Ромб с диагональю и с устойчивыми связями	19	11	3,9	9,4**
Ромб с усиленной диагональю и с устойчивыми связями	72	38	29	48**
Ромб с двумя коллайдерами	5,1(2,8)*	0	0	0,5

*Первое число дает нарушения неравенства «слева» или «справа» (объединение); число в скобках дает нарушение неравенства с одной фиксированной стороны.

**Супер-двойниковая корреляция в таких моделях невозможна по определению (существует ребро между X и Y); дана частота выполнения соответствующих неравенств.

Как и ожидалось, выведенные неравенства наиболее эффективны для дискриминации между базовой моделью и моделью «ромб с диагональю». Главным инструментом дискриминации моделей оказалось неравенство максимальной коллайдерной корреляции; оно выявляет существование диагональной связи в каждом четвертом случае (при основной схеме генерации параметров). Неравенство суммы дивергентных корреляций выявляет такую связь в каждом пятом случае. Поскольку эти два неравенства автономны, целесообразно использовать нарушение любого из них как свидетельство диагональной связи. Такое объединенное свидетельство обнаруживает диагональную связь в 36 % случаев. А когда альтернативная модель имеет усиленную диагональ, такое свидетельство выявляет диагональ в 90 % случаев (иными словами, базовая модель верно отвергается в 90 % случаев). Когда в ромбе с усиленной диагональю прочие параметры генерируются по схеме с устойчивыми связями, нарушение какого-либо неравенства происходит в 82 % случаев.

Неравенство суммы дивергентных корреляций не может нарушаться только в структуре с четырьмя связями (т.е. когда нет ни перемычки, ни диагонали). Это подмножество моделей объединяет модели с разными марковскими свойствами — ромб с одним коллайдером и ромб с двумя коллайдерами. Интуитивно ожидалось, что в ромбе с диагональю неравенства должны нарушаться чаще, чем в ромбе с перемычкой. Действительно, оказалось, что это происходит в $10 \div 20$ раз чаще.

Сопоставим результаты для «ромба с перемычкой» и «ромба с двумя коллайдерами». У них близкие показатели частот нарушения неравенства максимальной коллайдерной корреляции и частот супер-двойниковой корреляции. Различаются эти модели тем, что в ромбе с двумя коллайдерами неравенство суммы дивергентных корреляций никогда не нарушается, а в ромбе с «перемычкой» оно может нарушаться (хотя и редко). Супер-двойниковая корреляция может возникать во всех рассмотренных подклассах моделей, за исключением базового ромба. Это явление редкое. Неравенство часто нарушается только в моделях с диагональю.

Для полноты картины также были рассмотрены модели с альтернативной схемой генерации дисперсий для переменных. За основу взята подмодель «ромб с диагональю, с устойчивыми связями», но параметры σ_i^2 генерировались иначе. Для моделей с пониженным рассеянием значения σ_i^2 брались из интервала $1/4 \div 1/2$. Для моделей с повышенным рассеянием значения σ_i^2 брались из интервала $1 \div 3$. Для обоих вариантов результаты оказались почти идентичными и мало отличаются от результатов для основной схемы. Супер-двойниковая корреляция возникала в 14–15 % случаев, т.е. возросла в полтора раза. Частота нарушения неравенств возросла приблизительно на 1 %.

Неравенство суммы сильных корреляций нарушается в ромбе с диагональю и с устойчивыми связями в 15 % случаев. Также была оценена частота нарушения гипотезы «двух корреляций» в базовом ромбе с устойчивыми связями. Эта частота составила 1,4 % случаев.

ПЕРСПЕКТИВЫ ПРИМЕНЕНИЯ

Идентификация структуры модели и выявление связей — ключевая проблема глубокого анализа данных. В процессе анализа исследователь довольно часто сталкивается с неполнотой информации. Структура связей априори может быть неизвестна или известна только частично. Знания о системе связей и зависимостей могут быть непроверенными и ненадежными, так что необходима верификация соответствующих фрагментов модели на основе данных.

Для простой цикличной модели с линейными зависимостями доказано два простых ограничения типа неравенства на наборе корреляций. Введение дополнительных связей в базовую модель делает эти неравенства некорректными. Поэтому установленные неравенства могут служить средством для опровержения базовой модели. Необходимость в таких средствах возникает в ситуации, когда не все парные корреляции доступны аналитику (и нет возможности тестировать все марковские свойства).

Всего в модели с четырьмя переменными имеется шесть парных (ординарных) корреляций. Чтобы вычислить частную корреляцию $\rho_{XY;ZW}$, требуется использовать все шесть корреляций. Для того чтобы проверить неравенство суммы дивергентных корреляций, необходимо и достаточно знать только три корреляции: ρ_{XZ}, ρ_{XW} и ρ_{XY}. Чтобы полностью проверить неравенство максимальной коллайдерной корреляции, достаточно знать три корреляции: ρ_{ZY}, ρ_{WY} и ρ_{XY}. Для проверки обоих неравенств нужно знать пять корреляций.

Возможна ситуация, когда удается констатировать удовлетворение обоих неравенств на основании только трех корреляций. Для этого достаточно обнаружить только два факта: $\rho_{XY}^2 \le \rho_{XZ}^2$ и $\rho_{XY}^2 \le \rho_{ZY}^2$. Заметим, что в этой ситуации переменная W может оставаться абсолютно скрытой. (Существует симметричный вариант, когда скрытой может быть Z.)

Рассмотрим проблемную ситуацию. Пусть известно, что модель имеет структуру ромба, причем единственным коллайдером в ромбе является $Z \to Y \leftarrow W$. Кроме того, допускается, что в модели может присутствовать одна дополнительная связь (но известно, какая именно — перемычка или диагональ). Рассмотрим три сценария в соответствии с набором доступной эмпирической информации. Первый сценарий — известны четыре корреляции: ρ_{XZ}, ρ_{XW}, ρ_{ZW} и ρ_{XY}. Используя первые три корреляции (из указанных четырех), можно тестировать существование «перемычки» *Z*—*W* обычным способом. Если тест показал, что «перемычка» существует, идентификация модели завершена. Если «перемычка» отвергнута и, кроме того, нарушается неравенство суммы дивергентных корреляций, то следует однозначный вывод, что в модели существует диагональная связь. Второй сценарий — известны три корреляции: ρ_{XZ}, ρ_{XW}, ρ_{XY}. Пусть нарушается неравенство суммы дивергентных корреляций. Тогда можно сделать вывод, что дополнительная связь действительно присутствует, но какая именно — неизвестно. Можно только полагать, что существование диагональной связи правдоподобнее, поскольку модели с такой связью нарушают неравенства в $10 \div 30$ раз чаще, чем ромб с перемычкой. Третий сценарий — известны три корреляции: ρ_{ZY}, ρ_{WY} и ρ_{XW}. Если неравенство максимальной коллайдерной корреляции нарушается, выводы совпадают с выводами для предыдущего сценария.

Понятно, что выполнение неравенств нельзя рассматривать как подтверждение базовой модели (альтернативы остаются возможными). В таком случае можно только со значительной уверенностью предполагать, что отсутствует «сильная» диагональная связь. Простота найденных ограничений — предпосылка построения эффективных статистических тестов. Специальные исследования покажут, насколько мощные тесты можно построить на основе предложенных неравенств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Spirtes P., Richardson T., Meek C., Scheines R., Glymour C. Using path diagrams as a structural equation modeling tool. *Sociological Methods & Research*. 1998. Vol. 27, Iss. 2. P. 182–225.
2. Pearl J. Causality: models, reasoning, and inference. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. 526 p.
3. Geiger D., Meek C. Graphical models and exponential families. *Proc. of 14th Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligenc*e. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann, 1998. P. 156–165.
4. Tian J., Pearl J. On the testable implications of causal models with hidden variables. *Proc. of the 18th Conf. on Uncertainty in Artificial Intelligence*. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann, 2002. P. 519–527.
5. Evans R.J. Graphical methods for inequality constraints in marginalized DAGs. *22nd Workshop on Machine Learning and Signal Processing*. Santander, Spain, 2012. P. 1–6. (Preprint Archive: 1209.2978V1 [Math.St]).
6. Drton M., Sturmfels B., Sullivant S. Algebraic factor analysis: tetrads, pentads and beyond. *Probability Theory and Related Fields*. 2007. Vol. 138, N 3–4. P. 463–493.
7. Bell J.S. On the Einstein–Podolsky–Rosen paradox. *Physics*. 1964. Vol. 1, N 3. P. 195–200.
8. Bollen K.A., Ting K. A tetrad test for causal indicators. *Psychol. Methods.* 2000. Vol. 5, N 1. P. 3–22.
9. Holland P.W., Rosenbaum P.R. Conditional association and unidimensionality in monotone latent variable models. *The Annals of Statistics*. 1986. Vol. 14, N 4. P. 1523–1543.
10. Pearl J., Tarsi M. Structuring causal trees. *Journal of Complexity*. 1986. Vol. 2, Iss. 1, P. 60–77.
11. Андон П.І., Балабанов О.С. До відкриття латентного бінарного фактора в статистичних даних категорного типа. *Доповіді НАН України*. 2008. № 9. С. 37–43.
12. Balabanov O.S. Causal nets: analysis, synthesis and inference from statistical data: Doctor of math. sciences thesis. V.M. Glushkov Institute of Cybernetics, Kyiv, 2014. 353 p. [in Ukrainian].

13. Balabanov O.S. On the intrinsic relations of correlations in some systems of linear structural equations. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr*. 2016. N 12. P. 17–21 [in Ukrainian]. URL: http://www.dopovidi-nanu.org.ua/en/archive/2016/12.
14. Baba K., Shibata R., Sibuya M. Partial correlation and conditional correlation as measures of conditional independence. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*. 2004. Vol. 46, Iss. 4. P. 657–664.
15. Balabanov O.S. Induced dependence, factor interaction, and discriminating between causal structures. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2016. Vol. 52, N 1. P. 8–19.
16. Kendall M.G., Stuart A. The advanced theory of statistics. Vol. 2. Inference and relationship. New York: Hafner Publishing, 1973. 723 p.
17. Balabanov O.S. Principles and analytical tools for reconstruction of probabilistic dependency structures in special class. *Problems in Programming*. 2017. N 1. P. 97–110 [in Ukrainian].
18. Balabanov O.S. Probabilistic dependency models: graphical and statistical properties. *Mathematical Machines and Systems*. 2009. N 3. P. 80–97 [in Ukrainian].

Надійшла до редакції 27.07.2017

О.С. Балабанов

СТРУКТУРНО ДЕТЕРМІНОВАНІ НЕРІВНОСТІ ДЛЯ КОРЕЛЯЦІЙ У ЦИКЛІ ЛІНІЙНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ

Анотація. Сформульовано і доведено декілька обмежень (типу нерівність) для кореляцій, які випливають з лінійності та марковських властивостей моделі з ромбовидною структурою (цикл с одним колізором). Презентовані нерівності є специфічними для базової моделі й некоректними для альтернативних моделей, які відрізняються марковськими властивостями через наявність додаткового зв’язку. Правдоподібність порушення цих нерівностей в альтернативних моделях оцінюється стохастичною симуляцією. Показано, що встановлені нерівності корисні для валідації моделі в ситуації неповної спостережуваності.

Ключові слова: кореляція, обмеження типу нерівність, система лінійних структуральних рівнянь, ромбовидна структура моделі, марковські властивості.

O.S. Balabanov

INEQUALITY CONSTRAINTS ON CORRELATIONS, STRUCTURALLY IMPLIED BY CYCLE OF LINEAR DEPENDENCIES

Abstract. We state and prove several simple inequality constraints on correlations, which are entailed by linearity and Markov properties of rhombus-like causal model (structured as cycle with one collider). The inequalities are specific for the basic model and are likely to be violated in alternative models, which differ in Markov properties due to existence of additional edge (connection). Plausibility of violation of the inequalities in alternative models is evaluated via simulation. We outline some ways by which the inequalities can assist in the model verification under partial observability.

Keywords: correlation, inequality constraint, system of linear structural equations, rhombus-like structure, Markov properties.

Балабанов Александр Степанович,
доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института программных систем НАН Украины, Киев, e-mail: bas@isofts.kiev.ua.