

УЗАГАЛЬНЕНА ІНТЕРСТРІПАЦІЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Анотація. Наведено огляд наявних методів відновлення пошкоджених зображень. Описано оператори інтерстріпації для відновлення зображень у разі, якщо інформація є відомою лише на системі смуг, паралельних осям координат, з криволінійними границями, розташованими під довільним кутом, з врахуванням шуму на відомих смугах. Проведено експеримент для порівняння роботи методів з відомими аналогами.

Ключові слова: зображення, двовимірний сигнал, відновлення зображень, інтерстріпація.

ВСТУП

У роботах [1–4] проведено дослідження операторів інтерстріпації (від англ. *inter* — між, від англ. *stripe* — смуга) функцій двох змінних, тобто відновлення цієї функції між системою смуг, якщо інформація про цю функцію є відомою лише в точках зазначених смуг. Отримано результати, які можна використовувати також для відновлення пошкоджених файлів, що містять графічну інформацію. Наприклад, під час передавання мережею файли можуть бути пошкоджені внаслідок помилок у передаванні даних або перевантаження мережі. Потреба в оцінці справжніх значень втрачених пікселів виникає у більшості випадків розв'язання задач цифрового оброблення зображень або, наприклад, під час розв'язання задач оброблення архівних документів у формі зображень, що мають різноманітні спотворення (подряпини, плями, пил, непотрібні написи, лінії згину тощо). Тому актуальним є розроблення методів відновлення зображення в тих його частинах, де інформація з тих чи інших причин є відсутньою або є неповністю відомою.

АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

Розглянемо задачу відновлення пошкоджених областей зображення з використанням інформації з відомих ділянок зображення. Позначимо \bar{G} множину пікселів у невідомій області, а G — множину коректних пікселів.

Більшість методів відновлення зображень можна умовно поділити на такі групи [6]:

- текстурні;
- шаблонні;
- на основі рівнянь у частинних похідних;
- гібридні;
- швидкі напівавтоматичні.

Текстурні методи відновлення зображень. У методах цієї групи для заповнення невідомої області \bar{G} безпосередньо використовують пікселі з відомої області зображення G [5]. Головна відмінність між текстурними методами полягає у забезпеченні неперервності на межі області ∂G . Так, наприклад, у [6] використано марковські випадкові поля (Markov random field) для моделювання локального розподілу невідомих пікселів, при цьому для відшукання невідомих значень знаходять подібну область з G , а в роботі [7] запропоновано алгоритм «зшивання» невеликих ділянок зображення (image guilting). У [8] наведено алгоритм параметричного синтезу текстур, який забезпечує синтез текстури з урахуванням цільової текстури. У [9] запропоновано метод текстурного синтезу, який дає змогу генерувати текстуру за різних умов яскравості. У роботі [10] наведено алгоритм відновлення зобра-

ження на основі аналізу та синтезу текстур, згідно з яким зображення спочатку досліджують методом аналізу головних компонент (Principal Component Analysis), а потім з використанням методу векторного квантування (Vector Quantization) в області \bar{G} знаходять невідомі значення. Запропоновані методи текстурного відновлення зображення відрізняються способом відновлення різних кольорів, інтенсивності, градієнта і навіть статистичних характеристик.

Шаблонні методи відновлення зображень. Основна ідея функціонування алгоритмів цього класу ґрунтується на припущенні про наявність повторюваних фрагментів даних на зображенні, які зазвичай називають шаблонами. Відновлення області \bar{G} здійснюється частинами шляхом копіювання значень яскравості з найбільш схожого шаблону. У роботі [11] запропоновано алгоритм заповнення невідомої області найбільш схожими фрагментами з відомої області G . Розмір фрагмента може змінюватись залежно від характеристик зображення. В [12] запропоновано ітераційний алгоритм заповнення області G , який дає змогу здійснити апроксимацію невідомих областей і компонування фрагментів зображення. Особливе місце посідає робота [13], у якій для заповнення пошкодженої області використовують базу даних зображень, що містить мільйони зображень-шаблонів для відновлення.

Методи відновлення зображень на основі рівнянь у частинних похідних. Метод вперше було запропоновано в [14]. За рахунок запозичення значною мірою ідеї ручного малювання ітераційний процес забезпечує розширення лінійних структур (розривів) області G , що називаються ізофотами (isophotes), у невідому область \bar{G} . Отже, відновлення даних області \bar{G} здійснюється за допомогою даних, які є природним продовженням інформації, що міститься в G . Цей підхід став основою подальших робіт. Наприклад, в [15] запропоновано алгоритм повної варіації (Total Variational (TV)) з використанням рівняння Ейлера–Лагранжа та анізотропної дифузії. Модель відновлення TV було розширено до моделі дифузійної корекції кривизни (Curvature Driven Diffusion) [16], яка містила інформацію про кривизну ізофот, що давало змогу більш ефективно відновлювати криволінійні структури. У роботі [17] запропоновано інший підхід, що ґрунтується на рівняннях у частинних похідних — алгоритм анізотропної вектор-регуляризації.

Гібридні методи відновлення зображень. З назви зрозуміло, що методи цього класу являють собою поєднання двох класів методів, а саме текстурних методів і методів на основі диференціальних рівнянь у частинних похідних. Основна ідея алгоритму полягає у тому, що спочатку виділяють текстурну та структурну складову зображення, а потім заповнюють їх з використанням відповідних алгоритмів [18–20].

Швидкі напівавтоматичні методи відновлення зображень. Недоліком більшості описаних вище методів є їхня висока обчислювальна складність, тому в деяких дослідженнях застосовують алгоритми для прискорення обчислень. У роботі [21] наведено метод відновлення зображення за допомогою виділеної структури. У методі швидкого проходження (Fast Marching Method (FMM)), описаному в [22], розглядають невідому область зображення \bar{G} як набір рівнів та використовують їх для відновлення зображення.

ІНТЕРСТРІПАЦІЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Розглянемо більш детально інтерстріпацію між системою вертикальних і горизонтальних смуг. Вважаємо, що зображення поверхні Σ є відомим лише на системі m ($m \geq 2$) вертикальних смуг вигляду

$$G_{1,k} = \{\alpha_k \leq x \leq \beta_k, y \in [\gamma_1, \delta_{n+1}]\}, \quad k = \overline{1, m},$$

та на системі n ($n \geq 2$) горизонтальних смуг вигляду

$$G_{2,l} = \{\gamma_l \leq y \leq \delta_l, x \in [\alpha_1, \beta_{m+1}]\}, \quad l = \overline{1, n}.$$

Введемо позначення $\bar{G}_{1,k} = \mathbb{R}^2 \setminus G_{1,k}$, $k = \overline{1, m}$, $\bar{G}_{2,l} = \mathbb{R}^2 \setminus G_{2,l}$, $l = \overline{1, n}$.

Тоді результатом об'єднання множин $G_{1,k}, k = \overline{1, m}$, та $G_{2,l}, l = \overline{1, n}$, є область \overline{G} незаповнених ділянок зображення. У точках зображення G , які не увійшли до \overline{G} , зберігається вся наявна інформація про зображення.

Вважаємо, що поверхня $\Sigma: z = f(x, y), f(x, y) \in C^{N,N}(\mathbb{R}^2)$, яку ми хочемо відновити, є відомою лише на зазначених вище смугах, тобто

$$\begin{aligned} f(x, y) \Big|_{\alpha_k \leq x \leq \beta_k} &= f_{1,k}(x, y), \quad \alpha_k \leq x \leq \beta_k, \quad \gamma_1 \leq y \leq \delta_{n+1}, \\ f(x, y) \Big|_{\gamma_l \leq y \leq \delta_l} &= f_{2,l}(x, y), \quad \gamma_l \leq y \leq \delta_l, \quad \alpha_1 \leq x \leq \beta_{m+1}. \end{aligned}$$

При цьому $\alpha_k < \beta_k < \alpha_{k+1} < \beta_{k+1}, k = \overline{1, m}, \gamma_l < \delta_l < \gamma_{l+1} < \delta_{l+1}, l = \overline{1, n}, C^{N,N}(\mathbb{R}^2)$ — клас функцій, що мають неперервні похідні $f^{(p,q)}(x, y)$ для $0 < p, q \leq N$.

Введемо такі оператори [2–5]:

$$\begin{aligned} L_1 f(x, y) &= \begin{cases} f_{1,k}(x, y), & \alpha_k \leq x \leq \beta_k, \quad \gamma_1 \leq y \leq \delta_{n+1}, \\ E_{1,k,k+1} f(x, y), & \beta_k \leq x \leq \alpha_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq m-1; \end{cases} \\ L_2 f(x, y) &= \begin{cases} f_{2,l}(x, y), & \gamma_l \leq y \leq \delta_l, \quad \alpha_1 \leq x \leq \beta_{m+1}, \\ E_{2,l,l+1} f(x, y), & \delta_l \leq y \leq \gamma_{l+1}, \quad 1 \leq l \leq n-1; \end{cases} \\ L_{12} f(x, y) &= \begin{cases} f_{1,k}(x, y), & (x, y) \in \overline{G}_{1,k}, \quad k = \overline{1, m}, \\ f_{2,l}(x, y), & (x, y) \in \overline{G}_{2,l}, \quad l = \overline{1, n}, \\ E_{1,2,k,l} f(x, y), & (x, y) \in G, \end{cases} \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} E_{1,2,k,l} f(x, y) &= [E_{1,k,k+1} + E_{2,l,l+1} - E_{1,k,k+1} E_{2,l,l+1}] f(x, y), \\ E_{1,k,k+1} f(x, y) &= \sum_{s=0}^N [f^{(s,0)}(\beta_k, y) \ell_{1,k,s}(x) + f^{(s,0)}(\alpha_{k+1}, y) \ell_{2,k+1,s}(x)], \\ E_{2,l,l+1} f(x, y) &= \sum_{p=0}^N [f^{(0,p)}(x, \delta_l) \ell_{1,l,p}(y) + f^{(0,p)}(x, \gamma_{l+1}) \ell_{2,l+1,p}(y)], \\ \ell_{1,k,s}(x) &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m (x - x_j)^N \frac{(x - x_k)^s}{s!} \left\{ 1 / \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m (x - x_j)^N \right\}_{(x_k)}^{N-s-1}, \\ \ell_{2,l,p}(y) &= \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n (y - y_i)^N \frac{(y - y_l)^p}{p!} \left\{ 1 / \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n (y - y_i)^N \right\}_{(y_l)}^{N-p-1}. \end{aligned}$$

Тут оператори $E_{1,k,k+1} f(x, y)$, $E_{2,l,l+1} f(x, y)$ та $E_{1,2,k,l} f(x, y)$ — це оператори двовимірної ермітової інтерполяції, $\ell_{1,k,s}(x)$ та $\ell_{2,l,p}(y)$ — поліноми Ерміта.

У тому разі, якщо інформація є відомою лише на системі горизонтальних смуг, поверхня $z = L_2 f(x, y)$ є наближеною математичною моделлю поверхні Σ , яка на кожній зі смуг $G_{2,l}, l = \overline{1, n}$, точно відтворює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора $E_{2,l,l+1} f(x, y), l = \overline{1, n-1}$. Аналогічно для випадку вертикальних смуг поверхня $z = L_1 f(x, y)$ є наближеною математичною моделлю поверхні Σ , яка на кожній зі смуг $G_{1,k}, k = \overline{1, m}$, точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора $E_{1,k,k+1} f(x, y), k = \overline{1, m-1}$. У тому разі, коли інформація про поверхню є відомою на системі взаємно перпендикулярних смуг, наближеною математичною моделлю поверхні Σ є поверхня $z = L_{12} f(x, y)$.

Наведені вище оператори інтерстріпації описано для функцій двох змінних, які мають неперервні похідні до порядку N включно, і називаються операторами інтерстріпації типу Ерміта. У разі оброблення двовимірних сигналів застосовують оператори інтерстріпації типу Лагранжа для $N = 0$:

$$\begin{aligned}
 E_{1,k,k+1}f(x, y) &= \frac{x - \beta_k}{\alpha_{k+1} - \beta_k} f(\alpha_{k+1}, y) + \frac{x - \alpha_{k+1}}{\beta_k - \alpha_{k+1}} f(\beta_k, y), \\
 E_{2,l,l+1}f(x, y) &= \frac{y - \delta_l}{\gamma_{l+1} - \delta_l} f(x, \gamma_{l+1}) + \frac{y - \gamma_{l+1}}{\delta_l - \gamma_{l+1}} f(x, \delta_l), \\
 E_{1,2,k,l}f(x, y) &= [E_{1,k,k+1} + E_{2,l,l+1} - E_{1,k,k+1}E_{2,l,l+1}]f(x, y) = \\
 &= \frac{x - \beta_k}{\alpha_{k+1} - \beta_k} f(\alpha_{k+1}, y) + \frac{x - \alpha_{k+1}}{\beta_k - \alpha_{k+1}} f(\beta_k, y) + \\
 &\quad + \frac{y - \delta_l}{\gamma_{l+1} - \delta_l} f(x, \gamma_{l+1}) + \frac{y - \gamma_{l+1}}{\delta_l - \gamma_{l+1}} f(x, \delta_l) - \\
 &\quad - \frac{x - \beta_k}{\alpha_{k+1} - \beta_k} \frac{y - \delta_l}{\gamma_{l+1} - \delta_l} f(\alpha_{k+1}, \gamma_{l+1}) - \frac{x - \beta_k}{\alpha_{k+1} - \beta_k} \frac{y - \gamma_{l+1}}{\delta_l - \gamma_{l+1}} f(\alpha_{k+1}, \delta_l) - \\
 &\quad - \frac{x - \alpha_{k+1}}{\beta_k - \alpha_{k+1}} \frac{y - \delta_l}{\gamma_{l+1} - \delta_l} f(\beta_k, \gamma_{l+1}) - \frac{x - \alpha_{k+1}}{\beta_k - \alpha_{k+1}} \frac{y - \gamma_{l+1}}{\delta_l - \gamma_{l+1}} f(\beta_k, \delta_l).
 \end{aligned}$$

ІНТЕРСТРІПАЦІЯ ЗІ ЗГЛАДЖУВАННЯМ ШУМУ ВХІДНОГО СИГНАЛУ

Якщо у графічних файлах окрім пошкоджених областей є також шуми на відомих ділянках зображення, то використання інтерстріпації напряду може дати хибні результати. Тому для уникнення цього замість точного значення на границі області потрібно використовувати деяке середнє значення [23, 24]:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{1,k,k+1}f(x, y) &= \frac{1}{w_{1,k,k+1}(x, y) + 1} \sum_{p=0}^{w_{1,k,k+1}(x, y)} f(\beta_k - p, y), \\
 \Delta_{2,k,k+1}f(x, y) &= \frac{1}{w_{1,k,k+1}(x, y) + 1} \sum_{p=0}^{w_{1,k,k+1}(x, y)} f(\alpha_{k+1} + p, y), \\
 \Delta_{3,l,l+1}f(x, y) &= \frac{1}{w_{2,l,l+1}(x, y) + 1} \sum_{r=0}^{w_{2,l,l+1}(x, y)} f(x, \delta_l - r), \\
 \Delta_{4,l,l+1}f(x, y) &= \frac{1}{w_{2,l,l+1}(x, y) + 1} \sum_{r=0}^{w_{2,l,l+1}(x, y)} f(x, \gamma_{l+1} + r),
 \end{aligned}$$

де $w_{1,k,k+1}(x, y) = \min(x - \beta_k, \alpha_{k+1} - x)$, $w_{2,l,l+1}(x, y) = \min(y - \delta_l, \gamma_{l+1} - y)$.

У цьому разі оператори інтерстріпації мають вигляд [24, 25]:

$$\begin{aligned}
 E_{1,k,k+1}f(x, y) &= \frac{x - \beta_k}{\alpha_{k+1} - \beta_k} \Delta_{1,k,k+1}f(x, y) + \frac{x - \alpha_{k+1}}{\beta_k - \alpha_{k+1}} \Delta_{2,k,k+1}f(x, y), \\
 E_{2,l,l+1}f(x, y) &= \frac{y - \delta_l}{\gamma_{l+1} - \delta_l} \Delta_{3,l,l+1}f(x, y) + \frac{y - \gamma_{l+1}}{\delta_l - \gamma_{l+1}} \Delta_{4,l,l+1}f(x, y), \\
 E_{1,2,k,l}f(x, y) &= [E_{1,k,k+1} + E_{2,l,l+1} - E_{1,k,k+1}E_{2,l,l+1}]f(x, y) = \\
 &= \frac{x - \beta_k}{\alpha_{k+1} - \beta_k} \Delta_{1,k,k+1}f(x, y) + \frac{x - \alpha_{k+1}}{\beta_k - \alpha_{k+1}} \Delta_{2,k,k+1}f(x, y) + \frac{y - \delta_l}{\gamma_{l+1} - \delta_l} \Delta_{3,l,l+1}f(x, y) + \\
 &\quad + \frac{y - \gamma_{l+1}}{\delta_l - \gamma_{l+1}} \Delta_{4,l,l+1}f(x, y) - \frac{x - \beta_k}{\alpha_{k+1} - \beta_k} \frac{y - \delta_l}{\gamma_{l+1} - \delta_l} \Delta_{1,k,k+1} \Delta_{3,l,l+1}f(x, y) - \\
 &\quad - \frac{x - \beta_k}{\alpha_{k+1} - \beta_k} \frac{y - \gamma_{l+1}}{\delta_l - \gamma_{l+1}} \Delta_{1,k,k+1} \Delta_{4,l,l+1}f(x, y) - \\
 &\quad - \frac{x - \alpha_{k+1}}{\beta_k - \alpha_{k+1}} \frac{y - \delta_l}{\gamma_{l+1} - \delta_l} \Delta_{2,k,k+1} \Delta_{3,l,l+1}f(x, y) - \\
 &\quad - \frac{x - \alpha_{k+1}}{\beta_k - \alpha_{k+1}} \frac{y - \gamma_{l+1}}{\delta_l - \gamma_{l+1}} \Delta_{2,k,k+1} \Delta_{4,l,l+1}f(x, y).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{y-\gamma_{l+1}}{\delta_l-\gamma_{l+1}} \Delta_{4,l,l+1} f(x, y) - \frac{x-\beta_k}{\alpha_{k+1}-\beta_k} \frac{y-\delta_l}{\gamma_{l+1}-\delta_l} \Delta_{1,k,k+1} \Delta_{3,l,l+1} f(x, y) - \\
& - \frac{x-\beta_k}{\alpha_{k+1}-\beta_k} \frac{y-\gamma_{l+1}}{\delta_l-\gamma_{l+1}} \Delta_{1,k,k+1} \Delta_{4,l,l+1} f(x, y) - \\
& - \frac{x-\alpha_{k+1}}{\beta_k-\alpha_{k+1}} \frac{y-\delta_l}{\gamma_{l+1}-\delta_l} \Delta_{2,k,k+1} \Delta_{3,l,l+1} f(x, y) - \\
& - \frac{x-\alpha_{k+1}}{\beta_k-\alpha_{k+1}} \frac{y-\gamma_{l+1}}{\delta_l-\gamma_{l+1}} \Delta_{2,k,k+1} \Delta_{4,l,l+1} f(x, y).
\end{aligned}$$

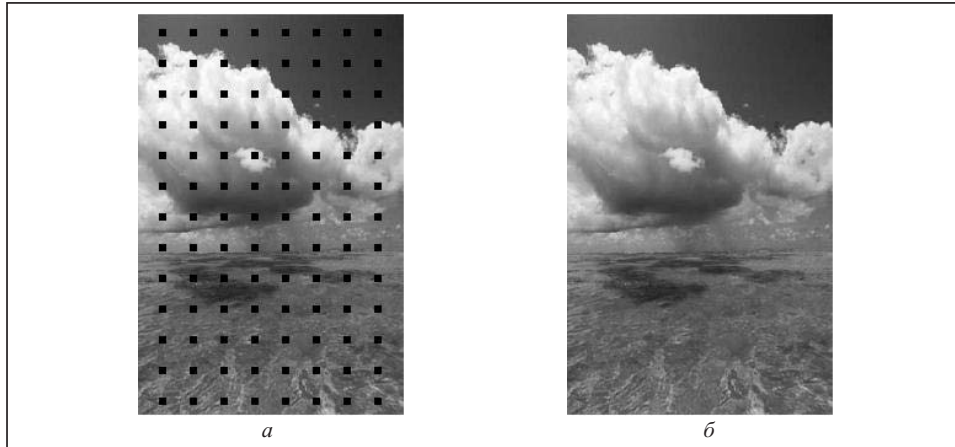


Рис. 1. Результати відновлення пошкодженого зображення методом інтерстріпації зі згладжуванням шуму вхідного сигналу: пошкоджене зображення (а); відновлене зображення (б)

На рис. 1 наведено приклад відновлення зображення поверхні оператором інтерстріпації зі згладжуванням шуму вхідного сигналу.

ІНТЕРСТРИПАЦІЯ НА СИСТЕМІ СМУГ ІЗ КРИВОЛІНІЙНИМИ МЕЖАМИ

Вважаємо, що зображення поверхні Σ є відомим лише на системі m ($m \geq 2$) вертикальних смуг вигляду

$$G_{1,k} = \{\alpha_k(y) \leq x \leq \beta_k(y), y \in [\gamma_1, \delta_{n+1}]\}, k = \overline{1, m},$$

та на системі n ($n \geq 2$) горизонтальних смуг вигляду

$$G_{2,l} = \{\gamma_l(x) \leq y \leq \delta_l(x), x \in [\alpha_1, \beta_{m+1}]\}, l = \overline{1, n},$$

тобто, межі відомих областей зображення — це деякі криві. У цьому разі оператори інтерстріпації мають такий вигляд [25]:

$$E_{1,k,k+1} f(x, y) = \frac{x-\beta_k(y)}{\alpha_{k+1}(y)-\beta_k(y)} f(\alpha_{k+1}(y), y) + \frac{x-\alpha_{k+1}(y)}{\beta_k(y)-\alpha_{k+1}(y)} f(\beta_k(y), y),$$

$$E_{2,l,l+1} f(x, y) = \frac{y-\delta_l(x)}{\gamma_{l+1}(x)-\delta_l(x)} f(x, \gamma_{l+1}(x)) + \frac{y-\gamma_{l+1}(x)}{\delta_l(x)-\gamma_{l+1}(x)} f(x, \delta_l(x)),$$

$$\begin{aligned}
E_{1,2,k,l} f(x, y) &= [E_{1,k,k+1} + E_{2,l,l+1} - E_{1,k,k+1} E_{2,l,l+1}] f(x, y) = \\
&= \frac{x-\beta_k(y)}{\alpha_{k+1}(y)-\beta_k(y)} f(\alpha_{k+1}(y), y) + \frac{x-\alpha_{k+1}(y)}{\beta_k(y)-\alpha_{k+1}(y)} f(\beta_k(y), y) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{y - \delta_l(x)}{\gamma_{l+1}(x) - \delta_l(x)} f(x, \gamma_{l+1}(x)) + \frac{y - \gamma_{l+1}(x)}{\delta_l(x) - \gamma_{l+1}(x)} f(x, \delta_l(x)) - \\
& - \frac{x - \beta_k(y)}{\alpha_{k+1}(y) - \beta_k(y)} \frac{y - \delta_l(x)}{\gamma_{l+1}(x) - \delta_l(x)} f(\alpha_{k+1}(y), \gamma_{l+1}(x)) - \\
& - \frac{x - \beta_k(y)}{\alpha_{k+1}(y) - \beta_k(y)} \frac{y - \gamma_{l+1}(x)}{\delta_l(x) - \gamma_{l+1}(x)} f(\alpha_{k+1}(y), \delta_l(x)) - \\
& - \frac{x - \alpha_{k+1}(y)}{\beta_k(y) - \alpha_{k+1}(y)} \frac{y - \delta_l(x)}{\gamma_{l+1}(x) - \delta_l(x)} f(\beta_k(y), \gamma_{l+1}(x)) - \\
& - \frac{x - \alpha_{k+1}(y)}{\beta_k(y) - \alpha_{k+1}(y)} \frac{y - \gamma_{l+1}(x)}{\delta_l(x) - \gamma_{l+1}(x)} f(\beta_k(y), \delta_l(x)).
\end{aligned}$$

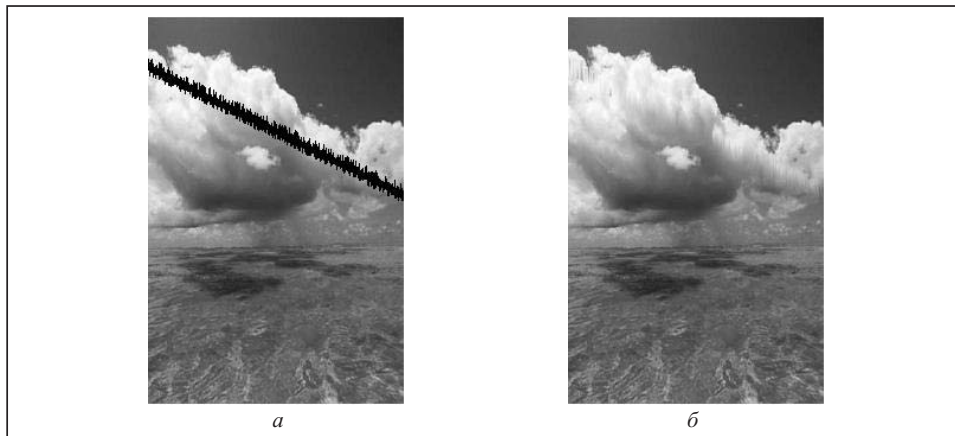


Рис. 2. Результати відновлення пошкодженого зображення методом інтерстріпації на системі смуг із криволінійними межами: пошкоджене зображення (а); відновлене зображення (б)

На рис. 2 наведено приклад відновлення зображення поверхні оператором інтерстріпації на системі смуг з криволінійними межами.

ІНТЕРСТРІПАЦІЯ НА СИСТЕМІ СМУГ, РОЗТАШОВАНИХ ПІД ДОВІЛЬНИМ КУТОМ

Розглянемо задачу відновлення пошкодженого зображення деякої поверхні Σ . Вважаємо, що зображення поверхні є відомим лише на системі розташованих під довільним кутом m ($m \geq 2$) смуг такого вигляду:

$$G_k^* = \{(x, y) : \omega_{1,k}(x, y) \leq x, y \leq \omega_{2,k}(x, y)\}, \quad k = \overline{1, m},$$

де $\omega_{1,k}(x, y) = \alpha_{1,k}x + \beta_{1,k}y - \gamma_{1,k}$ та $\omega_{2,k}(x, y) = \alpha_{2,k}x + \beta_{2,k}y - \gamma_{2,k}$ — прямі, які обмежують смугу. При цьому $\alpha_{1,k}^2 + \beta_{1,k}^2 = \alpha_{2,k}^2 + \beta_{2,k}^2 = 1, k = \overline{1, m}$.

Поверхня $\Sigma : z = f(x, y), f(x, y) \in C^{N,N}(\mathbb{R}^2)$, яку ми хочемо відновити, вважається відомою лише на зазначених смугах, тобто

$$f(x, y)|_{G_k} = f_k(x, y), \quad (x, y) \in G_k^*, \quad k = \overline{1, m}.$$

Нехай $A_{k,l}, (k, l) \in \mathfrak{R} = \{(k, l) : \Gamma_k \cap \Gamma_l = A_{k,l}; k \neq l; k, l = \overline{1, m}\}$ — точки перетину прямих Γ_k та Γ_l , які є межами k -ї та l -ї смуг відповідно.

Введемо оператор

$$\Theta_m f(x, y) = \begin{cases} f_k(x, y), & (x, y) \in G_k^*, \quad k = \overline{1, m}, \\ \Lambda_m f(x, y), & (x, y) \notin G_k^*, \quad k = \overline{1, m}, \end{cases}$$

де

$$\Lambda_m f(x, y) = \sum_{(k,l) \in \mathfrak{R}} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k,l}}^m \frac{\omega_i(x, y)}{\omega_i(\Lambda_{k,l})} \Lambda_{k,l} f(x, y).$$

Оператор $\Lambda_{k,l} f(x, y)$ — оператор інтерстріпації між k -ю та l -ю смугами [26]:

$$\Lambda_{k,l} f(x, y) = \frac{\rho_l(x, y)}{P(x, y)} f(x_k^*(x, y), y_k^*(x, y)) + \frac{\rho_k(x, y)}{P(x, y)} f(x_l^*(x, y), y_l^*(x, y)),$$

$$P(x, y) = \sum_{k=1}^m \rho_k(x, y); \rho_k(x, y) = \sqrt{(x_k^*(x, y) - x)^2 + (y_k^*(x, y) - y)^2},$$

$$x_k^*(x, y) = \left| \begin{array}{cc} \gamma_k & \beta_k \\ \alpha_k y - \beta_k x & \alpha_k \end{array} \right| / \Delta_k, \quad y_k^*(x, y) = \left| \begin{array}{cc} \alpha_k & \gamma_k \\ -\beta_k & \alpha_k y - \beta_k x \end{array} \right| / \Delta_k, \quad \Delta_k = \left| \begin{array}{cc} \alpha_k & \beta_k \\ -\beta_k & \alpha_k \end{array} \right|.$$

Фактично, $x_k^*(x, y)$ та $y_k^*(x, y)$ — це координати точки на k -й смузі з найменшою відстанню від точки (x, y) з невідомої області, $\rho_k(x, y)$ — відстань від точки (x, y) до k -ї прямої, $P(x, y)$ — сума відстаней до кожної із смуг.

Поверхня $z = \Theta_m f(x, y)$ є наближеною математичною моделлю освітленості поверхні Σ , яка на кожній із смуг G_k^* , $k = 1, m$, точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора $\Lambda_m f(x, y)$, при цьому функція $\Theta_m f(x, y) \in C^{N, N}(\mathbb{R}^2)$.

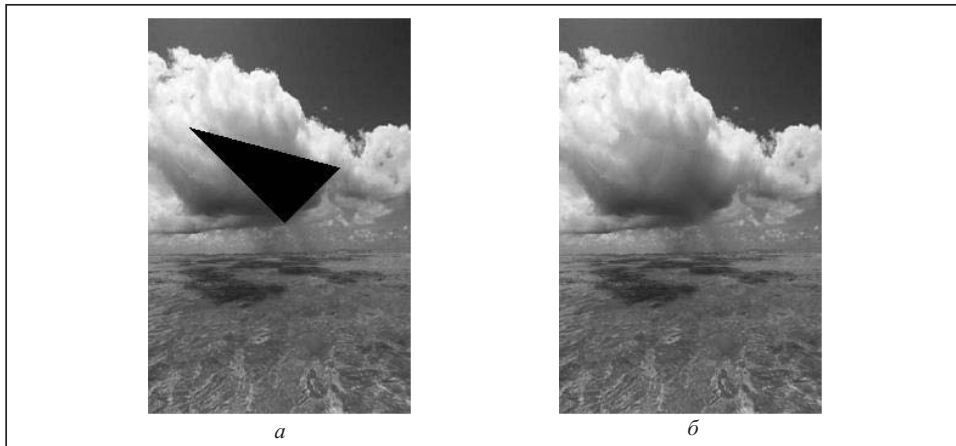


Рис. 3. Результати відновлення пошкодженого зображення методом інтерстріпації на системі смуг, розташованих під довільним кутом: пошкоджене зображення (а); відновлене зображення (б)

На рис. 3 наведено приклад відновлення зображення за допомогою оператора інтерстріпації на системі смуг, розташованих під довільним кутом.

ІНТЕРСТРІПАЦІЯ НА СИСТЕМІ РОЗТАШОВАНИХ ПІД ДОВІЛЬНИМ КУТОМ СМУГ З ВИКОРИСТАННЯМ ІНФОРМАЦІЇ ПРО РОЗРИВИ НА ЗОБРАЖЕННІ

Наведемо алгоритм відновлення зображення поверхні, інформація про яку є відомою лише на системі перетинних смуг, розташованих під довільним кутом, з використанням додаткової інформації про розриви на зображенні [27].

Крок 1. На кожній із смуг шукають розриви першого роду від функції, що описує поверхню. Для цього можна скористатися методами, описаними в [28, 29]. Результатом такої операції є набір сегментів S_i , $i = 1, n$, зображення на кожній із смуг.

Крок 2. Виконують наближення меж $\partial S_i = \omega_i(x, y) \leq 0$, $i = 1, n$, отриманих сегментів за допомогою поліномів k -го ($k \geq 2$) степеня з використанням точок розриву відповідного сегмента.

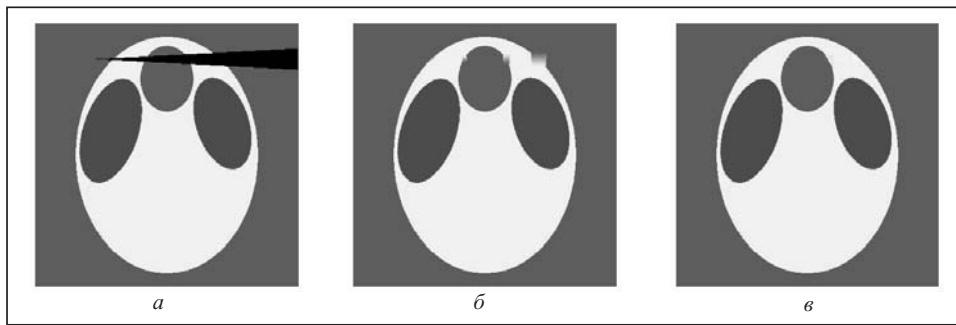


Рис. 4. Результат відновлення пошкодженого зображення операторами інтерстріпації на системі смуг, розташованих під довільним кутом, з врахуванням структури зображення: пошкоджене зображення (а); відновлене зображення без врахування структури зображення (б); відновлене зображення із врахуванням структури зображення (в)

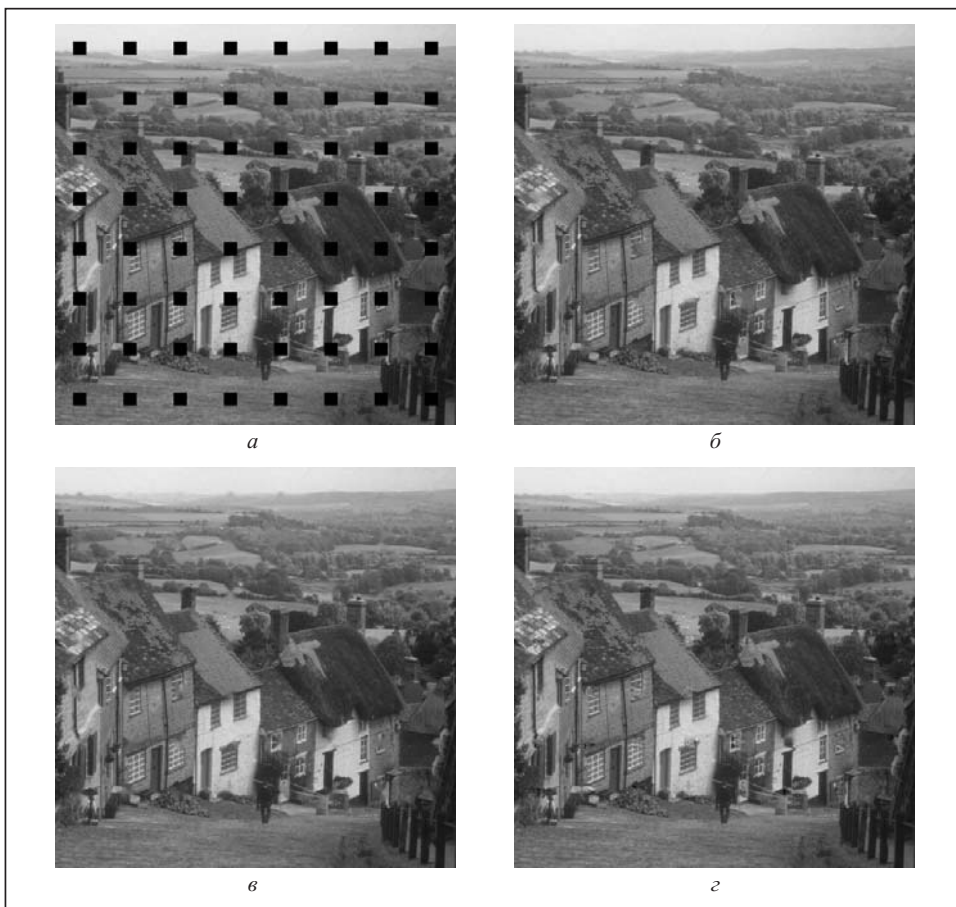


Рис. 5. Результати відновлення пошкодженого зображення Goldhill: пошкоджене зображення (а); відновлення за допомогою текстурного методу [10] (б); відновлення за допомогою FMM методу [22] (в); відновлення за допомогою оператора інтерстріпації (г)

Крок 3. Шукають продовження кожного сегмента на іншій смузі. Для цього знаходять точки перетину отриманих меж сегментів у невідомій області. При цьому, якщо такі точки перетину є, вважають, що обидві межі належать одному сегменту, і цей сегмент розміщується на кількох смугах одночасно. Якщо таких точок немає, вважають, що сегмент розміщується лише на одній смузі, і його межі не перетинають жодну іншу смугу. Цей процес автоматичного об'єднання сегментів можна замінити процесом штучного об'єднанням сегментів за допомогою їх задання в ручному режимі.

Крок 4. Застосовують оператор інтерстріпації $\Lambda_{p,r} f(x, y)$ для відновлення зображення поверхні для кожного з сегментів S_i , $i = \overline{1, n}$, який перетинає p -ту та r -ту смуги, $p, r = \overline{1, m}$.

Наведемо приклад відновлення зображення оператором інтерстріпації з використанням додаткової інформації про розриви на відомих ділянках зображення (рис. 4).

На рис. 5 наведено результат відновлення пошкодженого тестового зображення Goldhill з використанням сучасних методів відновлення зображень у порівнянні з операторами інтерстріпації.

ВИСНОВКИ

Метод інтерстріпації, описаний у [1–4], можна віднести до класу шаблонних методів.

У цій роботі запропоновано узагальнення методу інтерстріпації [23–27] з метою підвищення якості відновлення функції.

Розглянуті методи можна застосовувати для відновлення уражених ділянок пошкоджених зображень, яке є актуальною задачею у різноманітних прикладних галузях і потребує подальших досліджень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Литвин О.М., Матвеева С.Ю., Межуев В.І. Метамодель для математичного моделювання поверхні тіла на основі даних радіолокації. *Управляющие системы и машины*. 2010. № 3. С. 33–47.
2. Литвин О.М., Матвеева С.Ю. Метод відновлення поверхні між смугами за допомогою інформації про поверхню на взаємоперпендикулярних смугах. *Управляющие системы и машины*. 2011. № 1. С. 33–41.
3. Литвин О.М., Матвеева С.Ю. Інтерстріпація функцій двох змінних на системі перетених смуг. *Управляющие системы и машины*. 2013. № 2. С. 33–41.
4. Литвин О.Н., Матвеева С.Ю. Обработка аэрокосмических снимков с помощью интерстрипация функций двух переменных. *Проблемы управления и информатики*. 2013. № 2. С. 111–124.
5. Joshua J., Darsan G. Digital inpainting techniques — a survey. *International Journal of Latest Research in Engineering and Technology*. 2016. Vol. 2. P. 34–36.
6. Efros A., Leung T.K. Texture synthesis by non-parametric sampling. *Proc. IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'99)*. 1999. P. 1033–1038.
7. Efros A., Freeman W.T. Image quilting for texture synthesis and transfer. *Proc. ACM Conf. Comp. Graphics (SIGGRAPH'01)*. 2001. P. 341–346.
8. Heeger D.J., Bergen J.R. Pyramid-based texture analysis (synthesis). *Proc. ACM Conf. Comp. Graphics (SIGGRAPH'95)*. 1995. Vol. 29. P. 229–233.
9. Yamauchi H., Haber J., Seidel H. Image restoration using multiresolution texture synthesis and image inpainting. *Proc. Computer Graphics International Conference (CGI'03)*. 2003. P. 120–125.
10. Fang C.W., Lien J.J. Fast image replacement using multi-resolution approach. *Lecture Notes in Computer Science*. 2006. Vol. 3852. P. 509–520.
11. Criminisi A., Perez P., Toyama K. Region filling and object removal by exemplar-based inpainting. *IEEE Transactions on Image Processing*. 2004. Vol. 13, N 9. P. 1200–1212.
12. Drori I., Cohen-Or D., Yeshurun H. Fragment-based image completion. *Proc. ACM Conf. Comp. Graphics (SIGGRAPH'03)*. 2003. Vol. 22. P. 303–312.
13. Hays J., Efros A. Scene completion using millions of photographs. *ACM Transaction on Graphics — Proc. ACM SIGGRAPH'07*. 2007. Vol. 26, N 3. P. 87–94.
14. Bertalmio M., Sapiro G., Caselles V., Ballester C. Image inpainting. *Proc. of ACM Conf. Comp. Graphics (SIGGRAPH'00)*. 2000. P. 417–424.
15. Chan T., Shen J. Mathematical models for local deterministic inpaintings. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2002. Vol. 62, N 3. P. 1019–1043.
16. Chan T., Shen J. Non-texture inpainting by curvature-driven diffusions (CDD). *Visual Comm. Image Rep.* 2001. Vol. 12. P. 436–449.
17. Tschumperl D., Deriche R. Vector-valued image regularization with PDE's. *Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 2005. Vol. 27, N 4. P. 506–517.
18. Bertalmio M., Vese L., Sapiro G., Osher S. Simultaneous structure and texture image inpainting. *Transactions on Image Processing*. 2003. Vol. 12, N 8. P. 882–889.
19. Starck J.-L., Elad M., Donoho D.L. Image decomposition via the combination of sparse representation and a variational approach. *Transaction on Image Processing*. 2005. Vol. 14, N 10. P. 1570–1582.

20. Elad M., Starck J.-L., Donoho D., Querre P. Simultaneous cartoon and texture image inpainting using morphological component analysis (MCA). *Applied and Computational Harmonic Analysis*. 2005. Vol. 19, N 3. P. 340–358.
21. Sun J., Yuan L., Jia J., Shum H. Image completion with structure propagation. *Proc. ACM Conf. Comp. Graphics (SIGGRAPH'05)*. 2005. Vol. 24. P. 861–868.
22. Telea A. An image in-painting technique based on the fast marching method. *Journal of Graphics Tools*. 2004. Vol. 9. P. 23–34.
23. Литвин О.М., Литвин О.О., Лісний Г.Д., Славик О.В. Новий метод відновлення зображень в зонах відсутності попиксельної інформації. *Управляючі системи і машини*. 2017. № 1. С. 46–58.
24. Литвин О.М., Литвин О.О., Лісний Г.Д., Славик О.В. Відновлення зображень в зонах відсутності попиксельної інформації з використанням інтерстріпації функцій. *Біоніка інтелекту*. 2016. № 2. С. 88–93.
25. Литвин О.М., Литвин О.О., Славик О.В. Наближення функцій двох змінних за допомогою їх слідів на системі неперервних смуг з криволінійними границями. *Обчислювальні методи і системи перетворення інформації: Тези доповідей IV науково-технічної конференції* (Львів, 28–30 вересня 2016). Львів, 2016. С. 21–24.
26. Литвин О.М., Славик О.В. Наближення функцій двох змінних за допомогою їх слідів на системі перетинних смуг, розташованих під довільним кутом. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2016. № 2. С. 175–182.
27. Литвин О.М., Славик О.В. Застосування узагальненої інтерстріпації функцій двох змінних для відновлення зображення поверхні. *Інформатика та системні науки: Матеріали VIII Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю* (Полтава, 16–18 березня 2017). Полтава, 2017. С. 180–182.
28. Литвин О.М., Славик О.В. Дослідження ліній розриву функцій двох змінних або їх похідних деякого порядку. *Проблеми машинобудування*. 2016. Т. 19, № 1. С. 37–43.
29. Shrivakshan G., Chandrasekar C. A comparison of various edge detection techniques used in image processing. *International Journal of Computer Science Issues*. 2012. Vol. 9. P. 269–276.

Надійшла до редакції 29.06.2017

О.Н. Литвин, О.О. Литвин, А.В. Славик
ОБОБЩЕННАЯ ИНТЕРСТРИПАЦИЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Аннотация. Представлен обзор существующих методов восстановления поврежденных изображений. Приведены операторы интерстрипации для восстановления изображений в случае, если информация известна лишь на системе полос, параллельных осям координат, с криволинейными границами, расположенных под произвольным углом, с учетом шума на известных полосах. Проведен эксперимент для сравнения работы методов с известными аналогами.

Ключевые слова: изображение, двумерный сигнал, восстановление изображений, интерстрипация.

О.М. Lytvyn, O.O. Lytvyn, O.V. Slavik
A GENERALIZED INTERSTRIPATION OF FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

Abstract. An overview of existing inpainting methods for recovering damaged images is given. The interstripation operators for image restoration are given for the case when information is known only on a system of strips that are parallel to the coordinate axes, have curvilinear boundaries, are arranged at arbitrary angles, and take into account noise in known strips. An experiment was conducted to compare the operation of the methods with world analogues.

Keywords: image, two-dimensional signal, inpainting, interstripation.

Литвин Олег Миколайович,
 доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри Української інженерно-педагогічної академії, Харків, e-mail: academ_mail@ukr.net.

Литвин Олег Олегович,
 доктор фіз.-мат. наук, доцент кафедри Української інженерно-педагогічної академії, Харків, e-mail: olegolitin55@gmail.com.

Славик Олексій Валерійович,
 аспірант Української інженерно-педагогічної академії, Харків, e-mail: aleksey.slavik92@gmail.com.