В.Г. ПИСАРЕНКО

УДК 517.946+517.948+612.821.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕЙРОНОВ С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Аннотация. Предложена и проанализирована новая модель функционирования живой нейросети, которая явно учитывает запаздывающее во времени взаимодействие группы взаимосвязанных нейронов. Показано, что имитационную модель живой нейросети можно построить, например, в виде цепочек достаточно большого числа связанных между собой однотипных триад нейронов.

Ключевые слова: нейрофизиология, математическая модель, нейросеть, функционирование живой нейросети, механизм запоминания информации, учет ограниченности скорости передачи информации между нейронами.

В работах [1, 2] предложена новая модель функционирования живой нейросети, которая явно учитывает хорошо известное нейрофизиологам запаздывание во времени взаимодействия соседних нейронов. При этом данное запаздывание обусловлено конечностью скорости распространения информационных сигналов в живой нейросети. Так, имеются данные из экспериментальной нейрофизиологии о том, что скорость распространения нервного импульса у человека по толстым миелиновым волокнам (диаметром от 10 до 20 микрон) достигает 70–120 м/с, а по самым тонким немиелизированным волокнам — менее 2 м/с [3]. Передача информационных сигналов между соседними нейронами в процессе запоминания информации происходит за три этапа. А именно, вначале от аксона первого нейрона через зону его синапса на один из дендритов соседнего нейрона информационный нейроимпульс проникает в межнейронную среду в поцессе диффузии молекул глутамата, после чего реализуется специфический процесс связывания глутамата с глутаматергическими рецепторами на дендритных шипиках второго нейрона, а затем эта связь закрепляется с участием специфических генов [1, 2, 4, 5].

С учетом этих механизмов в данной работе для моделирования функционирования живой нейросети из N нейронов детализируется применение системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (ДУЗА), предложенной в [1]:

$$\frac{d^2 x_i(t)}{dt^2} + h_i \frac{dx_i(t)}{dt} + \omega_i^2 x_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N} g_{ij} x_j(t - \Delta_{ij}), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

где ω_i и h_i — соответственно «собственная» частота возбуждения и интенсивность диссипации активности i-го нейрона, $0 < \Delta_{ij}$ — величина запаздывания передачи взаимодействия от j-го к i-му нейрону.

Методами теории ДУЗА [6, 7] исследуется решение начальной задачи для (1) с начальными условиями на начальном интервале в следующем виде:

$$x_i(t) = q_i(t); \ \frac{dx_i(t)}{dt} = b_i(t) \ \text{для} \ t \in [0, \max_{i,j} \Delta_{ij}], \tag{2}$$

где $q_i(t)$, $b_i(t)$ — заданные начальные функции, $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$.

В работе [1] для $N = 2$ получено семейство численных решений системы (1) с начальными условиями (2) с применением преобразования Лапласа, что приводит согласно известным теоремам [6, 7] к представлению искомого решения начальной задачи (1), (2) в виде следующего разложения (здесь, как обычно, $i^2 = -1$):

$$x_j(t) = \sum_{k=1}^{Q} A_{jk} \exp[\sigma_k + i\tau_k], \ j = 1, \ldots, N, \tag{3}$$

где параметры σ_k и τ_k, $k = 1, 2$, — суть решения некоторого алгебраического уравнения (которое называется характеристическим или секулярным для исходной системы (1)); Q — достаточно большое целое число, выбор которого зависит от необходимой точности аппроксимации конечным рядом для искомого численного решения $x_j(t)$.

Далее рассматривается система уравнений (1) для случая трех взаимодействующих нейронов ($N = 3$), которая принимает вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + h_1 \frac{dx_1(t)}{dt} + \omega_1^2 x_1(t) = g_{12} x_2(t - \Delta_{12}) + g_{13} x_3(t - \Delta_{13}), \\
&\frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + h_2 \frac{dx_2(t)}{dt} + \omega_2^2 x_2(t) = g_{21} x_1(t - \Delta_{21}) + g_{23} x_3(t - \Delta_{23}), \\
&\frac{d^2 x_3(t)}{dt^2} + h_3 \frac{dx_3(t)}{dt} + \omega_3^2 x_3(t) = g_{31} x_1(t - \Delta_{31}) + g_{32} x_2(t - \Delta_{32}).
\end{aligned} \tag{4}$$

Нетрудно убедиться, что подстановка (3) для системы (4) дает следующее характеристическое уравнение:

$$W_3(s) \equiv \begin{vmatrix} (s^2 + sh_1 + \omega_1^2); & -g_{12} \exp(-s\Delta_{12}); & -g_{13} \exp(-s\Delta_{13}) \\ -g_{21} \exp(-s\Delta_{21}); & (s^2 + sh_2 + \omega_2^2); & -g_{23} \exp(-s\Delta_{23}) \\ -g_{31} \exp(-s\Delta_{31}); & -g_{32} \exp(-s\Delta_{32}); & (s^2 + sh_3 + \omega_3^2) \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

где искомый параметр s является в общем случае комплексным

$$s = \sigma + i\tau. \tag{6}$$

Как видно из (5) и (6), значения параметров σ и τ вычисляются как соответствующие решения следующей системы двух нелинейных уравнений относительно этих параметров:

$$\operatorname{Re} W_3(s) = 0, \tag{7а}$$

$$\operatorname{Im} W_3(s) = 0, \tag{7б}$$

где $\operatorname{Re} W_3(s)$ и $\operatorname{Im} W_3(s)$ являются соответственно вещественной и мнимой частями определителя (5)

$$W_3(s) = \operatorname{Re} W_3(s) + i \operatorname{Im} W_3(s),$$

составленного для исходной системы ДУЗА-уравнений (1), линейных относительно вектор-функции $x_j(t)$. При этом значения пары параметров: σ и τ, вычисляются как соответствующие решения системы нелинейных уравнений (7а), (7б) относительно искомых параметров σ — декремента затухания во времени данной моды возбуждения и τ — частоты возбуждения этой моды нейроимпульса.

Результат можно сформулировать в виде следующей леммы (по аналогии с леммой 1 из [1], где рассматривалось взаимодействие двух нейронов).

Лемма 1. Для модели трех взаимодействующих нейронов ($N = 3$) искомые значения дискретного множества комплексных корней $\{\sigma_j + i\tau_j\}$ получаются как решения системы двух алгебраических уравнений: (7а) и (7б), которые являются соответственно вещественной и мнимой частями определителя (5) исходной системы линейных ДУЗА-уравнений (1). При этом используется подстановка $x_j(t) = A_j e^{st}$, $j = 1, 2, 3$, в левую часть исходной системы уравнений (1), после чего из требования равенства нулю соответствующего определителя W_3 системы линейных однородных уравнений относительно констант A_1, A_2, A_3 вычисляются все решения полученной системы двух уравнений: (7а), (7б), относительно искомых пар чисел (σ, τ).

Приведем примеры численных решений системы уравнений (7а) и (7б).

Пример 1. Как следует из (5), полученные с помощью леммы 1 два уравнения: (7а) и (7б), принимают вид алгебраических уравнений шестого порядка отосительно пары переменных: σ и τ, с коэффициентами, являющимися трансцендентными функциями относительно параметров данной модели g_{jk}, Δ_{jk}, h_j, ω_j.

Поскольку нецелесообразно записывать в развернутом виде соответствующие достаточно громоздкие уравнения (7а) и (7б), приведем некоторые важные результаты расчетов решений этих уравнений для двух частных случав: $\tau = 0.100$ и $\tau = 0.095$, для значений «параметра затухання» $\sigma \in (-0.00001; 0.00001)$ в форме следующих двух утверждений.

Пример 2. Введем понятие множества вещественных чисел в виде 12-мерного пространства $M_{g\Delta}$ шести вещественных параметров: $g_{12}, g_{23}, g_{31}, g_{21}, g_{32}, g_{13}$, и шести неотрицательных вещественных параметров: Δ_{12}, Δ_{23}, Δ_{31}, Δ_{21}, Δ_{32}, Δ_{13}.

Рассмотрим пример для системы (4), где $h_1 = h_2 = h_3 = 0.100$ и $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_3^2 = 0.100$. Тогда для случая $\tau = 0.100$ справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Из результатов вычислений видно, что обширное множество M_1 численных решений, полученных путем независимых вариаций шести координат: Δ_{12}, Δ_{23}, Δ_{31}, Δ_{21}, Δ_{32}, Δ_{13}, в рамках ограничений

$$(\Delta_{12} + \Delta_{23} + \Delta_{31}) \in (0, 2\pi), \tag{8а}$$

$$(\Delta_{21} + \Delta_{32} + \Delta_{13}) \in (0, 2\pi) \tag{8б}$$

и с дополнительными ограничениями

$$g_{12} g_{23} g_{31} \in (-0.0001, 0.0001), \tag{9а}$$

$$g_{21} g_{32} g_{13} \in (-0.0001, 0.0001), \tag{9б}$$

формирует (по крайней мере счетное) множество комбинаций в 12-мерном пространстве $M_{g\Delta}$ параметров Δ_{12}, Δ_{23}, Δ_{31}, Δ_{21}, Δ_{32}, Δ_{13}, g_{12}, g_{23}, g_{31}, g_{21}, g_{32}, g_{13}. При этом для элементов множества всех удовлетворяющих ограничениям (8а), (8б) координат 12-мерного пространства $M_{g\Delta}$, упомянутых в примере 2, можно построить новое множество (по крайней мере счетное) комбинаций цепочек триад нейронов, связанных между собой и удовлетворяющих этим ограничениям. Последние обеспечивают реализацию частоты осцилляции $\tau = 0.100$ для каждой такой триады нейронов и «параметра затуханния» $\sigma \in (-0.00001; 0.00001)$. В результате получаем $\operatorname{Re} W_3 = -0.012501$ и $\operatorname{Im} W_3 = 0.000820$.

Для альтернативного случая $\tau = 0.095$ справедливо аналогичное утверждению 1 следующее утверждение.

Утверждение 2. Из результатов вычислений видно, что обширное множество M_2 численных решений, полученных путем независимых вариаций шести координат: $\Delta_{12}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{21}, \Delta_{32}, \Delta_{13}$, в рамках ограничений (8а), (8б), (9а), (9б) формирует (по крайней мере счетное) множество комбинаций в 12-мерном пространстве $M_{g\Delta}$ координат $\Delta_{12}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{21}, \Delta_{32}, \Delta_{13}, g_{12}, g_{23}, g_{31}, g_{21}, g_{32}, g_{13}$. При этом для элементов множества всех удовлетворяющих ограничениям (8а), (8б) координат 12-мерного пространства $M_{g\Delta}$, упомянутых в примере 2, можно построить новое множество (по крайней мере счетное) комбинаций цепочек триад нейронов, связанных между собой и удовлетворяющих этим ограничениям. Последние обеспечивают реализацию частоты осцилляции $\tau = 0.095$ для каждой такой триады нейронов и «параметра затухання» $\sigma \in (-0.00001; 0.00001)$. В результате получаем $\operatorname{Re} W_3 = 0.008759$ и $\operatorname{Im} W_3 = 0.003799$.

Из леммы 1 и утверждений 1, 2 следует следующее утверждение.

Утверждение 3 (концепция автора настоящей статьи «кибернетической модели» базовых функций работы живого мозга). Рассмотренные в данной работе два примера количественной модели: (1), (2), для описания динамики распространения информационных пакетов возбуждения в ЦНС на некоторой информационно важной для организма частоте τ с соответствующим «параметром затухания» σ информационного сигнала для системы нейронов, связанных между собой аксонами и дендритами, показывают, что предложенные имитационные модели функционирующих нейросетей можно построить, например, в виде цепочек достаточно большого числа связанных между собой однотипных триад нейронов. При этом каждое трехнейронное звено подобной модельной цепочки можно сформировать, например, одним из двух способов, аналогичных описанным в утверждениях 1, 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Писаренко В.Г. Новая модель функционирования живой нейросети, учитывающая запаздывание взаимодействия нейронов. *Кибернетика и системный анализ.* 2016. Т. 52, № 6. С.181–192.
2. Писаренко В.Г., Пакин Ю.В., Андрияшек Ю.И. О возможности математического моделирования памяти живой нейросистемы системой дифференциальных уравнений с запаздыванием взаимодействия нейронов как вариант реализации концепции развивающихся систем по В.М. Глушкову. *Сучасна інформатика: проблеми, досягнення та перспективи розвитку*: *Тези доповідей Міжнар. наук.конф., присвяченної 90-річчю від дня народження академіка В.М. Глушкова* (12–13 вересня 2013 р., Київ). Київ, 2013. С. 108–110.
3. URL: galactic.org.ua/clovo/f-n2.htm.
4. Аршавский Ю.И. Нейронные механизмы памяти: синаптическая и геномная гипотезы. *Журнал высшей нервной деятельности*. 2011. Т. 61, № 6. С. 660–674.
5. Писаренко В.Г., Пакин Ю.В. Современные нейронауки и наркология. Киев: Санарис, 2014. 147 с.
6. Мышкис А.Д. Диффернциально-разностные уравнения. Москва: Наука, 1989. 270 с.
7. Писаренко В.Г. Специальные периодические решения и асимптотические свойства одного класса квазилинейных дифференциальных уравнений с западыванием аргумента. *Математическая физика.* 1973. Вып. 13. С. 3–11.

Надійшла до редакції 01.11.2017

В.Г. Писаренко

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ВЗАЄМОДІЇ НЕЙРОНІВ З УРАХУВАННЯМ ЗАПІЗНЮВАННЯ ЇХНЬОЇ ВЗАЄМОДІЇ

Анотація. Запропоновано і проаналізовано нову модель функціонування живої нейромережі, в якій явно враховано наявність запізнілої взаємодії групи взаємозв'язаних нейронів. Показано, що імітаційну модель живої нейромережі можна побудувати, наприклад, у вигляді ланцюжків великої кількості зв'язаних між собою однотипних тріад нейронів.

Ключові слова: нейрофізіологія, математична модель, нейромережа, функціонування живої нейромережі, механізм запам'ятовування інформації, врахування обмеженності швидкості передавання інформації між нейронами.

V.G. Pysarenko

SIMULATION OF THE PROBLEM OF INTERACTION OF NEURONS TAKING INTO ACCOUNT THE LAGGING OF THEIR INTERACTION

Abstract. A new model of functioning a live neural network is proposed and analyzed. This model explicitly takes into account the lagging interaction of a group of interconnected neurons. It is shown that a simulation model of a live neural network can be constructed, for example, in the form of chains of a sufficiently large number of interconnected triads of neurons.

Keywords: neurophysiology, mathematical model, neuronet, functioning of a live neural network, information storage mechanism, allowance for a limited information transfer rate between neurons.

Писаренко Валерий Георгиевич,
доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий отделом Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: jvpisarenko@gmail.com.