УДК 517.95:419.86:539.3

В.А. СТОЯН

О ТРЕХМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ДИНАМИКИ ТОЛСТЫХ УПРУГИХ ПЛИТ

Аннотация. Решен комплекс задач по построению трехмерного поля упругих динамических смещений точек плоской упругой плиты с произвольной гранично-торцевой поверхностью. Предполагается, что граничное состояние плиты задано через силовые возмущающие факторы или функцию вектора смещений. Решение задач построено на базе классических уравнений Ляме пространственной теории упругости при его среднеквадратическом согласовании с имеющимися внешнединамическими наблюдениями за состоянием плиты. Выполнена оценка точности указанного согласования. Сформулированы условия однозначности решения рассматриваемых задач.

Ключевые слова: пространственно распределенные динамические системы, пространственные задачи теории упругости, псевдоинверсия, толстые упругие плиты.

ВВЕДЕНИЕ

Исследования упруго-деформируемого состояния механических конструкций типа «пластина», «плита», «оболочка» ведутся в течение многих лет. Проблемы построения простых и надежных математических моделей динамики указанных объектов решались [1] при существенном использовании их вырожденности по одной из геометрических размерностей. Как правило, рассматривались двухмерные модели с аппроксимацией картины динамических смещений срединной поверхности объекта на всю толщину согласно механическим, геометрическим и чисто математическим гипотезам разного рода. В работах [2–4] предложена полутрехмерная модель динамики толстых упругих пластин и плит, которая описывается двухмерными дифференциальными уравнениями, параметрически зависимыми от поперечной координаты. Модель построена на основании классических трехмерных уравнений Ляме путем их интегрирования по вырожденной поперечной координате. Интегральный эквивалент дифференциальной математической модели [4], предложенный в [5], позволяет решить ряд прямых [6] и обратных [7, 8] задач динамики толстых упругих плит, находящихся, в частности, в условиях неполноты информации об их начально-краевом состоянии. Кроме того, построена функция поперечных динамических смещений, которая, являясь точным решением сложных дифференциальных уравнений модели, в соответствии со среднеквадратическим критерием согласуется с начально-краевыми наблюдениями за состоянием плиты. Согласно этому критерию имеющиеся наблюдения за плитой моделировались с помощью системы дискретно и непрерывно определенных функций, которые по своей природе соответствовали фиктивным массовым силам, определенным вне пространственной области плиты и при отрицательных значениях временной координаты. При значительном увеличении толщины плиты (когда она может рассматриваться как трехмерное тело) необходима математическая модель, которая позволила бы описывать зависимость поля динамических смещений точек плиты не только от пространственно распределенных сил, но и от силовых возмущений, имеющих место на верхней, нижней и торцевой поверхностях плиты. Такие математические модели позволили бы при исследовании динамики неполно наблюдаемых толстых упругих плит дополнить объемно определенные моделирующие функции поверхностно заданными. Указанные математические модели динамики толстых упругих плит построены ниже после псевдообращения трехмерных уравнений Ляме [9] пространственной теории упругости.

Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат (x, y, z) упругую плиту, граничные поверхности $z = \pm \frac{h}{2}$ которой вместе с торцевой поверхностью $\Gamma(x, y, z)$ находятся под влиянием динамических (t — время) внешневозмущающих факторов

$$f^{+}(x, y, t) = (f_1^{+}(x, y, t), f_2^{+}(x, y, t), f_3^{+}(x, y, t))^{\mathrm{T}},$$

$$f^{-}(x, y, t) = (f_1^{-}(x, y, t), f_2^{-}(x, y, t), f_3^{-}(x, y, t))^{\mathrm{T}},$$

$$f^{\Gamma}(s) = (f_1^{\Gamma}(s), f_2^{\Gamma}(s), f^{\Gamma}(s))^{\mathrm{T}},$$

составляющие f_i^{+}, f_i^{-}, f_i^{Γ} $(i = \overline{1, 3})$ которых при $s = (\xi, t) = (x, y, z, t)$ направлены по осям Ox, Oy, Oz соответственно. Дополнительно будем предполагать наличие пространственно распределенных силовых факторов

$$f(s) = \mathrm{col}(f_1(s), f_2(s), f_3(s))$$

с покоординатными составляющими $f_i(s)$ $(i = \overline{1, 3})$.

Построим динамические зависимости вектора

$$u(s) = \mathrm{col}(u_1(s), u_2(s), u_3(s))$$

динамических смещений $u_i(s)$ $(i = \overline{1, 3})$ точек плиты в направлении координатных осей Ox, Oy, Oz от указанных выше внешнединамических возмущающих факторов. При этом будем полагать, что

$$u(s) = u_{\infty}(s) + u^{+}(s) + u^{-}(s) + u^{\Gamma}(s) \tag{1}$$

при $u_{\infty}(s)$, $u^{+}(s)$, $u^{-}(s)$, $u^{\Gamma}(s)$, соответствующих возмущениям $f(s)$, $f^{+}(s)$, $f^{-}(s)$, $f^{\Gamma}(s)$ соответственно.

Задача построения вектор-функции $u(s)$ будет решена, если будут найдены матричные функции $G_{\infty}(s - s')$, $G^{+}(s - s^{+})$, $G^{-}(s - s^{-})$, $G^{\Gamma}(s - s^{\Gamma})$, которые действие массовых и поверхностных возмущающих факторов, имеющих место в пространственно-временных точках

$$s' = (\xi', t') \in S_0 \times [0, T] = S_0^T,$$

$$s^{+} = (x, y, \frac{h}{2}, t) \in \left(S_0 \cap \left(z = \frac{h}{2} \right) \right) \times [0, T] = S_0^{+},$$

$$s^{-} = \left(x, y, -\frac{h}{2}, t \right) \in \left(S_0 \cap \left(z = -\frac{h}{2} \right) \right) \times [0, T] = S_0^{-}, \qquad s^{\Gamma} = (\xi, t) \in \Gamma \times [0, T] = S_0^{\Gamma}$$

(здесь S_0 — пространственная область тела плиты, а Γ — ее торцевая поверхность), передают в точку $s \in S_0^T$.

При решении задачи будем исходить из трехмерных уравнений Ляме [9] пространственной теории упругости и для удобства запишем их в виде

$$L(\partial_s) u(s) = f(s). \tag{2}$$

Здесь

$$L(\partial_s) = \tag{3}$$

$$= \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\partial_x^2 + \mu(\partial_y^2 + \partial_z^2) - \rho\,\partial_t^2 & (\lambda + \mu)\partial_x \partial_y & (\lambda + \mu)\partial_x \partial_z \\ (\lambda + 2\mu)\partial_y \partial_x & (\lambda + 2\mu)\partial_y^2 + \mu(\partial_z^2 + \partial_x^2) - \rho\,\partial_t^2 & (\lambda + \mu)\partial_y \partial_z \\ (\lambda + \mu)\partial_z \partial_x & (\lambda + \mu)\partial_z \partial_y & (\lambda + 2\mu)\partial_z^2 + \mu(\partial_x^2 + \partial_y^2) - \rho\,\partial_t^2 \end{pmatrix}$$

является матричным дифференциальным оператором, в котором ρ — удельная плотность материала плиты, а λ и μ — константы Ляме, которыми характеризуются упругие свойства материала тела, $\partial_s = (\partial_\xi, \partial_t) = (\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_t)$ — вектор частных производных по пространственным координатам x, y, z и времени t.

Определяя составляющие $u_\infty(s)$, $u^+(s)$, $u^-(s)$, $u^\Gamma(s)$ в (1) соотношениями

$$
\begin{aligned}
u_\infty(s) &= \int\limits_{S_0^T} G_\infty(s-s')f(s')ds',\\
u^+(s) &= \int\limits_{S_0^+} G^+(s-s'^+)f^+(s'^+)dx'\,dy'\,dt',\\
u^-(s) &= \int\limits_{S_0^-} G^-(s-s'^-)f^-(s'^-)dx'\,dy'\,dt',\\
u^\Gamma(s) &= \int\limits_{S_0^\Gamma} G^\Gamma(s-s'^\Gamma)f^\Gamma(s'^\Gamma)d\xi'\,dt',
\end{aligned}
\tag{4}
$$

делаем вывод, что представленная согласно (1) вектор-функция $u(s)$ будет удовлетворять [11] уравнению (2), согласованному с поверхностно-торцевыми нагрузками $f^+(s^+)$, $f^-(s^-)$, $f^\Gamma(s^\Gamma)$ так, что

$$
L(\partial_s)\,u(s) = \begin{cases} f(s) & \text{при } s \in S_0^T;\\ f^\pm(s^\pm) & \text{при } s^\pm = (x, y, \pm\dfrac{h}{2}, t) \in S_0^\pm;\\ f^\Gamma(s^\Gamma) & \text{при } s^\Gamma \in S_0^\Gamma \end{cases}
\tag{5}
$$

при

$$
\begin{aligned}
G_\infty(s-s') &= G(s-s')\big|_{s'\in S_0^T},\\
G^\pm(s-s') &= G(s-s')\big|_{s'\in S_0^\pm},\\
G^\Gamma(s-s') &= G(s-s')\big|_{s'\in S_0^\Gamma}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

и

$$
L(\partial_s)G(s-s') = \Delta(s-s'),
\tag{7}
$$

где

$$
\Delta(s-s) = \mathrm{diag}(\delta(s-s'),\ i=\overline{1,3}),
$$

$$
\delta(s-s') = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')\delta(t-t'),
$$

а $\delta(x-x')$, $\delta(y-y')$, $\delta(z-z')$, $\delta(t-t')$ — δ-функции Дирака, для которых имеют место интегральные представления вида

$$
\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(t-t')}d\lambda
$$

(здесь i — мнимая единица).

Решением (7) будет матричная функция

$$
G(s-s') = \frac{1}{16\pi^4}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{E(p,q,s-s')}{L(p,q)}dpdq,
\tag{8}
$$

где

$$
p = (p_1,\ p_2,\ p_3),\ dp = dp_1dp_2dp_3,
$$

$$
E(p,q,s-s') = \mathrm{diag}\,(e^{p_1(x-x')+p_2(y-y')-p_3(z-z')+q(t-t')},\ i=\overline{1,3}).
$$

Заметим, что из решений (8) уравнения (7), построенных [10] с применением интегральных вычетов классической теории функции комплексной переменной, в (6) должны фигурировать только непрерывные функции, удовлетворяющие условиям симметричности по аргументу и затухающие на бесконечности.

С учетом (6), (8) с помощью соотношений (1), (4) может быть построено поле упругих динамических смещений точек произвольной толщины упругой плиты без ограничений, связанных с геометрией ее боковой поверхности, для случаев, когда объемные и поверхностно-торцевые силовые воздействия на нее заданы системой непрерывно определенных вектор-функций $f(s)$, $f^{\pm}(s)$, $f^{\Gamma}(s)$. Полученное решение также имеет место при условии, что эти функции заданы в подобластях граничных и торцевых поверхностей. В этом случае интегрирование в (4) выполняется по этим подобластям.

Построенное решение может быть использовано даже для случаев, когда внешнединамические возмущающие факторы определены системой векторов

$$\bar{f} = \mathrm{col}(f_m,\ m = \overline{1, M}), \quad \bar{f}^{\pm} = \mathrm{col}(f_m^{\pm},\ m = \overline{1, M^{\pm}}), \quad \bar{f}^{\Gamma} = \mathrm{col}(f_m^{\Gamma},\ m = \overline{1, M^{\Gamma}})$$

значений $f_m = f(s_m)$ $(m = \overline{1, M})$, $f_m^{\pm} = f^{\pm}(s_m^{\pm})$ $(m = \overline{1, M^{\pm}})$, $f_m^{\Gamma} = f^{\Gamma}(s_m^{\Gamma})$ $(m = \overline{1, M^{\Gamma}})$ вектор-функций $f(s)$, $f^{\pm}(s)$, $f^{\Gamma}(s)$ в точках $s_m \in S_0^T$, $s_m^{\pm} \in S_0^{\pm}$, $s_m^{\Gamma} \in S_0^{\Gamma}$. В этом случае составляющие $u_{\infty}(s)$, $u^{\pm}(s)$, $u^{\Gamma}(s)$ вектор-функции (1) определим соотношениями:

$$\begin{aligned} u_{\infty}(s) &= \sum_{m=1}^{M} G(s - s_m) f_m, \\ u^{\pm}(s) &= \sum_{m=1}^{M^{\pm}} G^{\pm}(s - s_m^{\pm}) f_m^{\pm}, \\ u^{\Gamma}(s) &= \sum_{m=1}^{M^{\Gamma}} G^{\Gamma}(s - s_m^{\Gamma}) f_m^{\Gamma}. \end{aligned} \tag{9}$$

При этом, как и выше, согласно [11]

$$L(\partial_s) u(s)\big|_{s = s_m} = f_m \quad (m = \overline{1, M}),$$

$$L(\partial_s) u(s)\big|_{s = s_m^{\pm}} = f_m^{\pm} \quad (m = \overline{1, M^{\pm}}),$$

$$L(\partial_s) u(s)\big|_{s = s_m^{\Gamma}} = f_m^{\Gamma} \quad (m = \overline{1, M^{\Gamma}}).$$

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТОЛСТЫХ УПРУГИХ ПЛИТ, НАБЛЮДАЕМЫХ ПО ПОВЕРХНОСТНО-ТОРЦЕВЫМ СМЕЩЕНИЯМ

Постановка задач и проблемы их решения. Рассмотрим задачу построения определенной согласно (2) вектор-функции $u(s)$ состояния рассматриваемой выше упругой плиты толщины $2h$ для случая, когда внешнединамические наблюдения за ее состоянием заданы не силовыми вектор-функциями $f(s)$, $f^{\pm}(s)$, $f^{\Gamma}(s)$, а линейно преобразованными функциями динамических смещений поверхностно-граничных точек плиты, которые в общем случае определим соотношениями:

$$L_i^{\pm}(\partial_s)\, u(s)\big|_{s \in S_0^{\pm}} = U_i^{\pm}(s) \quad (i = \overline{1, I^{\pm}}), \tag{10}$$

$$L_i^{\Gamma}(\partial_s)\, u(s)\big|_{s \in S_0^{\Gamma}} = U_i^{\Gamma}(s) \quad (i = \overline{1, I^{\Gamma}}), \tag{11}$$

в которых $L_i^{\pm}(\partial_s)$ $(i=\overline{1, I^{\pm}})$, $L_i^{\Gamma}(\partial_s)$ $(i=\overline{1, I^{\Gamma}})$ — матричные линейные дифференциальные операторы, а $U_i^{\pm}(s)$ $(i=\overline{1, I^{\pm}})$, $U_i^{\Gamma}(s)$ $(i=\overline{1, I^{\Gamma}})$ — заданные трехмерные вектор-функции.

Рассмотрим также случай дискретных наблюдений за состоянием плиты, которые по аналогии с (10), (11) запишем в виде:

$$L_i^{\pm}(\partial_s)\, u(s)\Big|_{s=s_{ij}^{\pm}\in S_0^{\pm}} = U_{ij}^{\pm} \quad (i=\overline{1, I^{\pm}},\ j=\overline{1, J^{\pm}}), \tag{12}$$

$$L_i^{\Gamma}(\partial_s)\, u(s)\Big|_{s=s_{ij}^{\Gamma}\in S_0^{\Gamma}} = U_{ij}^{\Gamma} \quad (i=\overline{1, I^{\Gamma}},\ j=\overline{1, J^{\Gamma}}), \tag{13}$$

где $U_{ij}^{\pm}$ $(i=\overline{1, I^{\pm}},\ j=\overline{1, J^{\pm}})$, U_{ij}^{Γ} $(i=\overline{1, I^{\Gamma}},\ j=\overline{1, J^{\Gamma}})$ — заданные значения.

Заметим, что здесь никакие ограничения на количество $I^{\pm}$, I^{Γ} соотношений (10)–(13), на количество $J^{\pm}$, J^{Γ} точек, которым они соответствуют, а также на вектор-функции $U_i^{\pm}(s)$ $(i=\overline{1, I^{\pm}})$, $U_i^{\Gamma}(s)$ $(i=\overline{1, I^{\Gamma}})$ (кроме их интегрируемости в области определения аргумента) не налагаются. Это приводит к некорректности в постановке задачи построения вектор-функции $u(s)$, определенной согласно (2), в силу чего она решается так, чтобы решение уравнения (2) удовлетворяло поверхностно-граничным условиям (10), (11) и (12), (13) согласно критериям

$$\Phi_1 = \sum_{i=1}^{I^+} \int_{S_0^+} \| L_i^{+}(\partial_s)\, u(s) - U_i^{+}(s) \|^2\, ds + \sum_{i=1}^{I^-} \int_{S_0^-} \| L_i^{-}(\partial_s) u(s) - U_i^{-}(s) \|^2 ds +$$
$$+ \sum_{i=1}^{I^{\Gamma}} \int_{S_0^{\Gamma}} \| L_i^{\Gamma}(\partial_s) u(s) - U_i^{\Gamma}(s) \|^2 ds \to \min_{u(s)}, \tag{14}$$

$$\Phi_2 = \sum_{i=1}^{I^+}\sum_{j=1}^{J^+} \| L_i^{+}(\partial_s) u(s)\big|_{s=s_{ij}^+} - U_{ij}^{+} \|^2 + \sum_{i=1}^{I^-}\sum_{j=1}^{J^-} \| L_i^{-}(\partial_s) u(s)\big|_{s=s_{ij}^-} - U_{ij}^{-} \|^2 +$$
$$+ \sum_{i=1}^{I^{\Gamma}}\sum_{j=1}^{J^{\Gamma}} \| L_i^{\Gamma}(\partial_s)\, u(s)\big|_{s=s_{ij}^{\Gamma}} - U_{ij}^{\Gamma} \|^2 \to \min_{u(s)} \tag{15}$$

соответственно.

При решении задач (2), (10), (11) и (2), (12), (13) согласно (14), (15) искомую вектор-функцию $u(s)$ состояния рассматриваемой плиты определяем соотношениями (1), (4) и (1), (9), в которых вектор-функции $f^{\pm}(s)$, $f^{\Gamma}(s)$ и векторы $\bar{f}^{\pm}$, $\bar{f}^{\Gamma}$ их значений в точках $s_m^+ \in S_0^+$ $(m=\overline{1, M^+})$, $s_m^- \in S_0^-$ $(m=\overline{1, M^-})$, $s_m^{\Gamma} \in S_0^{\Gamma}$ $(m=\overline{1, M^{\Gamma}})$ будем считать неизвестными и в силу (14), (15) определим их так, чтобы

$$\Phi_1 \to \min_{\bar{\bar{f}}}, \tag{16}$$

$$\Phi_2 \to \min_{\bar{\bar{f}}}, \tag{17}$$

$$\Phi_2 \to \min_{\bar{\bar{f}}(s)}, \tag{18}$$

где

$$\bar{\bar{f}} = \mathrm{col}\,(\bar{f}^{+}, \bar{f}^{-}, \bar{f}^{\Gamma}),$$

$$\bar{\bar{f}}(s) = \mathrm{col}\,(f^{+}(s), f^{-}(s), f^{\Gamma}(s)).$$

Решение задач (16)–(18) рассмотрим далее.

Задача (16). Исходя из структуры функционала Φ_1, заключаем, что решение задачи (16) определяется среднеквадратическим обращением системы функциональных уравнений, полученных после подстановки (1), (9) в (2).

Обозначая

$$\overline{U}(s) = \mathrm{col}\,((U^+(s), s \in S_0^+), (U^-(s), \ s \in S_0^-), (U^\Gamma(s), \ s \in S_0^\Gamma)),$$

$$A(s) = \mathrm{col}\,(L_G^+(s), L_G^-(s), L_G^\Gamma(s))$$

при

$$U^\pm(s) = \mathrm{col}\,(U_i^\pm(s) - L_i^\pm(\partial_s)u_\infty(s), \ i = \overline{1, I^\pm}),$$

$$U^\Gamma(s) = \mathrm{col}\,(U_i^\Gamma(s) - L_i^\Gamma(\partial_s)u_\infty(s)), \ i = \overline{1, I^\Gamma}),$$

$$L_G^\pm(s) = \mathrm{col}\,(L_i^\pm(\partial_s)\overline{G}(s), \ i = \overline{1, I^\pm}) \ (s \in S_0^\pm),$$

$$L_G^\Gamma(s) = \mathrm{col}\,(L_i^\Gamma(\partial_s)\overline{G}(s)), \ i = \overline{1, I^\Gamma}) \ (s \in S_\Gamma^\pm),$$

$$\overline{G}(s) = \mathrm{str}\,(\overline{G}^+(s), \overline{G}^-(s), \overline{G}^\Gamma(s)),$$

$$\overline{G}^\pm(s) = \mathrm{str}\,(G^\pm(s - s_m^\pm), m = \overline{1, M^\pm}),$$

$$\overline{G}^\Gamma(s) = \mathrm{str}\,(G^\Gamma(s - s_m^\Gamma), m = \overline{1, M^\Gamma})$$

эту систему запишем в виде

$$A(s)\bar{\bar{f}} = U(s), \tag{19}$$

где вектор $\bar{\bar{f}}$ и точки $s_m^\pm$ $(m = \overline{1, M^\pm})$, s_m^Γ $(m = \overline{1, M^\Gamma})$ определены выше.

Решением (19) таким, что

$$\int_{(\cdot)} \| A(s)\bar{\bar{f}} - U(s) \|^2 \, ds \to \min_{\bar{\bar{f}}}$$

(здесь и далее знаком $(\cdot)$ обозначено интегрирование по области определения подынтегральной функции), будет [11]

$$\bar{\bar{f}} = P_2^* A_U + \bar{\bar{v}} - P_2^* P_2 \bar{\bar{v}}, \tag{20}$$

где знаком * обозначена операция псевдообращения матрицы

$$P_2 = \int_{S_0^+} [L_G^+(s)]^{\mathrm{T}} L_G^+(s) ds + \int_{S_0^-} [L_G^-(s)]^{\mathrm{T}} L_G^-(s) ds + \int_{S_0^\Gamma} [L_G^\Gamma(s)]^{\mathrm{T}} L_G^\Gamma(s) ds,$$

$$\bar{\bar{v}} = \mathrm{col}\,(v^+, v^-, v^\Gamma)$$

при произвольных $3M^+$-, $3M^-$-, $3M^\Gamma$-мерном векторах v^+, v^-, v^Γ, тождественно равных нулю, если $\det P_2 > 0$, а

$$A_U = \int_{S_0^+} [L_G^+(s)]^{\mathrm{T}} U^+(s) ds + \int_{S_0^-} [L_G^-(s)]^{\mathrm{T}} U^-(s) ds + \int_{S_0^\Gamma} [L_G^\Gamma(s)]^{\mathrm{T}} U^\Gamma(s) ds.$$

Из соотношения (20)

$$\bar{f}^\pm = P_2^\pm A_U + v^\pm - P_2^\pm P_2 \bar{\bar{v}},$$
$$\bar{f}^\Gamma = P_2^\Gamma A_U + v^\Gamma - P_2^\Gamma P_2 \bar{\bar{v}} \tag{21}$$

при $\mathrm{col}\,(P_2^+, P_2^-, P_2^\Gamma) = P_2^*$.

С учетом найденных в (21) векторов $\bar{f}^{\pm}, \bar{f}^{\Gamma}$ соотношениями (1), (9) определим искомую согласно (14) вектор-функцию $u(s)$ состояния точек рассматриваемой плиты при условии, что состояние ее гранично-торцевых поверхностей наблюдается согласно (10), (11). Найденная таким образом вектор-функция $u(s)$, точно удовлетворяя [11] уравнению (2) динамики плиты, согласуется с наблюдениями (10), (11) за ней с точностью

$$\varepsilon^2 = \min_{u(s)} \Phi_1 = \min_{\bar{\bar{f}}} \Phi_1 = \int_{S_0^+} [U^+(s)]^{\mathrm{T}} U^+(s) ds + \int_{S_0^-} [U^-(s)]^{\mathrm{T}} U^-(s) ds +$$

$$+ \int_{S_0^{\Gamma}} [U^{\Gamma}(s)]^{\mathrm{T}} U^{\Gamma}(s) ds - A_U^{\mathrm{T}} P_2^* A_U \,.$$

Задача (17). Как и при решении предыдущей задачи, искомую вектор-функцию $u(s)$ состояния рассматриваемой плиты представим соотношениями (1), (9), неизвестные вектора $\bar{f}^+$, $\bar{f}^-$, $\bar{f}^{\Gamma}$ в которых определим из системы линейных алгебраических уравнений, полученной после подстановки (1), (9) в (12), (13).

Обозначая

$$U = \mathrm{col}\,(U^+, U^-, U^{\Gamma}),$$

$$A = \mathrm{col}\,(L_G^+, L_G^-, L_G^{\Gamma}),$$

при

$$U^{\pm} = \mathrm{col}\,(((U_{ij}^{\pm} - L_i^{\pm}(\partial_s)\, u_{\infty}(s)\Big|_{s=s_{ij}^{\pm}}),\ j = \overline{i, J^{\pm}}),\ i = \overline{1, I^{\pm}}),$$

$$U^{\Gamma} = \mathrm{col}\,(((U_{ij}^{\Gamma} - L_i^{\Gamma}(\partial_s)\, u_{\infty}(s)\Big|_{s=s_{ij}^{\Gamma}}),\ j = \overline{i, J^{\Gamma}}),\ i = \overline{1, I^{\Gamma}}),$$

$$L_G^{\pm} = \mathrm{col}\,((L_i^{\pm}(\partial_s)\, \overline{G}(s)\Big|_{s=s_{ij}^{\pm}}),\ j = \overline{i, J^{\pm}}),\ i = \overline{1, I^{\pm}}),$$

$$L_G^{\Gamma} = \mathrm{col}\,((L_i^{\Gamma}(\partial_s)\, \overline{G}(s)\Big|_{s=s_{ij}^{\Gamma}}),\ j = \overline{i, J^{\Gamma}}),\ i = \overline{1, I^{\Gamma}}),$$

$s_{ij}^{\pm}$ $(i = \overline{1, I^{\pm}},\ j = \overline{1, J^{\pm}})$, s_{ij}^{Γ} $(i = \overline{1, I^{\Gamma}},\ j = \overline{1, J^{\Gamma}})$ и $\overline{G}(s)$, определенных выше, эту систему запишем в виде

$$A\bar{\bar{f}} = U. \tag{22}$$

Решением (22) таким, что

$$\| A\bar{\bar{f}} - U \|^2 \to \min_{\bar{\bar{f}}},$$

является [11] вектор

$$\bar{\bar{f}} = A^{\mathrm{T}} P_1^* U + \bar{\bar{v}} - A^{\mathrm{T}} P_1^* A \bar{\bar{v}},$$

где $\bar{\bar{v}} = \mathrm{col}\,(v^+ \in R^{M^+},\ v^- \in R^{M^-},\ v^{\Gamma} \in R^{M^{\Gamma}})$ — произвольный $3(M^+ + M^- + M^{\Gamma})$-мерный вектор, тождественно равный нулю, если $\det(A^T A) > 0$. Отсюда

$$\bar{f}^{\pm} = L_{G\pm}^{\mathrm{T}} P_1^* U + v^{\pm} - L_G^{\pm\pm} P_1^* A \bar{\bar{v}}, \tag{23}$$

$$\bar{f}^{\Gamma} = L_{G\Gamma}^{\mathrm{T}} P_1^* U + v^{\Gamma} - L_G^{\Gamma\Gamma} P_1^* A \bar{\bar{v}},$$

где

$$P_1 = AA^{\mathrm{T}},\ (L_{G+}, L_{G-}, L_{G\Gamma}) = A$$

при

$$L_{G\pm} = \mathrm{col}\,(L_{G\pm}^{+}, L_{G\pm}^{-}, L_{G\pm}^{\Gamma}), \qquad L_{G\Gamma} = \mathrm{col}\,(L_{G\Gamma}^{+}, L_{G\Gamma}^{-}, L_{G\Gamma}^{\Gamma}),$$

$$L_{G+}^{\pm} = \mathrm{col}\,((L_i^{\pm}(\partial_s)\overline{G}^{+}(s)\Big|_{s=s_{ij}^{\pm}\in S_0^{\pm}},\ j=\overline{1, J^{\pm}}),\ i=\overline{1, I^{\pm}}),$$

$$L_{G-}^{\pm} = \mathrm{col}\,((L_i^{\pm}(\partial_s)\overline{G}^{-}(s)\Big|_{s=s_{ij}^{\pm}\in S_0^{\pm}},\ j=\overline{1, J^{\pm}}),\ i=\overline{1, I^{\pm}}),$$

$$L_{G\Gamma}^{\pm} = \mathrm{col}\,((L_i^{\pm}(\partial_s)\overline{G}^{\Gamma}(s)\Big|_{s=s_{ij}^{\pm}\in S_0^{\pm}},\ j=\overline{1, J^{\pm}}),\ i=\overline{1, I^{\pm}}),$$

$$L_{G\pm}^{\Gamma} = \mathrm{col}\,((L_i^{\Gamma}(\partial_s)\overline{G}^{\pm}(s)\Big|_{s=s_{ij}^{\Gamma}\in S_0^{\Gamma}},\ j=\overline{1, J^{\Gamma}}),\ i=\overline{1, I^{\Gamma}}),$$

$$L_{G\Gamma}^{\Gamma} = \mathrm{col}\,((L_i^{\Gamma}(\partial_s)\overline{G}^{\Gamma}(s)\Big|_{s=s_{ij}^{\Gamma}\in S_0^{\Gamma}},\ j=\overline{1, J^{\Gamma}}),\ i=\overline{1, I^{\Gamma}}).$$

Учитывая, что вектор-функция (1), записанная с учетом (9), (23), удовлетворяет уравнению (2) [11] при любых $\bar{\bar{f}}$, точность решения задачи определим величиной

$$\varepsilon^2 = \min_{u(s)} \Phi_2 = \min_{\bar{\bar{f}}} \Phi_2 = \| A\bar{\bar{f}} - U \|^2 = U^{\mathrm{T}} U - U^{\mathrm{T}} P_1 P_1^{*} U.$$

Задача (18). При решении задачи (18) в отличие от двух предыдущих задач искомую вектор-функцию $u(s)$ определим соотношениями (1), (4), в которых выражения для неизвестных вектор-функций $f^{\pm}(s)$, $f^{\Gamma}(s)$ получаем из системы линейных интегральных уравнений, полученных в результате подстановки (1), (4) в (12), (13).

Вводя в рассмотрение в дополнение к определенному выше вектору U вектор-функцию

$$\bar{f}(s) = \begin{pmatrix} f^{+}(s),\ s\in S_0^{+} \\ f^{-}(s),\ s\in S_0^{-} \\ f^{\Gamma}(s),\ s\in S_0^{\Gamma} \end{pmatrix}$$

и матричную функцию

$$A(s) = \mathrm{str}\,(A^{+}(s),\ A^{-}(s),\ A^{\Gamma}(s))$$

при

$$\begin{aligned} A^{\pm}(s) = \mathrm{col}\,(((L_i^{+}(\partial_s)G^{\pm}(s_{ij}^{\pm}-s),\ j=\overline{1, J^{+}}),\ i=\overline{1, I^{+}}),& \\ ((L_i^{-}(\partial_s)G^{\pm}(s_{ij}^{\pm}-s),\ j=\overline{1, J^{-}}),\ i=\overline{1, I^{-}}),& \\ ((L_i^{\Gamma}(\partial_s)G^{\pm}(s_{ij}^{\pm}-s),\ j=\overline{1, J^{\Gamma}}),\ i=\overline{1, I^{\Gamma}}))\ \ (s\in S_0^{\pm}),& \\ A^{\Gamma}(s) = \mathrm{col}\,(((L_i^{+}(\partial_s)G^{\Gamma}(s_{ij}^{\Gamma}-s),\ j=\overline{1, J^{+}}),\ i=\overline{1, I^{+}}),& \\ ((L_i^{-}(\partial_s)G^{\Gamma}(s_{ij}^{\Gamma}-s),\ j=\overline{1, J^{-}}),\ i=\overline{1, I^{-}}),& \\ ((L_i^{\Gamma}(\partial_s)G^{\Gamma}(s_{ij}^{\Gamma}-s),\ j=\overline{1, J^{\Gamma}}),\ i=\overline{1, I^{\Gamma}}))\ \ (s\in S_0^{\Gamma})& \end{aligned}$$

и $s_{ij}^{\pm}$ $(i=\overline{1, I^{\pm}},\ j=\overline{1, J^{\pm}})$, s_{ij}^{Γ} $(i=\overline{1, I^{\Gamma}},\ j=\overline{1, J^{\Gamma}})$, определеных выше, эту систему запишем в виде

$$\int_{(\cdot)} A(s)\bar{f}(s)ds = U. \tag{24}$$

Решением системы (24) таким, что

$$\Big\| \int_{(\cdot)} A(s)\bar{f}(s)ds - U \Big\|^2 \to \min_{\bar{f}(s)},$$

является [11] вектор-функция

$$\bar{f}(s) = A^{\mathrm{T}}(s) P^* U + \bar{v}(s) - A^{\mathrm{T}}(s) P^* A_v, \qquad (25)$$

в которой

$$P = \int_{S_0^+} [A^+(s)]^{\mathrm{T}} A^+(s) ds + \int_{S_0^-} [A^-(s)]^{\mathrm{T}} A^-(s) ds + \int_{S_0^\Gamma} [A^\Gamma(s)]^{\mathrm{T}} A^\Gamma(s) ds,$$

$$A_v = \int_{S_0^+} [A^+(s)]^{\mathrm{T}} v^+(s) ds + \int_{S_0^-} [A^-(s)]^{\mathrm{T}} v^-(s) ds + \int_{S_0^\Gamma} [A^\Gamma(s)]^{\mathrm{T}} v^\Gamma(s) ds,$$

$$\bar{v}(s) = \mathrm{col}\,((v^+(s), s \in S_0^+), (v^-(s), s \in S_0^-), (v^\Gamma(s), s \in S_0^\Gamma)),$$

а $v^+(s)$, $v^-(s)$, $v^\Gamma(s)$ — произвольные интегрируемые в области изменения своих аргументов трехмерные вектор-функции, тождественно равные нулю, если

$$\lim_{N \to \infty} \det \left[A^{\mathrm{T}}(s_i) A(s_j) \right]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0$$

при условии, что точки s_i $(i = \overline{1, N})$, s_j $(j = \overline{1, N})$ выбраны в соответствии с областью определения элементов матричной функции $A(s)$.

Из соотношения (25) с учетом структуры матричной функции $A(s)$ находим

$$f^\pm(s) = A^\pm(s) P^* U + v^\pm(s) - A^\pm(s) P^* A_v,$$

$$f^\Gamma(s) = A^\Gamma(s) P^* U + v^\Gamma(s) - A^\Gamma(s) P^* A_v.$$

Последнее определяет соотношениями (1), (4) искомую согласно (2), (12), (13), (18) вектор-функцию $u(s)$, которая, точно удовлетворяя уравнению (2), согласуется с наблюдениями (12), (13) с точностью

$$\varepsilon^2 = \min_{u(s)} \Phi_2 = \min_{\bar{f}(s)} \Phi_2 = U^{\mathrm{T}} U - U^{\mathrm{T}} P P^* U.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье решен комплекс сложнейших задач динамики толстых упругих плит, не решенных до сих пор. Задачи сформулированы и решены в трехмерной постановке для плоских упругих плит произвольной толщины и с произвольной геометрией боковой поверхности. Исходными для постановки и решения рассмотренных задач являются трехмерные уравнения Ляме, дополненные поверхностными и граничными условиями произвольного содержания и без ограничений на их количество. Рассмотрены случаи, когда внешнединамическое состояние плиты задается системой поверхностно-граничных силовых факторов, а также линейно преобразованной функцией динамических смещений поверхностно-граничных точек плиты. Рассмотрены случаи, когда внешнединамические возмущения заданы непрерывно и дискретно. В таких постановках задачи построения трехмерного поля упругих динамических смещений точек плиты некорректны с математической точки зрения и не могут быть решены ни методами классической математики, ни численными методами. В данной статье вектор-функция пространственных динамических смещений точек плиты построена так, что она, являясь точным решением классических уравнений Ляме, согласуется с внешнединамическими наблюдениями за поверхностно-граничным состоянием плиты в соответствии со среднеквадратическим критерием. Получена оценка точности указанного согласования и записаны условия однозначности построенных решений. Практическая реализация конечных математических соотношений по каждой из рассмотренных задач проста и не выходит за пределы классической линейной алгебры и численных методов интегрирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Немиш Ю.Н., Хома Ю.И. Напряженно-деформируемое состояние нетонких оболочек и пластин. Трехмерная теория (Обзор). *Прикладная механика*. 1991. Т. 27, № 11. С. 3–27.
2. Стоян В.А. Про застосування символічного методу А.І. Лур'є в еластодинаміці товстих плит. ДАН УРСР. Сер. А. 1972. № 10. С. 927–931.
3. Стоян В.А. Об алгоритме построения полутрехмерных дифференциальных уравнений эластодинамичных толстых плит. *Прикладная механика.* 1976. Т. 12, № 7. С. 39–44.
4. Стоян В.А., Двирничук К.В. К построению дифференциальной модели поперечных динамических смещений толстого упругого слоя. *Проблемы управления и информатики.* 2012. № 4. С. 74–83.
5. Стоян В.А., Двирничук К.В. Об интегральной модели поперечных динамических смещений толстого упругого слоя. *Проблемы управления и информатики.* 2013. № 1. С. 70–82.
6. Стоян В.А, Двирничук К.В. О математическом моделировании трехмерного поля поперечных динамических смещений толстых упругих плит. *Кибернетика и системный анализ.* 2013. № 6. С. 58–72.
7. Стоян В.А., Двирничук К.В. О математическом моделировании задач управления динамикой толстых упругих плит. I. Управление при непрерывно заданном желаемом состоянии. *Кибернетика и системный анализ.* 2014. Т. 50, № 3. С. 70–96.
8. Стоян В.А., Двирничук К.В. О математическом моделировании задач управления динамикой толстых упругих плит. II. Управление при дискретно заданном желаемом состоянии. *Кибернетика и системный анализ.* 2015. Т. 51, № 2. С. 117–133.
9. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. Москва: Гостехиздат, 1955. 492 с.
10. Стоян В.А., Двірничук К.В. До побудови інтегрального еквіваленту лінійних диференціальних моделей. *Доповіді НАН України*. 2012. № 9. С. 36–43.
11. Стоян В.А. Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2011. 319 с.

Надійшла до редакції 22.02.2017

В.А. Стоян

ПРО ТРИВИМІРНІ ІНТЕГРАЛЬНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ ТОВСТИХ ПРУЖНИХ ПЛИТ

Анотація. Розв'язано комплекс задач з побудови тривимірного поля пружних динамічних зміщень точок плоскої пружної плити з довільною гранично-торцевою поверхнею. Припускається, що граничний стан плити задано через силові збурюючі фактори або функцію вектора зміщень. Розв'язки задач побудовано на базі класичних рівнянь Ляме просторової теорії пружності за умови їхнього середньоквадратичного узгодження з наявними зовнішньодинамічними спостереженнями за станом плити. Оцінено точність такого узгодження. Сформульовано умови однозначності розв'язання розглядуваних задач.

Ключові слова: просторово розподілені динамічні системи, просторові задачі теорії пружності, псевдоінверсія, товсті пружні плити.

V.A. Stoyan

THREE-DIMENSIONAL INTEGRAL MATHEMATICAL MODELS OF THE DYNAMICS OF THICK ELASTIC PLATES

Abstract. The complex of problems related to constructing three-dimensional field of elastic dynamic displacement of flat elastic plate with arbitrary boundary-edge surface is solved. It is assumed that boundary condition of the plate is given in terms of powerful perturbation factors or displacement vector function. Problems solutions are based on classical Lame equations of spatial theory of elasticity under root meen-square consistency of the solution with corresponding external-dynamic observations of the plate. The accuracy of such consistency is estimated. The uniqueness conditions for the solution of the considered problems are formulated.

Keywords: spatially distributed dynamical systems, spatial problems of elasticity theory, pseudoinversion, thick elastic plates.

Стоян Владимир Антонович,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: v_a_stoyan@ukr.net.