УДК 519.8

Ф.А. ШАРИФОВ

НАХОЖДЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО РАЗРЕЗА ГРИДИ АЛГОРИТМОМ

Аннотация. Рассмотрена задача нахождения максимального разреза на графах. Приводится новая модель задачи в терминах базы полиматроида. Показано, что решение задачи можно найти гриди алгоритмом после определения оптимального линейного упорядочения вершин.

Ключевые слова: максимальный разрез, двудольный подграф, линейное упорядочение.

ВВЕДЕНИЕ

В задаче о максимальном разрезе (ЗМР) требуется найти разбиение множества вершин заданного графа на два непересекающихся подмножества с максимальным числом ребер между вершинами из разных подмножеств, что и является постановку задачи определения максимального двудольного подграфа. Эта проблема имеет ряд приложений в СБИС и статистической физике [1], и известно, что она NP-полная. Для формулировки ЗМР предложены такие модели, как задачи линейного целочисленного программирования с булевыми переменными и как задачи квадратичного программирования [2, 3], в которых переменные определяют меру присоединения вершин к одной или другой доли двудольного графа. Поэтому в процессе решения ЗМР в основном используются методы линейного и нелинейного программирования, а информация, связанная со структурой данного графа, почти не учитывается. В отличие от этих подходов полиномиальные алгоритмы для решения ЗМР на планарных графах [7, 8] были предложены именно на базе основных свойств этих графов. В [3, 4] ЗМР также формулируется как задача полуопределенного программирования. ЗМР в этом случае интересна тем, что алгоритм [4] гарантирует 0,878 оптимальности найденного решения. Однако, несмотря на этот лучший результат, в [6] при анализе временной сложности стандартных тестовых задач на случайно генерированных графах было показано, что использование методов полуопределенного программирования [5] для решения ЗМР на графах с числом вершин более 1000 сопряжено с большими трудностями, поскольку временная сложность их очень быстро возрастает.

Известно, что задачи о коммивояжере, задачи о раскраске вершин графа с наименьшим количеством цветов и ЗМР являются близкими проблемами. Так, если частный случай любой из этих проблем допускает полиномиальный алгоритм решения, то можно предполагать, что соответствующие частные случаи остальных задач также полиноминально разрешимы. В данной статье ЗМР формулируется как частный случай задачи нахождения максимума выпуклой функции на специальном многограннике, а если более точно, то ЗМР сводится к нахождению специальной базы полиматроида, для решения которой предложен простой комбинаторный алгоритм, по сути идентичный полиномиальному алгоритму решения ЗМР на планарных графах [7]. Иными словами, цель статьи — показать, что для каждого конкретного графа G решение ЗМР может быть определено сколь угодно точно гриди (жадным) алгоритмом после установления подходящих линейных порядков для просмотра вершин. Это означает, что точность решения ЗМР может быть улучшена путем просмотра нескольких вариантов следований вершин в их линейном упорядочении с учетом особенностей топологии графа G, что позволяет применять гриди алгоритм для нахождения почти оптимального решения ЗМР на произвольном графе.

© Ф.А. Шарифов, 2018

Из результатов анализа, на основании которых разработан этот алгоритм, также становится очевидным необходимость решения специальной задачи определения линейного упорядочения вершин графа при распространении полиномиальных алгоритмов решения частных случаев ЗМР на общий случай.

НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ТЕРМИНОЛОГИЯ

Пусть задан простой неориентированный связный граф $G=(V,E)$ с множеством вершин V и множеством ребер E. Для произвольного подмножества $S\subseteq V$ множество ребер с двумя или с одной конечной вершиной в S обозначим $\theta(S)$, а множество ребер с конечными вершинами в S обозначим $\kappa(S)$. Пусть $\varphi(S)=\theta(S)|$ и $\omega(S)=|\kappa(S)|$ — две функции, определенные на подмножествах множества V. Известно, что $\varphi(S)$ — субмодулярная функция, т.е.

$$\varphi(S)+\varphi(T)\ge\varphi(S\cup T)+\varphi(S\cap T),$$

и $\omega(S)$ — супермодулярная функция, т.е.

$$\omega(S)+\omega(T)\le\omega(S\cup T)+\omega(S\cap T),$$

для произвольных подмножеств S и T множества V. Поэтому $\varphi(S)-\omega(S)$ — также субмодулярная функция, определенная на подмножествах S множества V. В дальнейшем для произвольного вектора $u\in R^V$ и подмножества $S\subseteq V$ будем использовать обозначения $u(S)=\sum_{v\in S}u_v$.

Рассмотрим многогранник

$$EP(\varphi-\omega)=\{z\in R^V;\ z(S)\le\varphi(S)-\omega(S),\ S\subseteq V\},$$

который называется расширенным полиматроидом (extended polymatroid), определенным функцией $\varphi(S)-\omega(S)$.

Отметим, что $\varphi(S)$, $\omega(S)$ — монотонные функции и $\varphi(V)=\omega(V)=|E|$. Поэтому любой вектор $z\in EP(\varphi-\omega)$ называется базой расширенного полиматроида, если $z(V)=0$; здесь $z(V)$ обозначает $\sum_{v\in V}z_v$. Кроме расширенного полиматроида $EP(\varphi-\omega)$ рассмотрим следующие многогранники:

$$P(\varphi)=\{x\in R^V;x(S)\le\varphi(S),S\subseteq V\},$$

$$Q(\omega)=\{y\in R^V;y(S)\ge\omega(S),S\subseteq V\},$$

которые называются полиматроидом и суперполиматроидом соответственно. Векторы $x\in P(\varphi)$ и $y\in Q(\omega)$ являются базами для $P(\varphi)$ и $Q(\omega)$, если $x(V)=|E|$ и $y(V)=|E|$.

Отметим, что в зависимости от фиксированного линейного упорядочения L вершин графа $G=(V,E)$ гриди алгоритм определяет различные базы для $P(\varphi)$ и для $Q(\omega)$. В дальнейшем для краткости будем говорить, что линейное упорядочение L вершин генерирует базы $x\in P(\varphi)$ и $y\in Q(\omega)$.

МАКСИМАЛЬНЫЙ РАЗРЕЗ И СПЕЦИАЛЬНАЯ БАЗА

Вначале кратко изложим идею алгоритма решения ЗМР на простом примере путем сведения ЗМР на графе Петерсена (рис. 1) к нахождению специальной базы для $EP(\varphi-\omega)$. Пусть $L=\{v_1,\ldots,v_n\}$ — линейное упорядочение вершин графа $G=(V,E)$. Каждому линейному упорядочению L вершин графа G можно сопоставить базу $z(L)$ расширенного полиматроида $EP(\varphi-\omega)$. Так как $\varphi-\omega$ — немонотонная функция и $\varphi(V)=\omega(V)=|E|$, то $z(V)=0$. Значит если $z_v>0$ для некоторых $v\in V$, то существуют другие вершины $w\in V$, для которых $z_w<0$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$Cut\,(L_*) = \max\{Cut\,(L);\ z(L) \in EP(\varphi - \omega)\},$$

где $Cut(L) = \sum\limits_{v \in V} |\, z_v\,(L)|$. Пусть вершины этого графа, номера которых указаны внутри кругов (см. рис. 1), расположены в линейном упорядочении L_0 таким образом: $\{1, 7, 8, 4, 2, 3, 6, 9, 5, 10\}$. Относительно L_0 гриди алгоритм определяет базу $z(L_0) = \{3, 3, 3, 3, -1, -1, -1, -3, -3, -3\}$ расширенного полиматроида $EP(\varphi - \omega)$, для которой $Cut(L_0) = 24$. При этом число ребер, после удаления которых полученный граф становится двудольным, равно

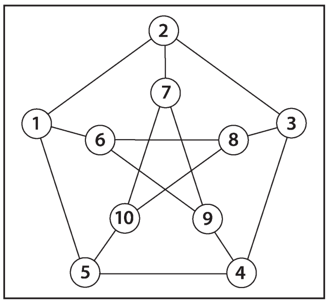

Рис. 1. Граф Петерсена

$$|\,E\,| - Cut(L_0)\,/\,2 = (15 - 12) = 3.$$

Действительно, после удаления ребер (2,3), (6,9) и (5,10) получаем двудольный подграф с числом ребер $12 = Cut(L_0)\,/\,2$ и множеством вершин $U = \{1, 7, 8, 4\}$ и $S = V \setminus U = \{2, 3, 6, 9, 5, 10\}$ для каждой доли. Нетрудно убедиться, что $Cut(L_*) = Cut(L_0) \geq Cut(L)$ для всех линейных упорядочений L вершин графа Петерсена. Таким образом, максимальный разрез отделяет подмножество U от подмножества S. Далее более детально изложим эту идею для нахождения максимального разреза на произвольном графе с единичными весами ребер. Для этого рассмотрим необходимые свойства баз для $P(\varphi)$, $Q(\omega)$ и $EP(\varphi - \omega)$.

Линейное упорядочение L_* вершин назовем оптимальным, если $Cut(L_*) \geq Cut(L)$ для всех линейных упорядочений L.

Лемма 1. Любую базу z расширенного полиматроида $EP(\varphi - \omega)$ можно представить в виде $z = x - y$, где $x \in P(\varphi)$ и $y \in Q(\omega)$ — базы $P(\varphi)$ и $Q(\omega)$.

Доказательство. Пусть базы $x \in P(\varphi)$ и $y \in Q(\omega)$ являются крайними точками многогранников $P(\varphi)$ и $Q(\omega)$. Из их определения легко увидеть, что вектор $z = x - y$ принадлежит $EP(\varphi - \omega)$ и $z(V) = 0$, т.е. z является базой расширенного полиматроида $EP(\varphi - \omega)$.

Пусть теперь вектор z является базой $EP(\varphi - \omega)$. Рассмотрим случай, когда z — крайняя точка расширенного полиматроида $EP(\varphi - \omega)$. Покажем, что существуют такие базы x и y, которые являются крайними точками многогранников $P(\varphi)$ и $Q(\omega)$, при этом $z = x - y$.

Из определения $\theta(S)$ и $\kappa(S)$ следует, что подмножество $\delta(S) = \theta(S) \setminus \kappa(S)$ является разрезом, определенным подмножеством S множества V, т.е. $\delta(S)$ содержит ребра, имеющие одну конечную вершину в S, а другую — в $V \setminus S$. Поэтому $\varphi(S) - \omega(S) = |\,\delta(S)\,|$. Допустим, что базы $x \in P(\varphi)$ и $y \in Q(\omega)$ генерированы линейным упорядочением L вершин. При вычислении компонентов x_v и y_v баз x и y гриди алгоритмом получаем, что $|\,\delta(S)| = x(S) - y(S)$ для подмножества S, в котором сохраняется [9] установленный порядок вершин в L, в противном случае $x(S) - y(S) \leq |\,\delta(S)|$. Пусть $z_v = x_v - y_v$ для всех $v \in V$. Тогда $z(S) = |\,\delta(S)|$ для подмножества S, в котором сохраняется установленный в L порядок вершин, и $z(S) \leq |\,\delta(S)|$ в противном случае. Такой вектор z совпадает с базой для $EP(\varphi - \omega)$, генерированной линейным упорядочением L.

Из данного доказательства также следует справедливость леммы 1 в случае, когда базы z, x и y являются выпуклыми оболочками баз для $EP(\varphi - \omega)$, $P(\varphi)$ и $Q(\omega)$ соответственно.

Для того чтобы свести задачу нахождения максимального разреза к $\max Cut(L)$, вначале рассмотрим частный случай ЗМР на двудольном графе

$GB = (U, S, E_b)$ с множествами вершин U, S и ребер E_b. Допустим, что функции φ и ω определены аналогичным образом на подмножествах множества $U \cup S$. Пусть $L_b = (U, S)$ — линейное упорядочение вершины графа GB. Обозначим Bd_v степень вершины двудольного графа $GB = (U, S, E_b)$. Относительно L_b гриди алгоритм определяет базу x, где $x_u = Bd_u$ для всех $u \in U$ и $x_v = 0$ для всех $v \in S$ полиматроида $P(\varphi)$. Аналогичным образом гриди алгоритм определяет базу y, где $y_v = 0$ для всех $v \in U$ и $y_v = Bd_v$ для всех $v \in S$ суперполиматроида $Q(\omega)$. Согласно лемме 1 получаем

$$|z_u(L_b)| = |x_u - y_u| = Bd_u \text{ для всех } u \in U,$$
$$|z_s(L_b)| = |x_s - y_s| = Bd_s \text{ для всех } s \in S.$$

Поэтому

$$Cut(L_b) = \sum_{u \in U} Bd_u + \sum_{s \in S} Bd_s = 2|E_b|.$$

Это означает, что $Cut(L)$ достигает своего максимального значения относительно линейного упорядочения L_b вершин графа GB. Аналогичным образом можно показать, что $L = (S, U)$ — также оптимальное линейное упорядочение вершин графа GB.

Рассмотрим ЗМР на примере произвольного простого графа $G = (V, E)$ с единичными весами ребер. Вначале отметим следующее простое свойство определения баз $P(\varphi)$ и $Q(\omega)$ гриди алгоритмом.

Свойство 1. Пусть L — некоторое линейное упорядочение вершин графа $G = (V, E)$. Если в L вершина v предшествует вершине w, то ребро (v, w) графа $G = (V, E)$ ориентируется как дуга vw. Пусть также $G(L) = (V, A)$ обозначает орграф, полученный после ориентации ребер графа $G = (V, E)$. Легко проверить, что $x_v = |\delta_+(v)|$ и $y_v = |\delta_-(v)|$ для всех вершин $v \in V$; здесь $\delta_+(v)$ и $\delta_-(v)$ — множества дуг, входящих в v и выходящих из вершины v в орграфе $G(L) = (V, A)$.

Выпуклую оболочку баз (крайних точек) полиматроида $P(\varphi)$ обозначим $Hull(\varphi)$ [9]:

$$Hull(\varphi) = \{x \in R^V;\, x(S) \le \varphi(S),\, S \subset V,\, x(V) = \varphi(V)\}.$$

Пусть d_v — степень вершины $v \in V$ в графе $G = (V, E)$. Рассмотрим следующую задачу:

$$f_* = \max\left\{ \sum_{v \in V} |2x_v - d_v|;\, x \in Hull(\varphi) \right\}, \qquad (1)$$

которая является специальной задачей нахождения максимума выпуклой функции на выпуклой оболочке баз полиматроида $P(\varphi)$.

Теорема 1. Для максимального двудольного подграфа $GB = (U, S, E_b)$ с подмножествами вершин $U \cup S = V$ произвольного графа $G = (V, E)$ выполняется равенство $f_* = 2|E_b|$.

Доказательство. Рассмотрим линейное упорядочение $L_b = (U, S)$ вершин графа $G = (V, E)$. Пусть $x^* \in Hull(\varphi)$ — база, определенная гриди алгоритмом относительно $L_b = (U, S)$. Так как $x_v^* = |\delta_+(v)|$ и $y_v^* = |\delta_-(v)|$ в орграфе $G(L_b)$, то $x_v^* + y_v^* = d_v$, поэтому

$$\sum_{v \in V} |2x_v^* - d_v| = \sum_{v \in V} |x_v^* - y_v^*|.$$

Очевидно, что $x_u^* > y_u^*$ для вершин $u \in U$, а $y_s^* > x_s^*$ для вершин $s \in S$, так как в противном случае, включив вершину u в S или s в U, определяем двудольный граф с числом ребер, превышающим $|E_b|$. Это противоречит тому, что

$GB=(U, S, E_b)$ — максимальный двудольный подграф. Поэтому $|x_u^* - y_u^*| = x_u^* - y_u^*$ для $u \in U$ и $|x_s^* - y_s^*| = y_s^* - x_s^*$ для $s \in S$.

Предположим, что $x_u = Bd_u$ для всех $u \in U$ и $x_s = 0$ для всех $s \in S$, а также что $y_u = 0$ для всех $u \in U$ и $y_s = Bd_s$ для всех $s \in S$. Из определения x^* гриди алгоритмом относительно линейного упорядочения L_b следует, что $x_u^* \ge x_u$, $x_s^* \ge x_s$ и $y_u^* \ge y_u$, $y_s^* \ge y_s$ для всех $u \in U$ и $s \in S$.

Пусть $x_u^* > x_u$ для некоторых $u \in U$. Тогда из свойства 1 следует выполнимость условия $y_w^* > 0$ для вершин $w \in U$, которые являются конечными для некоторых ребер $(u, w) \in E$. Кроме того, $x_u^* - \sum y_w^* = x_u$, где $\sum y_w^*$ — суммирование по ребрам $(u, w) \in E$, для которых u, $w \in U$.

Действительно, так как $|x_u^* - y_u^*| = x_u^* - y_u^*$ для всех вершин из U и вершина w следует за вершиной u в L_b, то $x_u^* - \sum y_w^* = x_u$ согласно свойству 1.

Аналогично если $y_s^* > y_s$ для некоторых $s \in S$, то $x_w^* > 0$ для вершин $w \in S$, которые являются конечными для некоторых ребер $(w, s) \in E$. С учетом того, что $|x_s^* - y_s^*| = y_s^* - x_s^*$, для вершин $s \in S$ аналогичным образом получаем $y_s^* - \sum x_w^* = y_s$.

Следовательно,

$$f_* = \sum_{v \in V} |x_v^* - y_v^*| = \sum_{u \in U} |x_u^* - y_u^*| + \sum_{s \in S} |x_s^* - y_s^*| =$$

$$= \sum_{u \in U} (x_u^* - y_u^*) + \sum_{s \in S} (y_s^* - x_s^*) = \sum_{u \in U} x_u + \sum_{s \in S} y_s = 2|E_b|,$$

что и требовалось доказать.

Согласно лемме 1 $z = x - y$ для баз $x \in P(\varphi)$, $y \in Q(\omega)$ и $z \in EP(\varphi - \omega)$. Поэтому $f_* = Cut(L_*)$, т.е. ЗМР сводится к определению «оптимального» линейного упорядочения L_* вершины графа G.

В случае, когда G — планарный граф, определение оптимального линейного упорядочения L_* сводится к нахождению максимального паросочетания на подграфе, имеющего вершины нечетной степени в двойственном графе к графу G. Если G — не планарный и не двудольный граф, то для определения оптимального линейного упорядочения вершин требуется просмотр нескольких вариантов следования вершин в их линейном упорядочении с учетом особенностей топологии графа G. Из доказательства теоремы 1 видно, что $|E_b| = |E| - n_c$, где n_c — количество минимальных ребер, покрывающих нечеткие циклы (odd-circuit cover [7]) в графе G. Согласно теореме 1 первоначальное линейное упорядочение вершин и соответствующее решение ЗМР можно определить с помощью следующего простого алгоритма.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗМР

Input: простой граф $G = (V, E)$.

Output: множества U и S такие, что $U \cup S = V$ и $U \cap S = \varnothing$;

begin(algorithm)

  for ($v \in V$) ***do***

    $\partial v = \{w; (v, w) \in E\}$;

end for

  найти вершину v_1 с максимальной степенью;

  $k = 1$;

  $L_0 := \{v_1\}$;

  все ребра (v_1, w) из E заменить дугой $v_1 w$;

пометить все ребра из ∂v_1;
while (существуют вершины $v \in E \setminus L_0$, для которых
∂v содержит непомеченные ребра) ***do***
$k := k+1$;
среди них найти вершину v_k максимальной степени;
$L_0 := \{L_0, v_k\}$;
все ребра (v_k, w) из E заменить дугой $v_k w$;
пометить все ребра из ∂v_k ;
end while
while $(k < |V|)$ ***do***
if (существуют вершины $v \in E \setminus L_0$, для которых
∂v содержит только помеченные ребра)
do
$k := k+1$;
среди них найти вершину v_k максимальной степени;
$L_0 := \{L_0, v_k\}$;
end if
else do
$k := k+1$;
найти вершину $v_k \in E \setminus L_0$, для которой абсолютное значение
разности количества помеченных и непомеченных ребер
максимальное;
$L_0 := \{L_0, v_k\}$;
пометить все непомеченные ребра (v_k, w) из ∂v_k, заменить их
дугами $v_k w$;
end else
end while
for $(v \in V)$ ***do***
$x_v = |\delta_+(v)|$; // в орграфе $G(L_0) = (V, A)$,
$y_v = |\delta_-(v)|$; // в орграфе $G(L_0) = (V, A)$.
end for
$U = \{v; x_v > y_v, v \in V\}$;
$S = \{v; x_v \le y_v, v \in V\}$;
end(algorithm)

Доказательство следующих двух утверждений очевидно.

Утверждение 1. Алгоритм определяет векторы $x = (x_v; v \in V)$ и $y = (y_v; v \in V)$, которые являются базами $x \in P(\varphi)$ и $y \in Q(\omega)$ относительно линейного упорядочения L_0 вершин графа $G = (V, E)$.

Утверждение 2. Алгоритм определяет двудольный граф с подмножествами вершин U и S для каждой доли за время $O(|V|^2)$.

Обозначим $P = \{v; x_v > 0, y_v > 0\}$.

Утверждение 3. Алгоритм определяет базу $x \in P(\varphi)$, для которой

$$f_0 = \sum_{v \in V} |2x_v - d_v| \ge f_* - 2\sum_{v \in P}\left(\frac{d_v}{2} - n_c\right).$$

Доказательство. Нетрудно увидеть, что $f_0 = 2|E| - \sum_{v \in P} \min\{x_v, y_v\}$. Поэтому

$$f_0 = 2|E_b| + 2n_c - \sum_{v \in P} \min\{x_v, y_v\} = f_* + 2n_c - \sum_{v \in P} \min\{x_v, y_v\} \ge$$
$$\ge f_* - 2\sum_{v \in P}\left(\frac{d_v}{2} - n_c\right).$$

На рис. 2 сплошными линиями обозначены ребра двудольного подграфа GB, определенного предложенным гриди алгоритмом при первоначальном линейном упорядочении вершин. Как видим, достаточно удалить указанные пунктирными линиями шесть ребер, чтобы определить двудольный подграф GB.

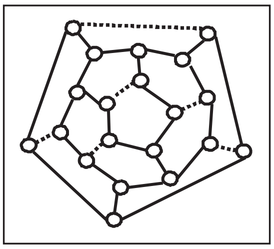

Рис. 2. Додекаэдр

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим, что произвольное упорядочение вершин полного графа является оптимальным и, как результат этого, предложенный алгоритм находит точное решение ЗМР на этих графах. Определение оптимального линейного упорядочения вершин является основной проблемой для неполных графов. Согласно утверждению 3 для определения почти оптимального упорядочения вершин можно, например, применить приближенные алгоритмы решения задачи нахождения максимального независимого множества для уменьшения $|P|$. Специфику задачи (1) можно также использовать для оценивания двудольной плотности (bipartite density) различных кубических или некубических графов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Barahona F., Gröschel M., Junger M., Reinelt G. An application of combinatorial optimization to statistical physics and circuit layout design. *Operation Research.* 1988. Vol. 36, Iss. 34. P. 493–513.
2. Poljak S., Tuza Z. The max-cut problem — a survey. Cook W., Lovasz L., Seymour P. (Eds.). Special Year on Combinatorial Optimization. *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science.* American Mathematical Society, 1995. 393 p.
3. Billionnet Alain. Solving a cut problem in bipartite graphs by linear programming: Application to a forest management problem. *Applied Mathematical Modeling.* 2010. Vol. 34. P. 1042–1050.
4. Goemans M.X., Williamson D.P. 0.878 — approximation algorithms for MAX CUT and MAX 2SAT. *Proc. of the 26th Annual ASM Symposium on the Theory of Computing*, 1994. P. 422–431.
5. Goemans M., Williamson D. Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming. *Journal of ACM.* 1995. 42(6). P. 1115–1145.
6. Bertoni A., Campadelli P., Grossi G. An approximation algorithm for the maximum cut problem and its experimental analysis. *Discrete Applied Mathematics.* 2001. Vol. 110. P. 3–12.
7. Hadlock F. Finding a maximum cut of a planar graph in polynomial time. *SIAM J. Computer*. 1975. Vol. 4, N 3. P. 221–225.
8. Orlova G.I., Dorfman Y.G. Finding the maximal cut in a graph. *Engineering Cybernetics.* 1972. P. 502–506.
9. Fujishige S. Submodular function and optimization. *Annals of Discrete Mathematics*. Amsterdam: Elsevier, 2005. 395 p.

Надійшла до редакції 08.12.2017

Ф.А. Шаріфов

ЗНАХОДЖЕННЯ МАКСИМАЛЬНОГО РОЗРІЗУ ГРІДІ АЛГОРИТМОМ

Анотація. Розглянуто задачу знаходження максимального розрізу на графах. Наведено нову модель задачі в термінах бази поліматроїда. Показано, що розв'язок задачі можна знайти гріді алгоритмом після того, як визначено оптимальне лінійне впорядкування вершин.

Ключові слова: максимальний розріз, двочастковий підграф, лінійне впорядкування.

F.A. Sharifov

FINDING MAXIMUM CUT BY THE GREEDY ALGORITHM

Abstract. The paper considers the problem of finding the maximum cut on graphs. A new model of the problem is given in terms of the base of polymatroid. It is shown that the problem solution can be found by the greedy algorithm after the optimal linear ordering of the vertices has been determined.

Keywords: maximum cut, bipartite subgraph, linear ordering.

Шарифов Фирдовси Ахун-оглы,
доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: fasharifov@gmail.com.