УДК 519.217:519.718:519.837

И.В. ЮРЧЕНКО, В.К. ЯСИНСКИЙ

СУЩЕСТВОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ЛЯПУНОВА–КРАСОВСКОГО ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО–СКОРОХОДА ПРИ УСЛОВИИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ПО ВЕРОЯТНОСТИ С КОНЕЧНЫМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Аннотация. Установлено, что для динамических систем случайной структуры с конечной предысторией, обладающих свойством той или иной вероятностной устойчивости, существуют функционалы Ляпунова–Красовского с определенными свойствами.

Ключевые слова: системы случайной структуры, последействие, устойчивость, функционалы Ляпунова–Красовского.

ВВЕДЕНИЕ

Основными трудами по устойчивости и оптимальной стабилизации для детерминированных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с последействием являются работы Н.Н. Красовского, А.Н. Летова и Э.А. Лидского [1, 2], В.Б. Колмановского, В.Р. Носова и Л.Е. Шайхета [3, 4], а также источники, включенные в указанные работы в виде ссылок.

Систематическое описание возможности учета импульсных возмущений в дифференциальных уравнениях представлено в монографии А.М. Самойленко, Н.А. Перестюка [5]. Эта ситуация также предметно изучена не только для дифференциальных уравнений, но и для разностных уравнений в монографии Е.Ф. Царькова, М.Л. Свердана [6].

Влияние марковских возмущений на устойчивость динамических систем описано в работах В.С. Королюка, Н. Лимниоса [7], О.А. Андреевой, В.Б. Колмановского, Л.Е. Шайхета [3], Р.З. Хасьминского [8], И.Я. Каца, Н.Н. Красовского [9], С. Горелика [10], В.Б. Колмановского, Р.З. Хасьминского [11], Е.Ф. Царькова, В.К. Ясинского [12, 13], в работах других авторов [14–17], в фундаментальной монографии А.В. Скорохода [18], а также в источниках, включенных в указанные труды в виде ссылок. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры описан в монографии И.Я. Каца [19]. Устойчивость автономной динамической системы с быстрым марковским переключением изучалась в трудах В.С. Королюка [20–22].

В этой работе рассмотрена и решена задача о поведении динамической системы при наличии марковских возмущений (параметров), которая обладает свойством асимптотической устойчивости по вероятности в целом, а в случае линейных систем — свойством экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном.

Идея асимптотики решения вышеупомянутой задачи основывается на методе функций и функционалов Ляпунова [11]. Для динамических систем с последействием эта идея нашла воплощение в работах [3, 6, 12–14, 19, 23–28].

Данная работа является развитием идей и методов исследования асимптотической устойчивости в целом в интерпретации стохастики импульсных динамических систем, учитывающих марковские возмущения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на вероятностном базисе $(\Omega, F, P, \mathcal{F}\}$, $\{\mathcal{F} \equiv F_t \subset F, t \geq 0\}$, задана динамическая система случайной структуры (ДССС) с конечным последействием в виде стохастического дифференциально-функционального уравнения Ито–Скорохода для $t \ge t_0 = 0$

$$dx(t) = a(t, x_t, \xi(t)) + b(t, x_t, \xi(t))\,dw(t) + \int_U c(t, x_t, \xi(t), u)\,\tilde{\nu}(du, dt) \qquad (1)$$

с начальным условием

$$x(t+\theta, \omega)\Big|_{t=0} = \varphi(\theta, \omega), \ \ \xi(t)\Big|_{t=0} = y_0 \in \mathbf{Y}. \qquad (2)$$

Здесь $x(t) \equiv x(t, \omega) \in \mathbf{R}^n$, $x_t \equiv \{x(t+\theta), -\tau \le \theta \le 0, 0 \le \tau \le \infty\} \in \mathbf{D}([-\tau, 0])$, где $\mathbf{D}([-\tau, 0])$ — пространство Скорохода [5] непрерывных справа функций, имеющих левосторонние пределы [18, 20]; $a: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{D}([-\tau, 0]) \times \mathbf{Y} \to \mathbf{R}^n$; $b: \mathbf{R}_+ \times \times \mathbf{D}([-\tau, 0]) \times \mathbf{Y} \to \mathbf{R}^n$; $c: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{D}([-\tau, 0]) \times \mathbf{Y} \times \mathbf{U} \to \mathbf{R}^n$; $w(t) \equiv w(t, \omega): \mathbf{R}_+ \times \Omega \to \to \mathbf{R}^1$ — стандартный винеровский процесс [17]; $\tilde{\nu}(t, A) = \nu(t, A) - t\,\Pi(A)$ — центрированная пуассоновская мера; $\xi(t)$ — простая марковская цепь с конечным количеством состояний $\xi(t) \equiv \xi(t, \omega) \in \mathbf{Y} \equiv \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$, которая задана вероятностями перехода для каждого $t \ge s \ge 0$ [17]

$$P\{\xi(t+\Delta t) = y_j \,\big|\, y(t) = y_i\} = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t), \qquad (3)$$

$$P\{y(s) \equiv y_i, t \le s \le t + \Delta t \,\big|\, y(t) = y_i\} = 1 - q_i \Delta t + o(\Delta t). \qquad (4)$$

Рассмотрим случай, когда в момент $s > 0$ изменения структуры системы (1), (2) происходит случайное скачкообразное изменение фазового вектора $x(s-0) = x$, $x(s) = z$, для которого задана условная плотность $p_{ij}(\tau, z/x)$, т.е.

$$P\{x(s) \in [z, z+dz) \,\big|\, x(s-0) = x\} = p_{ij}(s, z/x)dz + o(dz). \qquad (5)$$

Замечание 1. Стохастическое дифференциально-функциональное уравнение (1) — формальная запись следующего стохастического интегрального уравнения Ито–Скорохода

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t a(s, x_s, \xi(s))\,ds + \int_0^t b(s, x_s, \xi(s))dw(s) +$$

$$+ \int_0^t \int_U c(s, x_s, \xi(s), u)\,\tilde{\nu}(du, ds), \qquad (6)$$

где первый интеграл является интегралом Римана, второй — интегралом Ито, третий — интегралом Скорохода, введенным им по пуассоновской мере [18].

Замечание 2. В дальнейшем естественно полагать, что выполняется условие о попарной независимости $\xi(t, \omega), w(t)$ и $\tilde{\nu}(t, A)$ [18].

Предположим, что функционалы a, b и c удовлетворяют в любой конечной области $\|x_t\| < H$, $\|x_t\| \equiv \sup\limits_{-\tau \le \theta \le 0} |x(t+\theta)|$, условию Липшица для любых $\varphi, \psi \in C([-\tau, 0])$

$$|a(t, \varphi, y) - a(t, \psi, y)| + |b(t, \varphi, y) - b(t, \psi, y)| +$$

$$+ \int_U |(c(t, \varphi, y, u) - c(t, \psi, y, u))\Pi(du)| \le L\|\varphi - \psi\|, \qquad (7)$$

а также условию ограниченности коэффициентов

$$|a(t, \varphi, y)| + |b(t, \varphi, y)| + \int_U |c(t, \varphi, y, u)|\Pi(du) \le L(1 + \|\varphi\|) \qquad (8)$$

для всех $y \in \mathbf{Y}$, $t \in J \equiv \{t \,\big|\, t \ge t_0 \ge 0\}$. Здесь y — значения марковского процесса $\xi(t)$ из области $\mathbf{Y}$, норма $\|\varphi\| \equiv \sup\limits_{-\tau \le \theta \le 0} |\varphi(\theta)|$, H — область задания отрезков

$x_t \equiv \{x(t+\theta), \ -\tau \le \theta \le 0\}$ сильного решения $x(t) \equiv x(t, \omega) \in \mathbf{R}^n$ ДССС. Поэтому постоянная L из (7), (8) зависит только от размеров области H.

Замечание 3. Если независимые между собой винеровский процесс $w(t) \equiv w(t, \omega) \in \mathbf{R}^1$ и центрированная пуассоновская мера $\widetilde{\nu}(t, A) = \nu(t, A) - t\Pi(A)$ $\forall A \in \mathbf{U}$ не зависят от начального случайного вектора $\varphi(\theta, \omega) \in \mathbf{R}^n$, причем существует четвертый момент $E|\varphi(\theta, \omega)|^4 < \infty$, а также выполнены условия (7), (8), то существует сильное решение ДССС (1), (2) $x(t) \equiv x(t, \omega)$ [8, 18].

Замечание 4. Предположим, что траектории сильного решения $x(t) \equiv x(t, \omega) \in \mathbf{R}^n$ ДССС (1), (2) процесса продолжимы для всех $t \ge t_0 \ge 0$. Это необходимое условие для изучения асимптотической устойчивости по вероятности сильного решения (1), (2).

Замечание 5. Для уравнения (1), (2) с $\tau = 0$, $b \equiv 0$, $c \equiv 0$, т.е. для уравнения

$$dx(t) = a\,(t, x(t), \xi(t))dt \tag{9}$$

с непрерывными фазовыми траекториями проблема обращения была решена в работе [23]. В случае стохастических дифференциальных уравнений Ито решению этой проблемы посвящены, например, работы [24, 25].

Замечание 6. Вопрос о существовании функции Ляпунова для ДССС без последействия, по-видимому, впервые обсуждался в [25].

В данной статье авторы намерены обощить проблему обращения теорем об устойчивости для ДССС (1), (2).

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ (1), (2)

Будем, не теряя общности, исследовать на устойчивость тривиальное решение ДССС (1), (2), т.е., пусть выполняются условия

$$a\,(t, 0, y) = b\,(t, 0, y) = c\,(t, 0, y, u) = 0, \ \ \forall t \ge t_0 \ge 0, \ \ y \in \mathbf{Y}, \ \ u \in \mathbf{U}. \tag{10}$$

Дадим определение устойчивости сильного решения (1), (2) в различных трактовках.

Определение 1. Решение $x(t) = 0$ ДССС (1), (2) назовем асимптотически устойчивым по вероятности в целом, если для произвольной ограниченной области $\| x_0 \| \le H_0$ и чисел $\gamma > 0$, $p > 0$, $q > 0$ существует ограниченная область $\| x_t \| < H_1$ и число $T(\gamma, q) > 0$ такие, что

$$P\,\{[\sup \| x_t \| \,\big|\, t \ge t_0] < H_1 \big|_{x_0,\, y_0}\} > 1 - p, \tag{11}$$

$$P\,\{[\,\sup \| x_t \| \,\big|\, t \ge t_0 + T] < \gamma \big|_{x_0,\, y_0}\} > 1 - p - q\,. \tag{12}$$

Определение 2. Решение $x(t) \equiv 0$ ДССС (1), (2) асимптотически устойчиво по вероятности в целом равномерно по времени $t_0 \ge 0$ и начальным данным из области

$$\| x_{t_0} \| \equiv \| \varphi_0 \| \le H_0; \ \ y_0 \in \mathbf{Y}, \ \ t_0 \ge 0\,, \tag{13}$$

если оно удовлетворяет все условия определения 1, причем постоянная $T(q, \gamma)$ может быть выбрана не зависящей от начальных данных (13).

Определение 3. Тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ системы (1), (2) назовем $p(H)$-асимптотически устойчивым по вероятности в целом, равномерным по начальным данным (13), если

$$P\,\{[\sup \| x_t \| \,\big|\, t \ge t_0\,] < H \,\big|\, x_0,\, y_0\} > 1 - p(H)\,, \tag{14}$$

где $p(H)$ — постоянная, оценивающая вероятность того, что решение $x(t)$ покидает область $\| x_t \| < H$.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ (1), (2)

Дифференциально-функциональное уравнение случайной структуры (1), вероятностные характеристики процесса $\xi(t) \in \mathbf{R}^m$, $t \geq t_0 = 0$, (3), (4), условие (5) скачка фазового вектора $x(t) \equiv x(t, \omega)$: $[0, T] \times \Omega \to \mathbf{R}^n$ в моменты скачкообразного изменения структуры системы определяют марковский процесс $(x(t), y(t)) \in \mathbf{R}^{n+m}$ с непрерывными справа реализациями [21, 22, 25].

Рассмотрим функционал $v(t, y, \varphi) \in \mathbf{R}^1$ с начальным условием $\varphi \in \mathbf{D}([-\tau, 0])$, который обладает следующими свойствами:

1) v — положительно определенный в области $T \times G \times \mathbf{Y}$, т.е. если для $r > \varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$, что $v(t, y, \varphi) \geq \delta$ при $t \geq t_0 = 0$, $(y, \varphi) \in \{G \cap \{\varepsilon \leq \|\varphi\| \leq r\} \times \mathbf{Y}\}$;

2) допускает бесконечно малый верхний предел

$$\sup_{\substack{y \in Y,\, t \in \mathbf{R}_+ \\ \|\varphi\| \leq r}} v(t, y, \varphi) \equiv \underline{v}(r) \to 0$$

при $r \to 0$;

3) допускает бесконечно большой нижний предел

$$\inf_{\substack{y \in Y,\, t \in \mathbf{R}_+ \\ \|\varphi\| \geq r}} v(t, y, \varphi) \equiv \overline{v}(r) \to \infty$$

при $r \to \infty$;

4) существует $E\{v(t, x\xi(t), x_t) \,|\, x_s = \varphi,\ y(s) = y\}$;

5) существует инфинитезимальный оператор от функционала v в силу (1), (2)

$$\lim_{t \to s+0} \frac{E\{v(t, \xi(t), x_t) - v(s, y, \varphi)\}}{t} \equiv (Lv)(s, y, \varphi). \tag{15}$$

Замечание 7. Если существует предел

$$\lim_{t \to s+0} \frac{1}{t} E\{v(t, \xi(t), x_t)\} = h(s, y, \varphi), \tag{16}$$

то справедлива формула Дынкина [17, 24]

$$E\{v(t, \xi(t), x_t) \,|\, x_s = \varphi, \xi(s) = y\} = v(s, y, \varphi) +$$

$$+ \int_s^t E\{(Lv)(u, \xi(u), x_u) \,|\, x_s = \varphi, \xi(s) = y\} du. \tag{17}$$

Замечание 8. Формула (17) является стохастическим аналогом классической формулы Ньютона–Лейбница

$$F(t, x(t)) = F(s, x(s)) + \int_s^t dF(u, x(u)).$$

Замечание 9. Формула (17) имеет место также для марковских моментов времени $\tau(\omega) > 0$ [23, 24], если $E\{\tau(\omega)\} < \infty$.

Пусть $\tau_{\mathbf{U}}$ — момент первого выхода процесса $(x(t), \xi(t))$ из множества $\mathbf{U} \equiv Q \times \mathbf{Y}$ (Q — открытое ограниченное множество пространства $\mathbf{D}(\mathbf{R}^n, [-\tau, 0])$, $\mathbf{Y}$ — открытое ограниченное множество пространства $\mathbf{Y}([-\tau, 0])$). Тогда

$\tau_{\mathbf{U}} \equiv \min\{t, \tau_{\mathbf{U}}\}$ — марковский процесс [17]. Если $(x(s), \xi(s)) \subset \mathbf{U}$, то справедливо неравенство

$$E\{v(\tau_{\mathbf{U}}(t), \xi(\tau_{\mathbf{U}}(t)), x(\tau, \tau_{\mathbf{U}}(t))) \,|\, x_s = \varphi, \xi(s) = y\} \le$$
$$\le v(s, y, \varphi) + E\left\{ \int_s^{\tau_{\mathbf{U}}(t)} (Lv)(u, \xi(u), x_u)\, du \,\Big|\, x_s = \varphi, \xi(s) = y \right\}. \quad (18)$$

При этом процесс $(x(\tau_{\mathbf{U}}(t)), y(\tau_{\mathbf{U}}(t)))$ также будет строго марковским [22, 25], а инфинитезимальный оператор будет вычисляться по одной из формул [9, 15, 16].

Если выполняются условия (3)–(4) состояния ДССС (1), (2), тогда

$$(Lv)(s, y, \varphi) = \frac{\partial v}{\partial s} + (\nabla v(s, y, \varphi), a(s, y_i, \varphi)) +$$
$$+ \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\nabla^2 v(s, y_i, \varphi) b(s, y_i, \varphi), b'(s, y_i, \varphi)) +$$
$$+ \int_{\mathbf{U}} [v(t, y_i, x(t) + c(t, y_i, \varphi, z)) - v(t, y_i, x(t)) - (\nabla v(t, y_i, x(t)), c(t, y_i, x(t), z))]\, \Pi(dz) +$$
$$\sum_{j \ne i}^{k} [v(s, y_i, x) p_{ij}(s, z / \varphi) dz - v(s, y_i, \varphi)] q_{ij}, \quad (19)$$

где $\nabla v \equiv \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x_n} \right)'$, $\nabla^2 v \equiv \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{i, j = \overline{1, m}}$, $'$ — знак транспонирования, Sp — след матрицы.

В частности, когда в моменты изменения структуры $y_i \to y_j$ фазовый вектор изменяется непрерывно $x(\tau - 0) = x(\tau) = x$, формула (19) упрощается, а именно:

$$(Lv)(s, y, \varphi) = \frac{\partial v}{\partial s} + (\nabla v, a) + \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\nabla^2 v b, b') +$$
$$+ \int_{Z} [v(t, y_i, x(t) + c(t, y_i, \varphi, z)) - v(t, y_i, x(t)) - (\nabla v(t, y_i, x(t)), c(t, y_i, \varphi, z))]\, \Pi(dz) +$$
$$\sum_{j \ne i}^{k} [v(s, y_i, \varphi) - v(s, y_i, \varphi)] q_{ij}. \quad (20)$$

Докажем аналог прямой теоремы Ляпунова об устойчивости системы (1), (2).

Теорема 1. Пусть для ДССС (1), (2) выполняются условия (7), (8) и 1)–5).

Тогда тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ будет асимптотически устойчиво по вероятности в целом равномерно относительно начальных данных из произвольной конечной области (13).

Доказательство проведем в три этапа.

Первый этап. Рассмотрим не зависящее от начальных данных число $T(H_0, \gamma, q) = 2l(H_0) q^{-1} k^{-2}$ из определения 1, где

$$p > 0, \ q > 0, \ 0 < \gamma < H. \quad (21)$$

Докажем, что в интервале времени $[t_0, t_0 + T]$ существует $t_1 \ge t_0 \ge 0$, для которого выполняется неравенство

$$P\{\| x_{t_1} \| < \gamma_1 | x_{t_0} = \varphi_0, \xi(t_0) = y_0\} > 1 - p - \frac{1}{2} q. \quad (22)$$

Обозначим

$$l(H_0) \equiv [\sup v(t, y, \varphi) \,|\, \|\varphi\| < H_0, y \in \mathbf{Y}, t \in J \equiv \{t \in \mathbf{R}_+ \,|\, t \ge t_0 \ge 0]\}. \quad (23)$$

Число $H>0$ определим из условия

$$P\{\inf v(t,\ y,\varphi)\big|\ \|\varphi\|=H,\ y\in\mathbf{Y},\ t\in J\}>l(H_0)\,. \tag{24}$$

Выберем число $\gamma_1>0$ так, чтобы $\gamma_1<\gamma$ (см. (21)) и удовлетворяло неравенству

$$l(\gamma_1)<\frac{1}{2}q\,[\,\inf v(t,\ y,\varphi)\big|\,\gamma_1\le\|\varphi\|\le H,\ y\in\mathbf{Y},\ y\in J]\,. \tag{25}$$

Обозначим

$$-k^2\equiv[\inf(Lv)\big|\,\gamma_1\le\|\varphi\|\le H,\ y\in\mathbf{Y},\ t\in J]\,. \tag{26}$$

Из условия (24) следует, что для произвольных начальных данных из области (13) справедливо неравенство

$$P\{[\sup\|x_t\|\,\big|\,t\ge t_0=0]<H\,\big|\,\varphi,\ y_0\}>1-p.$$

Далее предположим, что (22) не выполняется, т.е.

$$P\{\gamma_1\le\|x_{t_1}\|\le H,\ t\in[t_0,\ t_0+T]\big|\,\varphi,\ y_0\}\ge\frac{1}{2}q\ . \tag{27}$$

Тогда с учетом (18) и (26) получили бы неравенство

$$\begin{gathered}Ev\{(\tau_{\mathbf{U}}(t_0+T),\ y(\tau_{\mathbf{U}}(t_0+T)),x_{\tau_{\mathbf{U}}(t_0+T)})\big|\,\varphi,\ y_0\}\le\\ \le v(t_0,\ y_0,\varphi)-\frac{1}{2}ql^2T<0\,,\end{gathered} \tag{28}$$

где $\mathbf{U}\equiv\{(\varphi,\ y):\gamma_1<\|\varphi\|<H,\ y\in\mathbf{Y}\}$, $\tau_{\mathbf{U}}(t)\equiv\min\{\tau_{\mathbf{U}},\ t\}$.

Неравенство (28) невозможно вследствие того, что $E\{\cdot\}\ge0$ в условиях теоремы 1.

Второй этап. Докажем, что при выполнении условий теоремы 1 тривиальное решение $x(t)\equiv0$ ДССС (1), (2) устойчиво по вероятности.

Зафиксируем $\varepsilon>0$, $0<p<1$. Тогда существует такое число $\varepsilon_1>0$, что

$$(\inf v\,(t,\ y,\varphi)\big|\ y\in Y,\ t\ge t_0,\ \|\varphi\|\ge\varepsilon)=\varepsilon_1. \tag{29}$$

Обозначим

$$\mathbf{U}\equiv\{(\varphi,\ y):\|\varphi\|<\varepsilon,\ y\in\mathbf{Y}\},\ \ \tau_{\mathbf{U}}(\tau)\equiv\min\{T,\tau_{\mathbf{U}}\}\,,$$

где $\tau_{\mathbf{U}}$ — момент первого выхода траектории $(x(t),\xi(t))$ из множества $\mathbf{U}$.

Тогда из (18) и знакоотрицательности $(Lv)<0$ следует, что

$$E\{v(\tau_{\mathbf{U}}(T),\xi(\tau_{\mathbf{U}}(T)),x_{\tau_{\mathbf{U}}(T)})\big|\,x_{t_0}=\varphi_0,\xi(t_0)=y_0\}\le v(t_0,\ y_0,\varphi), \tag{30}$$

Далее выберем $\delta>0$ из условия

$$\sup\{v\,(t_0,\ y_0,\varphi)\big|\ \|\varphi\|\le\delta,\ y_0\in Y\}<\varepsilon_1 p\,. \tag{31}$$

Неравенства (30), (31) позволяют для произвольного φ из области $\|\varphi\|\le\delta$ записать оценки

$$\begin{gathered}\varepsilon_1 p>v(t_0,\ y_0,\varphi)\ge E\{v(\tau_{\mathbf{U}}(T),\ y(\tau_{\mathbf{U}}(T)),x_{\tau_{\mathbf{U}}(T)})\,|\,y_0,\varphi\}\ge\\ \ge\varepsilon_1 P\{[\sup\|x_t|\,\big|\,t_0\le t\le T]\ge\varepsilon\big|\ y_0,\varphi\}.\end{gathered} \tag{32}$$

Если в (32) перейти к пределу при $T\to\infty$, то получим

$$P\{[\sup\|x_t\|\,\big|\,t\ge t_0]\ge\varepsilon\big|\ y_0,\varphi\}<\ p\,,$$

что и доказывает устойчивость тривиального решения $x(t)\equiv0$ ДССС (1), (2) по вероятности.

Третий этап. Докажем асимптотическую устойчивость по вероятности в целом системы (1), (2).

Выбираем произвольным образом числа $H_0 > 0$, $p > 0$, $q > 0$, $\gamma > 0$ и определим H_1 и γ_1 при помощи условий

$$\{\sup v\,(t,\ y, \varphi) \big| \|\varphi\| \le H_0,\ y \in \mathbf{Y},\ t \ge t_0\} < p \cdot \{\inf v\,(t,\ y, \varphi) \big| \|\varphi\| \ge H_1,\ y \in \mathbf{Y},\ t \ge t_0\},$$

$$\{\sup v(t,\ y, \varphi) \big| \|\varphi\| \le \gamma_1,\ y \in \mathbf{Y},\ t \ge t_0\} < \frac{1}{2} q \cdot \{\inf v(t,\ y, \varphi) \big| \|\varphi\| \ge \gamma,\ y \in \mathbf{Y},\ t \ge t_0\}.$$

Для фиксированных $p > 0$, $q > 0$ и устойчивости по вероятности системы (1), (2) (см. второй этап) для $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $\|\varphi\| \le \delta$ выполняется неравенство

$$P\{[\sup \|x_t| \,\big|\, t \ge t_0] > \varepsilon \big| \ y_0, \varphi\} > 1 - p.$$

Далее примем $H_0 = \delta$ и покажем, что H_0 удовлетворяет условия асимптотической устойчивости по вероятности в целом.

Действительно, возьмем число $0 < \gamma < \varepsilon$ и определим $\gamma_1 > 0$ с помощью неравенства

$$[\sup v(t,\ y, \varphi) \big|\, t \ge t_0,\ y \in \mathbf{Y}, \|\varphi\| < \gamma_1] <$$

$$< \frac{q}{2}\ [\inf v(t,\ y, \varphi) \big|\, t \ge t_0,\ y \in \mathbf{Y}, \gamma \le \|\varphi\| < \varepsilon].$$

Тогда, повторяя рассуждения второго этапа, имеем

$$P\{[\sup \|x_\tau\| \,\big|\, \tau \ge t] < \gamma \,\big|\, (\xi(t), x(t))\} > 1 - \frac{1}{2} q \tag{33}$$

при выполнении условия $\|x_t\| \le \gamma_1$.

Покажем, что существует $T > 0$, для которого имеет место

$$P\{\|x_{t_0+T}\| \le \gamma_1 \big| \ y_0, \varphi_0\} > 1 - \frac{1}{2} q - p. \tag{34}$$

Действительно, в противном случае для траектории $x(t)$ выполнялось бы неравенство

$$P\{\gamma_1 \le \|x_t\| \le \varepsilon,\ t \ge t_0 \big| \ y_0, \varphi_0\} \ge \frac{1}{2} q. \tag{35}$$

Однако $Lv < 0$, тогда из (35) следовало бы, что

$$\lim_{t \to \infty} E\{v(\tau_{\mathbf{U}_1}(t),\ y(\tau_{\mathbf{U}_1}(t)), x_{\tau_{\mathbf{U}_1(t)}}) \,\big|\, y_0, \varphi_0\} = -\infty, \tag{36}$$

где $\mathbf{U}_1 \equiv (x_t,\ y){:}\ \gamma_1 < \|x_t\| < \varepsilon,\ y \in \mathbf{Y},\ \tau_{\mathbf{U}_1}(t) \equiv \min\{\tau_{\mathbf{U}_1}, t\}$.

Однако равенство (36) невозможно вследствие положительной определенности $v(t,\ y, \varphi)$. Это противоречие доказывает справедливость (33).

Процесс $(x(t), \xi(t))$ [17] является строго марковским. Тогда из (31), (33) и (34) следует, что для произвольных чисел $p > 0$, $q > 0$ найдется такое число $T > 0$, что при $\|\varphi_0\| \le H_0$, $y_0 \in \mathbf{Y}$ выполняется неравенство

$$P\{[\sup \|x_t\| \,\big|\, t \ge t_0 + T] < \gamma \,\big|\, y_0, \varphi_0\} > 1 - p - q. \tag{37}$$

Это доказывает асимптотическую устойчивость по вероятности $x(t) \equiv 0$.

Из неравенств (29), (30) та (37) следуют оценки

$$P\{[\sup \|x_t\| \,\big|\, t \ge t_0] < H \|\varphi_0\| \le H_0\} > 1 - p, \tag{38}$$

$$P\{\|x_t\| < \gamma \,\big|\, \|x_{t_0+T}\| \le \gamma_1\} > 1 - \frac{1}{2} q. \tag{39}$$

Аналогично рассуждениям для оценок (32)–(36) можно найти момент времени $T > 0$, для которого

$$P\{\|x_{t_0+T}\| \le \gamma_1 \| \big| \varphi_0 \| \le H_0\} > 1 - p - \frac{1}{2} q. \tag{40}$$

Условия (39), (40) дают оценку

$$P\{[\sup \|x_t\| \big| t \ge t_0 + T] < \gamma \mid y_0, \varphi_0\} > 1 - p - q \tag{41}$$

для $\|\varphi_0\| \le H_0$.

Соотношения (41) вместе с (38) доказывают третий этап. Следовательно, вернувшись к первому этапу, убеждаемся в справедливости утверждения теоремы 1. ■

Замечание 10. Для стационарной системы с последействием

$$dx(t) = a(\xi(t), x_t)dt + b(\xi(t), x_t)dw(t) + \int_U c(x_t, \xi(t), u)\tilde{\nu}(du, dt), \tag{42}$$

определенной в области $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{Y}$, $t \ge t_0$, и в случае однородной марковской цепи с конечным количеством состояний $\xi(t) \in \mathbf{Y} \equiv \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ асимптотическая устойчивость по вероятности при начальных данных из области (13) всегда будет равномерной в смысле определения 2 [23].

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Изложенные в разд. 3 результаты дают возможность утверждать, что вопрос о существовании функционала Ляпунова–Красовского (см. разд. 3, пп. 1)–3)) можно ставить лишь в предположении, что имеет место равномерная асимптотическая устойчивость по вероятности нулевого решения $x(t) \equiv 0$ ДССС (1), (2) [9].

Докажем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть для системы (1)–(5) выполняются следующие условия:

1) условная плотность распределения скачков фазового вектора $p_{ij}(\tau, z / x)$ непрерывна по τ и имеет компактный носитель, для которого

$$h_1 \|x_t\| \le \|z_t\| \le h_2 \|x_t\|, \; 0 < h_1 < h_2,$$

$$p_{ij}(\tau, z / 0) = \delta(z); \tag{43}$$

2) функционалы a и b удовлетворяют условию Липшица (6);

3) винеровский процесс $w(t) \equiv w(t, \omega) \in \mathbf{R}^1$ и центрированная пуассоновская мера $\tilde{\nu}(t, A) = \nu(t, A) - t\Pi(A)$ $\forall A \in \mathbf{U}$ независимы между собой и попарно независимы от марковского процесса $\xi(t) \in \mathbf{R}^m$;

4) имеют место неравенства (7), (8).

Тогда существуют константы $L_1 > 0$, $L_2 > 0$ такие, что для любого $t \ge t_0 \ge 0$ выполнены неравенства

$$E\{\|x_t\|^2 \big| x_{t_0} = \varphi_0;\, \xi(t_0) = y_0\} \le \|\varphi_0\|^2 e^{L_2(t-t_0)}, \tag{44}$$

$$E\{\|x_t\|^2 \big| x_{t_0} = \varphi_0;\, \xi(t_0) = y_0\} \ge \|\varphi_0\|^2 e^{-L_1(t-t_0)}. \tag{45}$$

Замечание 11. Пространство Скорохода $\mathbf{D}([-\tau, 0])$ с нормой

$$\|x(t)\| \equiv \sup_{-\tau \le t \le 0} |x(t)|^2$$

является неполным [18, 20], а норма вида

$$\| x(t) \|^2 = | x(0) |^2 + \int_{-\tau}^{0} | x(t+\theta) |^2 \, d\theta$$

обеспечивает его полноту. Далее будем работать с полным пространством $\mathbf{D}([-\tau, 0])$.

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$v(t, y, \varphi) = | \varphi(0) |^2 + \int_{-\tau}^{0} | \varphi(t+\theta) |^2 \, d\theta. \tag{46}$$

Вычисляя Lv по формуле (19) в силу ДССС (1), (2), получим

$$(Lv)(t, y, x_t) = 2x'(0) a(t, y_i, x_t) + \mathrm{Sp}(b(t, y_i, x_t), b'(t, y_i, x_t)) + | x(0) |^2 - | x(-\tau) |^2 +$$

$$+ \int_U [v(t, y_i, x(t) + c(t, y_i, \varphi, z)) - v(t, y_i, x(t)) -$$

$$- (\nabla v(t, y_i, x(t)), c(t, y_i, x(t), z))] \widetilde{\nu}(dz, dt) +$$

$$+ \sum_{j \neq i} \left[\left(\| z \|^2 + \int_{-\tau}^{0} \| z(t+\theta) \|^2 \right) p_{ij}(t, z / x) dz - | x(0) |^2 - \int_{-\tau}^{0} | z(t+\theta) |^2 d\theta \right] q_{ij}. \tag{47}$$

Далее следует учесть условие Липшица (6) и свойство плотности распределения скачков. После элементарных оценок получим такие неравенства:

$$(Lv)(t, y, x_t) \geq [-3L + (h_1^2 - 1) q_i + L^2] v(t, y, x_t) = L_1 v(t, y, x_t), \tag{48}$$

где $L_1 \equiv 2L + (1 - h_1^2) q_i - L^2$;

$$(Lv)(t, y, x_t) \leq [3L + L^2 + (h_2^2 - 1) q_i] v(t, y, x_t) = L_2 v(t, y, x_t), \tag{49}$$

где $L_2 \equiv 3L + L^2 + (h_2^2 - 1) q_i$; $q_i \equiv \sum_{j \neq i} q_{ij}$; $h_1 \leq 1$; $h_2 \geq 1$.

Обозначим

$$v_t \equiv E \left\{ \left(\| x(t+\theta) \|^2 + \int_{-\tau}^{0} \| x(t+\theta) \|^2 d\theta \right) \Bigg|_{y_0, x_0 \equiv \varphi_0} \right\}, \tag{50}$$

и после усреднения по всем реализациям $(x(t), \xi(t))$ с учетом

$$\frac{dv_t}{dt} = E\{(Lv)(t, y, x_t) \,|\, x_{t_0} = \varphi_0, \xi(t_0) = y_0\}, \tag{51}$$

можем записать оценки

$$-L_1 v_t \leq \frac{dv_t}{dt} \leq L_2 v_t, \tag{52}$$

Интегрируя неравенства (51) и, учитывая, что $v_{t_0} = \| x_0 \|^2 + \int_{-\tau}^{0} \| x(t_0 + \theta) \|^2 d\theta$, можно получить оценки (16), (17). Лемма 1 доказана. ■

Лемма 2. Пусть тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ системы (1)–(5) равномерно асимптотически устойчиво по вероятности в целом.

Тогда для произвольной области

$$\Gamma \equiv \{x_t \in \mathbf{D}([-\tau, 0]) : a \le \| x_t \| \le b\} \tag{53}$$

справедливо существование несобственного интеграла

$$\int_{t_0}^{\infty} P\{x_t \in \Gamma\} dt < \infty, \tag{54}$$

Доказательство. Далее будем обозначать через $x(t_0, \varphi_0, y_0; t)$ сильное решение ДССС (1), (2) в точке $t \ge t_0 \ge 0$ с начальными условиями $x_{t_0} \equiv \{x(t_0 + \theta)\} = \varphi_0(\theta),\ -\tau \le \theta \le 0,\ \xi(t_0) = y_0$.

Возьмем произвольные положительные числа $\gamma > 0,\ q > 0,\ H_0 > b$, найдем число $T(H_0, \gamma, q) > 0$, которое должно удовлетворять определению 2. Для этого следует выбрать начальные условия из (2). Обозначим также $\tau(\Gamma)$ — суммарное время нахождения решения $x(t_0, \varphi_0, y_0; t)$ в области Γ.

В исходном вероятностном базисе $(\Omega, F, P, \mathcal{F})$ имеет место равенство

$$E\{\tau(\Gamma)\} = \int_{t_0}^{\infty} P\{x(t_0, \varphi_0, y_0; t) \in \Gamma\} dt. \tag{55}$$

Для оценивания (55) рассмотрим следующие события. Обозначим G_0 множество реализаций решения $x(t_0, \varphi_0, y_0; t)$ со значениями из Г. В силу сепарабельности процесса $(x(t), \xi(t))$ множество G_0 имеет конечную меру относительно минимальной σ-алгебры.

Построим последовательность событий

$$G_k \equiv \{\omega : (k-1)T < \tau(\Gamma) \le kT\},\ k \in \mathbf{N}. \tag{56}$$

Очевидны такие соотношения для множеств G_k $(k = 0, 1, 2)$: $G_k \subset G_0$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G_0,\ G_i \cap G_j = \varnothing,\ i \ne j.$

Реализации процесса $\{x(t_0, \varphi_0, y_0; t), \xi(t)\} \subset G_k$ могут попасть в Г при $t \ge t_0 + (k-1)T$ по крайней мере один раз.

Далее, учитывая строгое марковское свойство и равномерную асимптотическую устойчивость процесса $(x(t_0, \varphi_0, y_0; t), \xi(t))$, получим

$$P(G_k) < q^{k-1}. \tag{57}$$

Тогда по определению математического ожидания получим, что

$$E\{\tau(\Gamma)\} < T \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = \frac{T}{(1-q)^2},$$

что с учетом (29) доказывает ограниченность математического ожидания (55). Лемма 2 доказана. ■

5. ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА ЛЯПУНОВА–КРАСОВСКОГО ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРЫ С КОНЕЧНЫМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Теорема 2. Пусть:

1) на вероятностном базисе $(\Omega, F, P, \mathcal{F})$ задана ДССС (1), (2);

2) нулевое решение $x(t) \equiv x(t_0, \varphi_0, y_0; t) \equiv 0$ системы (1)–(5) асимптотически устойчиво по вероятности равномерно относительно начальных данных из области H_0 (13).

Тогда в этой области:

(i) существует положительно определенный (см. разд. 3, п. 1)) непрерывный функционал Ляпунова–Красовского $v : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbf{D}([-\tau, 0]) \to \mathbf{R}_+$;

(ii) функционал Ляпунова–Красовского допускает бесконечно малый высший предел

$$\sup_{\substack{y\in Y,\, t\in \mathbf{R}_+,\\ \|\varphi\|\le r}} v(t,\, y, \varphi) \equiv \underline{v}(r) \to 0;$$

(iii) функционал Ляпунова–Красовского имеет отрицательно определенный инфинитезимальный оператор на решениях (1), (2)

$$(Lv)(t,\, y, \varphi) < 0\,. \tag{58}$$

Доказательство. Этап I. Построение вспомогательных областей. Можно выбрать ограниченную область Γ_0 так, чтобы

$$\Gamma_0 \supset \{\varphi_0 \in \mathbf{D}([-\tau, 0]) : \|\varphi_0\| \le H_0\}, \tag{59}$$

Тогда согласно условиям леммы 2 решение $x(t) \equiv 0$ будет равномерно асимптотически устойчивым по вероятности относительно начальных условий

$$\varphi_0 \in \Gamma_0,\;\; y_0 \in Y,\;\; t_0 \ge 0\,, \tag{60}$$

При этом следует соответствующим образом изменить значение константы $T(\Gamma_0, \gamma, q)$, которая фигурирует в последовательности событий G_k, $k \in \mathbf{N}$ (см. (56)). Выполнение неравенства (56) следует из оценок леммы 1 для сильного решения ДССС (1), (2) [9, 23].

Разобъем область $\|x_t\| \le H_0$ на последовательность ограниченных областей

$$G_k \equiv \left\{ x_t \in \mathbf{D}([-\tau, 0]) : \frac{H_0}{k+1} < \|x_t\| \le \frac{H_0}{k} \right\},\;\; k \ge 1\,. \tag{61}$$

Тогда согласно лемме 2 получим

$$\int_{t_0}^{\infty} P\{x_t \in G_k\} dt \le l_k\,. \tag{62}$$

Этап II. Выбор функционала Ляпунова–Красовского. Построим скалярную выпуклую функцию $G(r)$, $r \in R^1$, для которой выполнены такие условия:

1) существует производная Фреше $G'(\varphi)$, $G''(\varphi)$, где $\varphi \in \mathbf{D}([-\tau, 0])$;
2) $G(\varphi) = 0$ при $\|\varphi\| = 0$;
3) $G(\varphi) > 0$ для $\|\varphi\| \in (0, H_0)$;
4)
$$\left[\sup_{\varphi\in \mathbf{R}_+} G(\varphi) \left| \frac{H_0}{k+1} < \|\varphi\| < \frac{H_0}{k} \right. \right] < \mu_k,\;\; k \ge 1\,. \tag{63}$$

Далее выбираем такую последовательность действительных чисел $\{\mu_k, k \ge 1\}$, чтобы ряд, состоящий из последовательности $\{l_k\}$, сходился

$$\sum_{k=1}^{\infty} l_k \mu_k < \infty\,. \tag{64}$$

Таким образом, функционал Ляпунова–Красовского можно выбрать для $t \ge t_0$ в виде

$$v(t, \xi, \eta) \equiv \int_t^{\infty} E\,\{G(\|x(t+\theta, \xi, \eta; \tau)\|)\,\big|\, \xi, \eta\} d\tau, \tag{65}$$

где $E\{\bullet \,|\, \bullet\}$ — условное математическое ожидание.

Этот функционал определен в произвольной точке области (13), поскольку

$$v(t,\xi,\eta)\le\sum_{k=1}^{\infty}l_k\mu_k. \tag{66}$$

Этап III. Докажем, что функционал Ляпунова–Красовского (65) $v:\mathbf{R}_+\times\mathbf{Y}\times\mathbf{D}([-\tau,0])\to\mathbf{R}_+$ обладает следующими свойствами:

а) v — положительно определен;

б) v допускает бесконечно малый высший предел;

в) $Lv<0$.

Доказательство. Докажем п. а). Пусть $T\equiv(L_1)^{-1}\ln 2$, где L_1 из неравенств (44), (45). Тогда эта оценка определяет выполнение неравенств

$$E\{\|x(t+\theta,\xi,\eta;\tau)\|^2\}\ge\|\xi\|e^{-L_1(\tau-t)}\ge\|\xi\|e^{-L_1T}=\frac{1}{2}\|\xi\|. \tag{67}$$

Далее, для выпуклого функционала имеет место неравенство Ляпунова [23]

$$E\{G(\varphi)\}\ge G(E\{\varphi\}). \tag{68}$$

Тогда (68) даст возможность записать нижнюю оценку для $t\ge t_0$

$$v(t,\xi,\eta)\ge\int_t^{t+T}E\{G(\|x(t+\theta,\xi,\eta;\tau)\|)\,|\,\xi,\eta\}d\tau\ge T\cdot G\left(\frac{1}{2}\|\xi\|\right)>0,$$

что и доказывает положительную определенность функционала $v(t,\xi,\eta)$ (см. (65)).

Докажем п. б). Возьмем произвольное $\gamma>0$ и определим число N из условия

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\mu_k l_k<\frac{\gamma}{2}. \tag{69}$$

Выберем $\alpha\equiv\frac{1}{2}\gamma(l_1\mu_1+\ldots+l_N\mu_N)^{-1}$ и для $\nu>0$, а также $\varepsilon_1=H_0$, определим $\delta_1>0$ из неравенства

$$P\left\{\sup_{t\ge t_0\ge 0}\|x_t\|<\varepsilon_1\,\middle|\,y_0,\varphi_0\right\}>1-\alpha \tag{70}$$

для начального условия с нормой $\|\varphi_0\|\le\delta_1$, $y_0\in\mathbf{Y}$.

Далее, определим $\varepsilon_2\equiv\frac{H_0}{2}$ и найдем $\delta_2>0$ из аналогичного условия, а именно

$$P\left\{\sup_{t\ge t_0\ge 0}\|x_t\|<\varepsilon_2\,\middle|\,y_0,\varphi_0\right\}>1-\alpha \tag{71}$$

для $\|\varphi_0\|\le\delta_2$, $y_0\in\mathbf{Y}$.

Продолжим аналогичным образом выбор чисел $\delta_3,\delta_4,\ldots,\delta_N$.

Из выбора $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_N$ следует, что они не зависят от $t_0\ge 0$ в силу равномерной устойчивости по вероятности.

Выбрав $\delta\equiv\min\{\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_N\}$, при $\|\xi\|\le\delta$ можно получить оценку

$$v(t,\xi,\eta)\equiv\int_t^{\infty}E\{G(\|x(t+\theta,\xi,\eta;\tau)\|)\,|\,\xi,\eta\}d\tau\le\alpha\sum_{k=1}^{N}l_k\mu_k+\sum_{k=N+1}^{\infty}l_k\mu_k<\gamma. \tag{72}$$

Таким образом, оценка (72) доказывает существование бесконечно малого высшего предела для v (см. (ii)).

Докажем п. в). Для доказательства неравенства $Lv<0$ сначала докажем непрерывность функционала $v(t,\xi,\eta)$. Для этого достаточно показать, что интеграл в (65) сходится равномерно относительно параметров t,ξ,η, взятых из области (13). Следует взять произвольное число $\varepsilon>0$ и определить число m из условия

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} l_k\mu_k<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, взяв $\alpha\equiv\frac{1}{2}\varepsilon(l_1\mu_1+\ldots+l_m\mu_m)^{-1}$, найдем $T(\varepsilon)$ из условия

$$P\left\{\sup_{\tau>t+T}\|x(t+\theta,\xi,\eta;\tau)\|<\frac{H_0}{m+1}\,\middle|\,\xi,\eta\right\}>1-\alpha$$

для $\xi\in\Gamma_0$, $\eta\in\mathbf{Y}$, $t\geq t_0$.

Тогда можно получить оценки

$$\int_{t+T}^{\infty} E\{G(\|x(t+\theta,\xi,\eta;\tau)\|)\,|\,\xi,\eta\}d\tau=$$

$$=\int_{t+T}^{\infty} E\left\{G(\|x(t+\theta,\xi,\eta;\tau)\|)\,\middle|\,\xi\in\Gamma_0,\eta\in Y,\|x_\tau\|<\frac{H_0}{m+1}\right\}d\tau+$$

$$+\int_{t+T}^{\infty} E\left\{G(\|x(t+\theta,\xi,\eta;\tau)\|)\,\middle|\,\xi\in\Gamma_0,\eta\in Y,\|x_\tau\|>\frac{H_0}{m+1}\right\}d\tau<\varepsilon,$$

что и доказывает непрерывность функционала $v(t,\xi,\eta)$.

Используя определение $(Lv)(t,\xi,\eta)$, а именно

$$(Lv)(t,\xi,\eta)\equiv\lim_{\Delta t\to+0}\frac{1}{\Delta t}[E\{v(t+\Delta t,\,y(t+\Delta t),x_{t+\Delta t})\,|\,\xi,\eta\}-v(t,\xi,\eta)].\quad(73)$$

Подставим вместо $v(t,\xi,\eta)$ ее выражение (65) в определение Lv (73):

$$(Lv)(t,\xi,\eta)\equiv$$

$$\equiv\lim_{\Delta t\to+0}\frac{1}{\Delta t}\left\{E\left[\int_{t+\Delta t}^{\infty}E\{G(\|x(t+\Delta t+\theta,\,y(t+\Delta t),x_{t+\Delta t};\tau)\|)\,|\,y(t+\Delta t),x_{t+\Delta t}\}d\tau\,\middle|\,\xi,\eta\right]-\right.$$

$$\left.-\int_{t}^{\infty}E\{G(\|x(t+\theta,\,y(t),x_t)\|)\,|\,\xi,\eta\}d\tau\right\},\quad(74)$$

Далее справедливо равенство

$$E\left\{\int_{t+\Delta t}^{\infty}E\{G(\|x(t+\Delta t+\theta,\,y(t+\Delta t),x_{t+\Delta t+\theta};\tau)\|)\,|\,y(t+\Delta t),x_{t+\Delta t+\theta}\}d\tau|\xi,\eta\right\}=$$

$$=\int_{t+\Delta t}^{\infty}E\{G(\|x(t+\theta,\,y(t),x_{t+\theta};\tau)\|)\,|\,\xi,\eta\}d\tau,\quad(75)$$

Подставив (75) в (74), получим $(Lv)(t,\xi,\eta)\leq -G\|\xi\|$, что доказывает отрицательную определенность инфинитезимального оператора.

Теорема 2 доказана. ■

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установлено, что для систем случайной структуры с последействием, имеющих ту или иную вероятностную устойчивость, существуют функционалы Ляпунова–Красовского с определенными свойствами.

Вид функционала $v(t, \xi, \eta)$ задан в виде интеграла от условного математического ожидания $E\{G \mid \xi, \eta\}$, что является новым в теории устойчивости Ляпунова для динамических систем случайной структуры. Выбор конкретного вида функционала $G(\varphi)$, с помощью которого строится функционал Ляпунова–Красовского, позволяет находить достаточные условия асимптотической устойчивости сильного решения динамических систем случайной структуры (1), (2). При этом достаточные условия записываются в виде неравенств, это дает возможность определять области изменения параметров для ДССС и обеспечивать достаточно продолжительную работу системы без разрушения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Летов А.М. К теории аналитического конструирования регуляторов. *Автоматика и телемеханика.* 1962. № 6. С. 11–18.
2. Красовский Н.Н., Лидский Э.А. Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами. *Автоматика и телемеханика*. 1961. Т 22, № 9. С. 1145–1150; № 10. С. 1273–1278; № 11. С. 1425–1431.
3. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. Москва: Наука, 1992. 336 с.
4. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. Москва: Наука, 1981. 448 с.
5. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987. 287 с.
6. Свердан М.Л., Царьков Е.Ф. Устойчивость стохастических импульсных систем. Рига: РТУ, 1994. 300 с.
7. Korolyuk V.S., Limnios W. Stochastic systems in merging phase space. London: World Scientific, 2006. 331 p.
8. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях от параметров. Москва: Наука, 1969. 369 с.
9. Кац И.Я., Красовский Н.Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами. *ПММ*. 1960. Т. 24, Вып. 5. С. 809–823.
10. Горелик Г.С. К теории запаздывающей обратной связи. *Журнал техн. физики*. 1939. 9(50). С. 453–464.
11. Колмановский В.Б., Хасьминский Р.З. Устойчивость линейных систем с запаздыванием. *Изв. вузов. Математика*. 1966. № 4. С. 59–65.
12. Ясинський В.К., Ясинський Є.В. Задачі стійкості та стабілізації динамічних систем зі скінченною післядією. Київ: Вид-во «ТВіМС», 2005. 586 с.
13. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально функциональные уравнения. Рига: Ориентир, 1992. 328 с.
14. Королюк В.С., Мусуривский В.И., Юрченко И.В. Устойчивость динамических систем с последействием с учетом марковских возмущений. *Кибернетика и системный анализ*. 2007. № 6. С. 134–146.
15. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов: в 2-х т. Москва: Физматгиз, 1994. Т. 1. 544 с.
16. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов: в 2-х т. Москва: Физматгиз, 1994. Т. 2. 473 с.
17. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. Москва: Физматгиз, 1969. 59 с.
18. Скороход А.В. Стохастические дифференциально-функциональные уравнения и их применение. Киев: Наук. думка, 1982. 612 с.

19. Кац И.Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной струкутры. Екатеринбург: Изд-во Уральской госакадемии путей сообщения, 1998. 222 с.

20. Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика: в 3-х томах. Т. 3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. Чернівці: Золоті литаври, 2009.798 с.

21. Королюк В. С. Стабильность автономной динамической системы с быстрым марковским переключением. *Доклады АН УССР. Сер. А*. 1990. № 6. С. 16–19.

22. Королюк В. С. Устойчивость автономной динамической системы с быстрым марковским переключением. *Укр. матем. журн* . 1991. Т. 43, № 9. С. 1176–1181.

23. Tsarkov Ye. Averaging in dynamical systems with Markov jumps. Bremen: Univ. of Bremen, Inst. of Dynamical Syst., 1993. N 182, April. 41 p.

24. Ясинський В.К., Ясинська Л.І., Вернигора І.В. Дослідження стійкості диференціально-функціональних рівнянь з марковськими перемиканнями методом функціоналів Ляпунова–Красовського. *Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки*. 2002. Вип. 4. С. 139–155.

25. Ясинський В.К., Юрченко І.В. Проблема оборотності теорем про стійкість для систем випадкової структури зі скінченною післядією. *Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика: Наук. журнал. Донецький нац. ун-ту*. 2009. № 1–2. С. 153–167.

26. Shaikhet L. Stability of stochastic hereditary systems with Markov switching. *Theory of Stochastic Processes*. 1996. Vol. 2(18), N 3–4. P. 180–184.

27. Mao X., Shaikhet L. Delay-dependent stability criteria for stochastic differential delay equations with Markovian switching. *Stability and Control: Theory and Applications*. 2000. Vol. 3, N 2. P. 88–102.

28. Shaikhet L. Numerical simulation and stability of stochastic systems with Markovian switching. *Neural*, *Parallel and Scientific Computations*. 2002. Vol. 10, N 2. P. 199–208.

Надійшла до редакції 20.01.2018

І.В. Юрченко, В.К. Ясинський

ІСНУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛІВ ЛЯПУНОВА–КРАСОВСЬКОГО ДЛЯ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІТО–СКОРОХОДА ЗА УМОВИ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗА ЙМОВІРНІСТЮ ЗІ СКІНЧЕННОЮ ПІСЛЯДІЄЮ

Анотація. Встановлено, що для динамічних систем випадкової структури зі скінченною передісторією, які мають властивість тієї чи іншої ймовірнісної стійкості, існують функціонали Ляпунова–Красовського з певними властивостями.

Ключові слова: системи випадкової структури, післядія, стійкість, функціонали Ляпунова–Красовського.

I.V. Yurchenko, V.K. Yasynskyy

THE EXISTENCE OF LYAPUNOV–KRASOVSKII FUNCTIONALS FOR STOCHASTIC DIFFERENTIAL-FUNCTIONAL ITO–SKOROKHOD EQUATIONS UNDER THE CONDITION OF THE SOLUTIONS STABILITY ON PROBABILITY WITH FINITE AFTEREFFECT

Abstract. In the paper, it is established that for dynamic systems of random structure with finite prehistory and with the property of one or another probability stability, there exist Lyapunov–Krasovskii functionals with definite properties.

Keywords: systems of random structure, aftereffect, stability, Lyapunov–Krasovskii functionals.

Юрченко Игорь Валерьевич,
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры Черновицкого национального университета имени Юрия Федьковича, e-mail: i.yurchenko@chnu.edu.ua.

Ясинский Владимир Кириллович,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры Черновицкого национального университета имени Юрия Федьковича, e-mail: v.yasynskyy@chnu.edu.ua.