УДК 519.21

Ю.В. ЖЕРНОВИЙ, К.Ю. ЖЕРНОВИЙ

РЕКУРЕНТНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ БАГАТОКАНАЛЬНИХ СИСТЕМ З ЕРЛАНГІВСЬКИМ ЧАСОМ ОБСЛУГОВУВАННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Анотація. Запропоновано метод дослідження систем обслуговування $M/E_2/n/m$, $M/E_2/n/\infty$, у тому числі систем із застосуванням випадкового відкидання замовлень. Отримано рекурентні співвідношення для обчислення стаціонарного розподілу кількості замовлень у системі та стаціонарних характеристик. Побудовані алгоритми перевірено на прикладах з використанням імітаційних моделей, створених за допомогою інструментальних засобів GPSS World.

Ключові слова: багатоканальна система обслуговування, ерлангівський час обслуговування, випадкове відкидання замовлень, метод фіктивних фаз, рекурентні співвідношення, стаціонарні характеристики.

ВСТУП

Для дослідження систем обслуговування з ерлангівськими розподілами, зокрема системи $M/E_s/n/\infty$, застосовують метод фіктивних фаз, започаткований А.К. Ерлангом [1]. Для ерлангівського розподілу порядку s часу обслуговування припускають, що кожне замовлення послідовно проходить s фаз обслуговування, тривалості яких розподілені за показниковими законами з параметрами $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$ відповідно.

Врахування фаз вимагає фіксації відповідних станів і призводить до громіздкості опису системи обслуговування з розподілами фазового типу. Безпосереднє розв'язання системи рівнянь для стаціонарних імовірностей станів ускладнюється через велику розмірність матриці коефіцієнтів системи. Тому найдоцільнішим є алгоритмічний підхід, що передбачає отримання розв'язку системи рівнянь або у вигляді рекурентних формул, або у вигляді матрично-рекурентних співвідношень і алгоритмів [2–9]. Запропонований у статтях [8, 9] метод ґрунтується на використанні прямих рекурентних співвідношень, виведених безпосередньо з рівнянь системи для стаціонарних імовірностей. Він не містить ітерацій і не передбачає попередніх перетворень системи рівнянь. У роботах [8, 9] розроблено рекурентні алгоритми для систем $M/E_2/2/m$, $M/E_2/2/\infty$, $M/E_2/3/m$ і $M/E_2/3/\infty$ як стандартних, так і систем з випадковим відкиданням замовлень.

Метою досліджень, викладених у статті, є побудова рекурентних алгоритмів для обчислення стаціонарного розподілу кількості замовлень у системах обслуговування $M/E_2/n/m$ і $M/E_2/n/\infty$ $(n \ge 2)$, у тому числі в системах із застосуванням випадкового відкидання замовлень. Випадкове відкидання замовлень використовується в системах обслуговування з метою запобігання перевантаженням і полягає в тому, що кожне замовлення, яке надходить, може бути відкинуте з певною ймовірністю, яка залежить від довжини черги в момент надходження замовлення, навіть якщо буфер ще повністю не заповнений [10–12].

СИСТЕМА $M/E_2/n/m$ З ВИПАДКОВИМ ВІДКИДАННЯМ ЗАМОВЛЕНЬ

Розглянемо систему $M/E_2/n/m$, де m — максимальна кількість замовлень, які одночасно можуть перебувати у черзі. Вхідний потік замовлень — найпростіший, тобто інтервали часу між моментами прибуття сусідніх за часом замовлень — незалежні випадкові величини, показниково розподілені з параметром λ. Час обслуговування кожного замовлення розподілений згідно з узагальненим законом Ерланга другого порядку, тобто є сумою двох незалежних випадкових величин, показниково розподілених з параметрами μ_1, μ_2 відповідно.

Введемо такі позначення для станів системи: s_0 — в системі немає замовлень; $s_{k(ij)}$ — в системі є k замовлень $(1 \le k \le n+m)$, і кількість замовлень, які перебувають на першій та другій фазах обслуговування, становить i та j відповідно.

Нехай p_0 і $p_{k(ij)}$ — стаціонарні ймовірності перебування системи у станах s_0 і $s_{k(ij)}$ відповідно.

Припустимо, що з метою запобігання перевантаженням у системі обслуговування здійснюється випадкове проріджування вхідного потоку замовлень залежно від довжини черги. Нехай $f_\lambda(k)$ — залежність інтенсивності потоку замовлень, отриманого після проріджування, від кількості замовлень у системі. Вважаємо, що інтенсивність залишається незмінною для кожного зі станів $s_{k(ij)}$ при фіксованому значенні k, тобто $f_\lambda(k) = \begin{cases} \lambda, & 1 \le k \le n; \\ \lambda_k, & n+1 \le k \le m+n-1. \end{cases}$

Проріджування вхідного потоку замовлень може здійснюватися шляхом випадкового відкидання замовлень згідно з таким правилом: якщо в момент прибуття замовлення кількість замовлень у системі обслуговування дорівнює $k \in \{n+1, n+2, \ldots, n+m\}$ (не враховуючи те замовлення, що розглядається), то замовлення приймається на обслуговування з імовірністю β_k $(0 < \beta_k \le 1, \beta_{n+m} = 0)$ і отримує відмову (відкидається) з імовірністю $1-\beta_k$. Іноді розглядають частковий випадок цієї стратегії, зафіксувавши порогове значення h $(n+1 \le h \le n+m-1)$ і припускаючи, що $\beta_k = 1$ при $n+1 \le k \le h-1$, і $\beta_k = \beta$ $(0 < \beta < 1)$ для $h \le k \le n+m-1$. Якщо виконана умова $0 < \beta_k < 1$, де k — кількість замовлень у системі в момент прибуття замовлення, то інтенсивність найпростішого потоку замовлень, які приймаються на обслуговування, становить $\lambda_k = \lambda\beta_k$.

Вважаючи, що $n \ge 2$, для визначення стаціонарних імовірностей системи $M / E_2 / n / m$ з випадковим відкиданням замовлень отримуємо систему рівнянь:

$$
\begin{aligned}
&-\lambda p_0 + \mu_2 p_{1(01)} = 0; \\
&-(\lambda + k\mu_2) p_{k(0k)} + \mu_1 p_{k(1,k-1)} + (k+1)\mu_2 p_{k+1(0,k+1)} = 0, \quad 1 \le k \le n-1; \\
&-(\lambda + k\mu_1) p_{k(k0)} + \lambda p_{k-1(k-1,0)} + \mu_2 p_{k+1(k1)} = 0, \quad 1 \le k \le n-1; \qquad p_{0(00)} = p_0; \\
&-(\lambda + (k-j)\mu_1 + j\mu_2) p_{k(k-j,\,j)} + \lambda p_{k-1(k-j-1,\,j)} + (k-j+1)\mu_1 p_{k(k-j+1,\,j-1)} + \\
&\qquad\qquad + (j+1)\mu_2 p_{k+1(k-j,\,j+1)} = 0, \quad 1 \le j \le k-1, \quad j+1 \le k \le n-1; \\
&-(\lambda + n\mu_1) p_{n(n0)} + \lambda p_{n-1(n-1,0)} + \mu_2 p_{n+1(n-1,1)} = 0; \\
&-(f_\lambda(k) + n\mu_1) p_{k(n0)} + f_\lambda(k-1) p_{k-1(n0)} + \mu_2 p_{k+1(n-1,1)} = 0, \\
&\qquad\qquad n+1 \le k \le n+m-1; \\
&-n\mu_1 p_{n+m(n0)} + f_\lambda(n+m-1) p_{n+m-1(n0)} = 0; \\
&-(\lambda + (n-j)\mu_1 + j\mu_2) p_{n(n-j,\,j)} + \lambda p_{n-1(n-j-1,\,j)} + (n-j+1)\mu_1 p_{n(n-j+1,\,j-1)} + \\
&\qquad\qquad + (j+1)\mu_2 p_{n+1(n-j-1,\,j+1)} = 0, \quad 1 \le j \le n-1; \\
&-(f_\lambda(k) + (n-j)\mu_1 + j\mu_2) p_{k(n-j,\,j)} + f_\lambda(k-1) p_{k-1(n-j,\,j)} + \\
&\qquad\qquad + (n-j+1)\mu_1 p_{k(n-j+1,\,j-1)} + (j+1)\mu_2 p_{k+1(n-j-1,\,j+1)} = 0, \\
&\qquad\qquad n+1 \le k \le n+m-1, \quad 1 \le j \le n-1;
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
&-(\lambda + n\mu_2) p_{n(0n)} + \mu_1 p_{n(1,n-1)} = 0; \\
&-(f_\lambda(k) + n\mu_2) p_{k(0n)} + f_\lambda(k-1) p_{k-1(0n)} + \mu_1 p_{k(1,n-1)} = 0, \quad n+1 \le k \le n+m-1; \\
&-n\mu_2 p_{n+m(0n)} + f_\lambda(n+m-1) p_{n+m-1(0n)} + \mu_1 p_{n+m(1,n-1)} = 0; \\
&-((n-j)\mu_1 + j\mu_2) p_{n+m(n-j,\,j)} + f_\lambda(n+m-1) p_{n+m-1(n-j,\,j)} + \\
&\qquad\qquad + (n-j+1)\mu_1 p_{n+m(n-j+1,\,j-1)} = 0, \quad 1 \le j \le n-1;
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$
p_0 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{k} p_{k(k-i,\,i)} + \sum_{k=n+1}^{n+m} \sum_{i=0}^{n} p_{k(n-i,\,i)} = 1. \tag{3}
$$

Увівши позначення

$$
\alpha_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}; \quad \eta = \frac{\mu_2}{\mu_1};
$$

$$
g_\alpha(k) = \begin{cases} \alpha_1, & 1 \le k \le n; \\ \alpha_{k1}, & n+1 \le k \le m+n-1; \end{cases} \qquad \alpha_{k1} = \frac{\lambda_k}{\mu_1}, \quad n+1 \le k \le m+n-1;
$$

$$\widetilde{p}_{k(ij)}=\frac{p_{k(ij)}}{p_0}, \quad 1\le k\le n+m;$$

$$\widetilde{p}_{k(k0)}=q_k,\ 1\le k\le n-1; \quad \widetilde{p}_{k(n0)}=q_k,\ n\le k\le n+m-1,$$

за допомогою рівнянь (1) отримуємо:

$$\widetilde{p}_{1(01)}=\alpha_2;\ \widetilde{p}_{n+m(n0)}=\frac{g_\alpha(n+m-1)}{n}q_{n+m-1};\ \widetilde{p}_{2(11)}=\frac{1}{\eta}((\alpha_1+1)q_1-\alpha_1);$$

$$\widetilde{p}_{k(k-1,1)}=\frac{1}{\eta}((\alpha_1+k-1)q_{k-1}-\alpha_1 q_{k-2}),\ 3\le k\le n;$$

$$\widetilde{p}_{k(k-j,\,j)}=\frac{1}{j\eta}((\alpha_1+(j-1)\eta+k-j)\widetilde{p}_{k-1(k-j,\,j-1)}-$$

$$-\alpha_1\widetilde{p}_{k-2(k-j-1,\,j-1)}-(k-j+1)\widetilde{p}_{k-1(k-j+1,\,j-2)}),$$

$$2\le j\le n-1,\ j+1\le k\le n;$$

$$\widetilde{p}_{k(0k)}=\frac{1}{k\eta}((\alpha_1+(k-1)\eta)\widetilde{p}_{k-1(0,k-1)}-\widetilde{p}_{k-1(1,k-2)}),\ 2\le k\le n;$$

$$\widetilde{p}_{n+1(n-1,1)}=\frac{1}{\eta}((\alpha_1+n)q_n-\alpha_1 q_{n-1});$$

$$\widetilde{p}_{n+1(n-j,\,j)}=\frac{1}{j\eta}((\alpha_1+(j-1)\eta+n+1-j)\widetilde{p}_{n(n-j+1,\,j-1)}-$$

$$-\alpha_1\widetilde{p}_{n-1(n-j,\,j-1)}-(n-j+2)\widetilde{p}_{n(n-j+2,\,j-2)}),\ 2\le j\le n;$$

$$\widetilde{p}_{k(n-1,1)}=\frac{1}{\eta}((g_\alpha(k-1)+n)q_{k-1}-g_\alpha(k-2)q_{k-2}),\ n+2\le k\le n+m; \tag{4}$$

$$\widetilde{p}_{k(n-j,\,j)}=\frac{1}{j\eta}((g_\alpha(k-1)+(j-1)\eta+n+1-j)\widetilde{p}_{k-1(n-j+1,\,j-1)}-$$

$$-g_\alpha(k-2)\widetilde{p}_{k-2(n-j+1,\,j-1)})-$$

$$-\frac{n-j+2}{j\eta}\widetilde{p}_{k-1(n-j+2,\,j-2)},\ 2\le j\le n,\ n+2\le k\le n+m.$$

Рекурентні співвідношення (4) дають змогу обчислювати стаціонарні ймовірності $\widetilde{p}_{k(ij)}$ у вигляді лінійних функцій від параметрів q_k $(1\le k\le n+m-1)$ у такій послідовності:

$$\widetilde{p}_{n+m(n0)};\ \widetilde{p}_{k(k-1,1)}\ (1\le k\le n);\ \widetilde{p}_{k(k-2,2)}\ (2\le k\le n);\ \widetilde{p}_{k(k-3,3)}\ (3\le k\le n);$$

$$\widetilde{p}_{k(k-4,4)}\ (4\le k\le n);\ \dots;\ \widetilde{p}_{n-2(0,n-2)},\ \widetilde{p}_{n-1(1,n-2)},\ \widetilde{p}_{n(2,n-2)};$$

$$\widetilde{p}_{n-1(0,n-1)},\ \widetilde{p}_{n(1,n-1)};\ \widetilde{p}_{n-1(1,n-2)},\ \widetilde{p}_{n(0n)};\ \widetilde{p}_{n+1(n-j,\,j)},\ (1\le j\le n);$$

$$\widetilde{p}_{k(n-1,1)}\ (n+2\le k\le n+m);\ \widetilde{p}_{k(n-2,2)}\ (n+2\le k\le n+m);$$

$$\widetilde{p}_{k(n-3,3)}(n+2\le k\le n+m);\ \dots;\ \widetilde{p}_{k(0n)}\ (n+2\le k\le n+m).$$

Для визначення невідомих параметрів q_k $(1\le k\le n+m-1)$ можна використати будь-які $n+m-1$ рівнянь з (2). Рівняння (2) не використовувались для виведення співвідношень (4). Оскільки одне з рівнянь (2) не увійшло в систему для знаходження q_k $(1\le k\le n+m-1)$, його можна використати для перевірки правильності отриманих розв'язків системи (1)–(3).

За допомогою умови нормування (3) визначаємо стаціонарні ймовірності за формулами

$$p_0=\left(1+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{p}_{k(k0)}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\widetilde{p}_{k(k-i,\,i)}+\sum_{k=n+1}^{n+m}\sum_{i=0}^{n}\widetilde{p}_{k(n-i,\,i)}\right)^{-1},$$

$$p_k=p_0\widetilde{p}_k,\ 1\le k\le n+m;$$

$$\widetilde{p}_k = \sum_{i=0}^{k} \widetilde{p}_{k(k-i,\,i)},\ 1 \le k \le n;\ \ \widetilde{p}_k = \sum_{i=0}^{n} \widetilde{p}_{k(n-i,\,i)},\ \ n+1 \le k \le n+m,$$

де p_k — стаціонарна ймовірність наявності у системі k замовлень.

Стаціонарні характеристики системи $M/E_2/n/m$ з випадковим відкиданням замовлень, а саме середню кількість замовлень у системі $\mathbf{E}(C)$, середню довжину черги $\mathbf{E}(Q)$, ймовірність обслуговування замовлення, яке надійшло на вхід системи (відносну пропускну здатність системи) $\mathbf{P}_{\text{sv}}$, і середній час очікування $\mathbf{E}(W)$ обчислюємо за формулами:

$$\mathbf{E}(C) = \sum_{k=1}^{n+m} kp_k,\ \ \mathbf{E}(Q) = \sum_{k=n+1}^{n+m} (k-n)\,p_k\ ,\ \ \mathbf{E}(W) = \frac{\mathbf{E}(Q)}{\lambda \mathbf{P}_{\text{sv}}}\,,$$

$$\mathbf{P}_{\text{sv}} = \frac{\overline{\mu}}{\lambda}\left(n\,(1-p_0) - \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\,p_k \right),\ \ \overline{\mu} = \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right)^{-1}. \tag{5}$$

Вираз для $\mathbf{P}_{\text{sv}}$ отримано як відношення середньої кількості обслужених замовлень за одиницю часу до інтенсивності вхідного потоку всіх замовлень.

Якщо випадкове відкидання замовлень не застосовується, тобто розглядається стандартна система $M/E_2/n/m$, то в рівняннях (1), (2) і співвідношеннях (4), (5) необхідно покласти:

$$f_\lambda(k) = \lambda\ ,\ \ g_\alpha(k) = \alpha_1,\ \ n \le k \le n+m-1;\ \ \mathbf{P}_{\text{sv}} = 1 - p_{n+m}\,.$$

СИСТЕМИ БЕЗ ОБМЕЖЕННЯ НА ДОВЖИНУ ЧЕРГИ

Для системи $M/E_2/n/\infty$ обмеження на довжину черги не існує, тому для існування стаціонарного розподілу кількості замовлень повинна виконуватись умова $\lambda < n\overline{\mu}$. У разі застосування випадкового відкидання замовлень припустимо, що ймовірності β_k визначаються згідно з правилом: $0 < \beta_k \le 1$ для $n+1 \le k \le h-1$ і $\beta_k = \widetilde{\beta} < 1$ при $k \ge h$, де $h \ge n+2$. Тоді для існування стаціонарного розподілу кількості замовлень повинна виконуватись умова $\lambda\widetilde{\beta} < n\overline{\mu}$.

Відшукання наближених значень стаціонарних імовірностей p_k $(k \ge 0)$ для систем без обмеження на довжину черги зводиться до використання отриманих вище рекурентних співвідношень для великих значень m. Число $N = m+n$ вибираємо настільки великим, щоб виконувалась одна з умов (або кожна з умов), що задають точність визначення стаціонарних імовірностей. Ці умови можна задати, наприклад, у вигляді:

$$\mathbf{E}(C)_{(N)} - \mathbf{E}(C)_{(N-1)} < \varepsilon_1,\ \ \mathbf{E}(Q)_{(N)} - \mathbf{E}(Q)_{(N-1)} < \varepsilon_2\,. \tag{6}$$

Тут ε_1, ε_2 — додатні числа, що задають точність обчислень, $\mathbf{E}(C)_{(N)}$ і $\mathbf{E}(Q)_{(N)}$ — наближені значення стаціонарних характеристик $\mathbf{E}(C)$ і $\mathbf{E}(Q)$, обчислені з використанням стаціонарних імовірностей $p_{k(N)}$ $(0 \le k \le N)$; $p_{k(N)}$ — наближене значення стаціонарної ймовірності p_k, отримане в результаті усікання нескінченної системи рівнянь для стаціонарних імовірностей.

Якщо випадкове відкидання замовлень не застосовується, то (6) можна замінити умовою

$$\frac{\lambda}{\overline{\mu}} - \left(n\,(1-p_{0(N)}) - \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\,p_{k(N)} \right) < \varepsilon, \tag{7}$$

яка випливає з рівняння балансу $\overline{\mu}\left(n(1-p_0) - \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\,p_k \right) = \lambda$, справедливого для систем обслуговування без втрат замовлень.

ПРИКЛАДИ ОБЧИСЛЕННЯ СТАЦІОНАРНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Розглянемо приклади визначення стаціонарних характеристик таких систем обслуговування: $M/E_2/4/30$, $M/E_2/10/\infty$, $M/E_2/20/53$, $M_h/E_2/20/\infty$.

Позначення M_h ми використовуємо для систем з випадковим відкиданням замовлень (застосовуємо стратегію з фіксованим пороговим значенням h).

Задамо параметри показникових розподілів: $\lambda = 44/15$ для системи $M/E_2/4/30$; $\lambda = 16/3$ для системи $M/E_2/10/\infty$; $\lambda = 16$ для систем $M/E_2/20/53$, $M_h/E_2/20/\infty$. Для розподілів Ерланга покладемо: $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$. Для системи $M_h/E_2/20/\infty$ задамо: $h = 25$, $\beta_k = 1$ при $21 \le k \le h-1$ і $\beta_k = \widetilde{\beta} = 2/3$ для $k \ge h$.

Значення стаціонарних імовірностей p_k і стаціонарних характеристик для систем $M/E_2/4/30$, $M/E_2/10/\infty$, $M/E_2/20/53$, $M_h/E_2/20/\infty$, знайдені з використанням рекурентних співвідношень, отриманих вище, подано у табл. 1–3. У таблицях наведено також результати обчислень, реалізованих за допомогою імітаційних моделей розглянутих систем обслуговування для значення часу моделювання $t = 10^6$ (для системи $M/E_2/4/30$ $t = 10^7$). Імітаційні моделі побудовано із залученням інструментальних засобів GPSS World [13].

Під час обчислення наближених значень стаціонарних імовірностей p_k значення N вибиралось настільки великим, щоб для системи $M/E_2/10/\infty$ виконувалась умова (7) при $\varepsilon = 10^{-6}$, а для системи $M_h/E_2/20/\infty$ — умови (6) при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-5}$. Отримані мінімальні значення N для цих систем відповідно дорівнюють 58 і 73.

Аналізуючи результати, подані в табл. 3, бачимо, що управління інтенсивністю вхідного потоку шляхом випадкового відкидання замовлень дає змогу значно зменшити середню довжину черги за рахунок несуттєвого зниження пропускної здатності системи. Так, середня довжина черги в системі $M_h/E_2/20/\infty$ на 89,2% менша, ніж у системі $M/E_2/20/53$, а відносна пропускна здатність менша лише на 1,4%.

Таблиця 1

k	Значення стаціонарних імовірностей p_k			
	$M/E_2/4/30$		$M/E_2/10/\infty$	
	Рекурентний метод	GPSS World	Рекурентний метод	GPSS World
0	0,000142	0,000142	0,000272	0,000262
1	0,000637	0,000619	0,002174	0,002158
2	0,001450	0,001449	0,008708	0,008762
3	0,002271	0,002260	0,023263	0,023246
4	0,002860	0,002862	0,046639	0,046970
5	0,003368	0,003383	0,074887	0,074792
6	0,003869	0,003871	0,100392	0,100331
7	0,004402	0,004447	0,115737	0,116339
8	0,004991	0,005004	0,117463	0,117815
9	0,005651	0,005707	0,107241	0,107124
10	0,006395	0,006388	0,090298	0,089960
15	0,011846	0,011753	0,025704	0,025872
20	0,021940	0,021939	0,006332	0,006401
25	0,040636	0,040508	0,001539	0,001562
30	0,075221	0,075345	0,000374	0,000374
40	–	–	0,000022	0,000018
50	–	–	0,000001	0,000004

Таблиця 2

k	Значення стаціонарних імовірностей p_k			
	$M / E_2 / 20 / 53$		$M_h / E_2 / 20 / \infty$	
	Рекурентний метод	GPSS World	Рекурентний метод	GPSS World
0	$3{,}374 \cdot 10^{-16}$	0,000000	$1{,}791 \cdot 10^{-11}$	0,000000
5	$2{,}280 \cdot 10^{-11}$	0,000000	$1{,}209 \cdot 10^{-6}$	0,000000
10	$6{,}212 \cdot 10^{-9}$	0,000000	0,000329	0,000328
15	$1{,}488 \cdot 10^{-7}$	0,000001	0,007847	0,007922
20	$8{,}378 \cdot 10^{-7}$	0,000001	0,043176	0,043062
21	$1{,}084 \cdot 10^{-6}$	0,000000	0,055092	0,055324
22	$1{,}389 \cdot 10^{-6}$	0,000000	0,069203	0,069366
23	$1{,}773 \cdot 10^{-6}$	0,000003	0,085631	0,085164
24	$2{,}255 \cdot 10^{-6}$	0,000002	0,104181	0,104615
25	$2{,}865 \cdot 10^{-6}$	0,000003	0,124132	0,123942
30	$9{,}398 \cdot 10^{-6}$	0,000013	0,033671	0,033453
40	0,000101	0,000076	0,002038	0,002051
50	0,001077	0,001058	0,000120	0,000109
60	0,011524	0,011669	$7{,}092 \cdot 10^{-6}$	0,000005
70	0,108716	0,108361	$4{,}097 \cdot 10^{-7}$	0,000001
73	0,166667	0,166932	$1{,}559 \cdot 10^{-7}$	0,000000

Таблиця 3

Система	Метод	Значення стаціонарних характеристик			
		$\mathrm{E}(C)$	$\mathrm{E}(Q)$	$\mathrm{E}(W)$	P_{sv}
$M / E_2 / 4 / 30$	Рекурентний метод	26,683	22,690	8,525	0,907
	GPSS World	26,692	22,699	8,529	0,907
$M / E_2 / 10 / \infty$	Рекурентний метод	9,303	1,303	0,244	1,000
	GPSS World	9,302	1,305	0,245	1,000
$M / E_2 / 20 / 53$	Рекурентний метод	68,772	48,772	3,658	0,833
	GPSS World	68,777	48,775	3,658	0,833
$M_h / E_2 / 20 / \infty$	Рекурентний метод	24,972	5,268	0,401	0,821
	GPSS World	24,972	5,268	0,401	0,821

ВИСНОВКИ

За допомогою методу фіктивних фаз побудовано алгоритми для обчислення стаціонарного розподілу кількості замовлень в системах типу $M / E_2 / n / m$ і $M / E_2 / n / \infty$, в тому числі у системах з випадковим відкиданням замовлень. Запропонований рекурентний метод не містить ітерацій і перетворень підготовчого характеру, що дає змогу скоротити обсяг обчислень порівняно з відомими методами. За допомогою отриманих рекурентних співвідношень вдається скоротити кількість рівнянь, які необхідно розв’язати для знаходження стаціонарних імовірностей, з $(n+1)(n+2m+2)/2$ до $n+m-1$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Brockmeyer E., Halstrøm H.L., Jensen A. The life and works of A.K. Erlang. Copenhagen: Danish Academy of Technical Sciences, 1948. 275 p.
2. Neuts M.F. Matrix-geometric solutions in stochastic models. Baltimore: The John’s Hopkins University Press, 1981. 390 p.
3. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. Москва: РУДН, 1995. 529 с.

4. Бочаров П.П., Литвин В. Г. Методы анализа и расчета систем массового обслуживания с распределениями фазового типа. *Автоматика и телемеханика*. 1986. № 5. С. 5–23.
5. Takahashi Y., Takami Y. A numerical method for the steady-state probabilities of a $GI/G/c$ queueing system in a general class. *J. Oper. Res. Soc. Japan.* 1976. Vol. 19, N 2. P. 147–157.
6. Рыжиков Ю.И. Рекуррентный расчет многоканальных систем обслуживания с неограниченной очередью. *Автоматика и телемеханика.* 1985. № 6. С. 88–93.
7. Рыжиков Ю.И. Алгоритм расчета многоканальной системы с эрланговским обслуживанием. *Автоматика и телемеханика.* 1980. № 5. С. 30–37.
8. Жерновый К.Ю. Определение стационарных характеристик двухканальных систем с эрланговским распределением времени обслуживания. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 1. С. 108–121.
9. Жерновый Ю.В., Жерновый К.Ю. Определение стационарных характеристик трехканальных систем с эрланговским распределением времени обслуживания. *Кибернетика и системный анализ.* 2017. Т. 53, № 2. С. 134–145.
10. Chydziński A. Nowe modele kolejkowe dla węzłów sieci pakietowych. Gliwice: Pracownia Komputerowa Jacka Skalmierskiego, 2013. 286 s.
11. Tikhonenko O., Kempa W.M. Queue-size distribution in $M/G/1$-type system with bounded capacity and packet dropping. *Communications in Computer and Information Science.* 2013. Vol. 356. P. 177–186.
12. Zhernovyi Yu., Kopytko B., Zhernovyi K. On characteristics of the $M^{\theta}/G/1/m$ and $M^{\theta}/G/1$ queues with queue-size based packet dropping. *J. of Applied Mathematics and Computational Mechanics.* 2014. Vol. 13, N. 4. P. 163–175.
13. Zhernovyi Yu. Creating models of queueing systems using GPSS World: Programs, detailed explanations and analysis of results. Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2015. 220 p.

Надійшла до редакції 06.07.2017

Ю.В. Жерновый, К.Ю. Жерновый

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЭРЛАНГОВСКИМ ВРЕМЕНЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Аннотация. Предложен метод исследования систем обслуживания $M/E_2/n/m$, $M/E_2/n/\infty$, в том числе систем с применением случайного отбрасывания заявок. Получены рекуррентные соотношения для вычисления стационарного распределения числа заявок в системе и стационарных характеристик. Построенные алгоритмы проверены на примерах с использованием имитационных моделей, созданных с помощью инструментальных средств GPSS World.

Ключевые слова: многоканальная система обслуживания, эрланговское время обслуживания, случайное отбрасывание заявок, метод фиктивных фаз, рекуррентные соотношения, стационарные характеристики.

Yu.V. Zhernovyi, K.Yu. Zhernovyi

RECURRENCE RELATIONS FOR MULTICHANNEL QUEUEING SYSTEMS WITH SECOND-ORDER ERLANGIAN SERVICE TIMES

Abstract. We propose a method to analyze queueing systems $M/E_2/n/m$, $M/E_2/n/\infty$, including the case of random dropping of customers. Recurrence relations are obtained to compute the stationary distribution of the number of customers in the system and the steady-state characteristics. The developed algorithms are tested on examples using simulation models constructed with the use of the GPSS World tools.

Keywords: multichannel queueing systems, Erlangian service times, random dropping of customers, fictitious phase method, recurrence relations, steady-state characteristics.

Жерновий Юрій Васильович,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри Львівського національного університету імені Івана Франка, e-mail: yu.zhernovyi@lnu.edu.ua.

Жерновий Костянтин Юрійович,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри Львівського навчально-наукового Інституту ДВНЗ «Університет банківської справи», e-mail: k.zhernovyi@yahoo.com.