УДК 519.21+62

І.В. САМОЙЛЕНКО, А.В. НІКІТІН

ПОДВІЙНЕ УКРУПНЕННЯ ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТОХАСТИЧНИМИ МАЛИМИ ДОБАВКАМИ В УМОВАХ ПУАССОНОВОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

Анотація. Проведено подвійне укрупнення фазового простору станів для стохастичної еволюційної системи. Розглянуто випадок, коли збурення системи визначаються імпульсним процесом у схемі пуассонової апроксимації. Граничний процес за таких умов має дві складові: детермінований зсув та пуассонову стрибкову частину.

Ключові слова: стохастична еволюційна система, подвійне укрупнення фазового простору, схема пуассонової апроксимації.

ВСТУП

У багатьох випадках під час аналізу складних систем виникають труднощі, які полягають у суттєвому ускладненні фазового простору системи. Це часто призводить до практичної неможливості наочного представлення моделі. Актуальна проблема сучасної теорії систем — це розвиток математично обґрунтованих методів побудови спрощених моделей, аналіз яких не викликає значних труднощів і при цьому їхні відповідні характеристики можуть бути прийняті як відповідні характеристики реальних моделей.

Ідеї вивчення властивостей складних систем на основі дослідження властивостей їхніх частин з подальшим переходом до загальної системи є основою багатьох методів системного аналізу. Вперше алгоритм фазового укрупнення станів системи запропонували і описали В.С. Королюк та А.Ф. Турбін у роботах [1, 7]. Аналіз укрупненої системи значно спрощується, але разом з тим, у випадку вдалого розщеплення фазового простору, основні характеристики спрощеної системи можуть досить точно відображати відповідні характеристики вихідної. Своєю чергою, близькість реальної та укрупненої систем означає близькість глобальних характеристик, що визначаються на зростаючих інтервалах часу. Важливою властивістю алгоритмів фазового укрупнення є можливість побудови ієрархії укрупнених систем $\hat{S}, \hat{\hat{S}}, \ldots$

Випадкова еволюція у вигляді диференціального рівняння зі стохастичними доданками використовується для опису широкого класу природних процесів у багатьох галузях науки. Винятково важливим випадком є аналіз поведінки подібних еволюційних систем у випадковому середовищі. Ці системи досліджено у багатьох роботах А.В. Скорохода, М.Й. Гіхмана, М.М. Боголюбова та ін. Детальну бібліографію з цієї проблематики можна знайти, приміром, у монографіях В.С. Королюка [2, 3, 4]. Особливу увагу варто звернути на роботи [5, 6, 8, 9], у яких започатковано підходи, застосовані в цій статті, зокрема, до вивчення асимптотичних властивостей еволюційної системи в умовах пуассонової апроксимації.

У цій роботі проаналізовано випадок, коли збурення системи визначаються стрибкоподібним процесом у схемі пуассонової апроксимації. Насамперед, розглянуто подвійне фазове укрупнення простору станів цих еволюційних моделей.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Стохастичну еволюційну систему в ергодичному марковському середовищі задають стохастичним диференціальним рівнянням

$$du^{\varepsilon}(t) = C(u^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon^2))dt + d\eta^{\varepsilon}(t), \quad u^{\varepsilon}(t) \in \mathrm{R}, \tag{1}$$

де марковський процес $x(t/\varepsilon^2)$, $t \ge 0$, визначається на стандартному фазовому просторі $(\mathrm{E}, \mathcal{E})$ з розщепленням

$$E = \bigcup_{k=1}^{N} E_k, \ E_k \cap E_{k'} = \varnothing, \ k \ne k',$$

у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$.

Марковське ядро має вигляд

$$Q^{\varepsilon}(x, B, t) = P^{\varepsilon}(x, B)[1 - \exp\{-q(x)t\}], \ x \in E, \ B \in \mathcal{E}, \ t \ge 0 .$$

Нехай при цьому виконуються такі умови [2].

МЕ1. Ядро, що описує перехідні імовірності вкладеного ланцюга Маркова x_n^{ε}, $n \ge 0$, має таке представлення:

$$P^{\varepsilon}(x, B) = P(x, B) + \varepsilon P_1(x, B) .$$

Стохастичне ядро $P(x, B)$ на розщепленому фазовому просторі визначається так:

$$P(x, E_k) = \mathbf{1}_k(x) = \begin{cases} 1, x \in E_k, \\ 0, x \notin E_k. \end{cases}$$

Стохастичне ядро $P(x, B)$ визначає супроводжувальний ланцюг Маркова x_n, $n \ge 0$, на класах E_k, $1 \le k \le N$. Крім того, збурювальне ядро $P_1(x, B)$ задовольняє умову

$$P_1(x, E) = 0,$$

що є прямим наслідком рівності $P^{\varepsilon}(x, E) = P(x, E) = 1$.

МЕ2. Асоційований марковський процес $x^0(t)$, $t \ge 0$, заданий генератором

$$Q\varphi(x) = q(x)\int_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)]$$

є рівномірно ергодичним на кожному з класів E_k, $1 \le k \le N$, зі стаціонарними розподілами $\pi_k(dx)$, $1 \le k \le N$, які задовольняють співвідношення:

$$\pi_k(dx)q(x) = q_k \rho_k(dx), \ q_k := \int_{E_k} \pi_k(dx)q(x),$$

де $\rho(dx)$ — стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова.

МЕ3. Усереднені ймовірності виходу

$$\hat{p}_k := q(x)\int_{E_k} \rho_k(dx)P_1(x, E \setminus E_k) > 0, \ 1 \le k \le N.$$

Таким чином, збурювальне ядро $P_1(x, B)$ визначає перехідні ймовірності між класами E_k, $1 \le k \le N$. Отже, рівність $P^{\varepsilon}(x, B) = P(x, B) + \varepsilon P_1(x, B)$ означає, що вкладений ланцюг Маркова x_n^{ε}, $n \ge 0$, перебуває протягом тривалого проміжку часу в кожному з класів E_k та перестрибує між класами з малими ймовірностями $\varepsilon P_1(x, E \setminus E_k)$.

За умов **МЕ1**–**МЕ3** має місце слабка збіжність [3]

$$\upsilon(x^{\varepsilon}(t)) \Rightarrow \hat{x}(t), \ \varepsilon \to 0, \ \upsilon(x) = k \in \hat{E} = 1, \ldots, N, \ x \in E_k, \ 1 \le k \le N.$$

Граничний марковський процес $\hat{x}(t)$, $t \ge 0$, на укрупненому фазовому просторі $\hat{E} = \{1, \ldots, N\}$ визначається генерувальною матрицею

$$\hat{Q}_1 = (\hat{q}_{kr}, 1 \le k, r \le N),$$

де

$$\hat{q}_{kr} = \hat{q}_k \hat{p}_{kr},\ k \neq r, \hat{q}_k = q_k \hat{p}_k,\ 1 \le k \le N,$$

$$\hat{p}_{kr} = p_{kr} / \hat{p}_k\ ,\ \ p_{kr} = \int_{E_k} \rho_k(dx) P_1(x, E_r), 1 \le k, r \le N, k \neq r,$$

$$\hat{p}_k = -\int_{E_k} \rho_k(dx) P_1(x, E_k)\ .$$

МЕ4. Укрупнений марковський процес $\hat{x}(t), t \ge 0$, є ергодичним зі стаціонарним розподілом $\hat{\pi} = (\pi_k, k \in \hat{E})$.

Таким чином, оператор Q^ε можна подати у вигляді

$$Q^\varepsilon = Q + \varepsilon Q_1,$$

$$Q(x) = q(x) \int_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)],$$

$$Q_1(x) = q(x) \int_E P_1(x, dy) \varphi(y).$$

Нехай Π — проектор на нуль-підпростір зведено-оборотного оператора Q. Його дія на тест-функції визначається так:

$$\Pi\varphi(x) = \sum_{k=1}^N \hat{\varphi}_k \mathbf{1}_k(x),\ \ \hat{\varphi}_k := \int_{E_k} \pi_k(dx) \varphi(dx)\ .$$

Зведений оператор $\hat{Q}_1$ визначимо за допомогою співвідношення

$$\hat{Q}_1 \Pi = \Pi Q_1 \Pi\ .$$

Нехай $\hat{\Pi}$ — проектор на нуль-підпростір зведено-оборотного оператора $\hat{Q}_1$:

$$\hat{\Pi}\hat{\varphi} := q(x) \sum_{k \in \hat{E}} \hat{\pi}_k \hat{\varphi}_k\ .$$

Потенціальна матриця $\hat{R}_0 = [\hat{R}^0_{kl}; 1 \le k, l \le N]$ визначається співвідношеннями

$$\hat{Q}_1 \hat{R}_0 = \hat{R}_0 \hat{Q}_1 = \hat{\Pi} - I.$$

ІМПУЛЬСНИЙ ПРОЦЕС ЗБУРЕНЬ

Імпульсний процес збурень (ІПЗ) $\eta^\varepsilon(t), t \ge 0$, у схемі пуассонової апроксимації задається співвідношенням

$$\eta^\varepsilon(t) = \int_0^t \eta^\varepsilon(ds, x(s/\varepsilon^2))\ ; \tag{2}$$

де сукупність процесів з незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t, x), t \ge 0, x \in X$, визначається генераторами

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-1} \int_R (\varphi(w+v) - \varphi(w))\, \Gamma^\varepsilon(dv, x), x \in X, \tag{3}$$

і задовольняє такі умови пуассонової апроксимації [2, 8, 9].

Р1. Апроксимація середніх:

$$\int_R v \Gamma^\varepsilon(dv, x) = \varepsilon(a(x) + \theta_a(x)),\ \ \theta_a(x) \to 0, \varepsilon \to 0,$$

та

$$\int_R v^2 \Gamma^\varepsilon(dv, x) = \varepsilon(b(x) + \theta_b(x)),\ \theta_b(x) \to 0, \varepsilon \to 0.$$

Р2. Умова на функцію розподілу:

$$\int_R g(v) \Gamma^\varepsilon(dv, x) = \varepsilon(\Gamma_g(x) + \theta_g(x)),\ \theta_g(x) \to 0, \varepsilon \to 0,$$

для всіх $g(v) \in C^2(R)$. Тут міра $\Gamma_g(x)$ обмежена для всіх $g(v) \in C^2(R)$ та визначається співвідношенням

$$\Gamma_g(x) = \int_R g(v) \Gamma_0(dv, x),\ g(v) \in C^2(R).$$

Р3. Рівномірна квадратична інтегровність:

$$\sup \lim_{c \to \infty} \int_{|v|>c} v^2 \Gamma_0(dv, x) = 0.$$

Р4. Відсутність дифузійної складової:

$$b(x) = \int_R v^2 \Gamma_0(dv, x).$$

Введемо позначення

$$\Gamma_1(x)\varphi(w) = a(x)\varphi'(w) + \int_R [\varphi(w+v) - \varphi(v) - v\varphi'(w)]\Gamma_0(dv, x).$$

Розглянемо асимптотичні властивості процесу збурення.

Теорема 1. За виконання умов **Р1–Р4** для ІПЗ (2) справджується слабка збіжність у сенсі збіжності відповідних генераторів

$$\eta^\varepsilon(t) \to \eta^0(t),\ \varepsilon \to 0.$$

Граничний процес $\eta^0(t)$ визначається генератором

$$\hat{\hat{\Gamma}}\varphi(w) = \hat{\Pi}\hat{\Gamma}_1(x)\varphi(w) = \hat{\hat{a}}\varphi'(w) + \int_R [\varphi(w+v) - \varphi(w) - v\varphi'(w)]\hat{\hat{\Gamma}}_0(dv),$$

де $\hat{\hat{a}} = \sum_{k \in \hat{E}} \hat{\pi}_k \int_{E_k} \pi_k(dx) a(x)$, $\hat{\hat{\Gamma}}_0(v) = \sum_{k \in \hat{E}} \hat{\pi}_k \int_{\hat{E}_k} \pi(dx) \Gamma_0(v, x)$, і є процесом з незалежними приростами, який має детермінований зсув та пуассонову стрибкову частину.

Доведення теореми 1.

Лема 1. Генератори процесів з незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t, x)$, $t \ge 0$, $x \in X$, на тест-функціях $\varphi(w) \in C^2(R)$ за умов **Р1–Р4** допускають асимптотичне представлення

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w) = \Gamma_1(x)\varphi(w) + \gamma^\varepsilon(x)\varphi(w), \tag{4}$$

де

$$\Gamma_1(x)\varphi(w) = a(x)\varphi'(w) + \int_R [\varphi(w+v) - \varphi(v) - v\varphi'(w)]\Gamma_0(dv, x),$$

а залишковий член $\|\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w)\| \to 0$ для $\varepsilon \to 0,\ \varphi(w, \cdot) \in C^2(R)$.

Доведення. Використовуючи розклад функції $\Gamma_1(x)\varphi(w)$ у ряд Тейлора, здійснимо перетворення генератора (3):

$$\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(w)=\varepsilon^{-1}\int_{R}(\varphi(w+\upsilon)-\varphi(w))\Gamma^{\varepsilon}(d\upsilon,x)=$$

$$=\varepsilon^{-1}\int_{R}(\varphi(w+\upsilon)-\varphi(w)-\upsilon\varphi'(w)-\frac{1}{2}\upsilon^{2}\varphi''(w))\Gamma^{\varepsilon}(d\upsilon,x)+$$

$$+\varepsilon^{-1}\int_{R}\upsilon\varphi'(w)\Gamma^{\varepsilon}(d\upsilon,x)+\frac{\varepsilon^{-1}}{2}\int_{R}\upsilon^{2}\varphi''(w)\Gamma^{\varepsilon}(d\upsilon,x)=$$

$$=\int_{R}(\varphi(w+\upsilon)-\varphi(w)-\upsilon\varphi'(w)-\frac{1}{2}\upsilon^{2}\varphi''(w))\Gamma_{0}(d\upsilon,x)+$$

$$+a(x)\varphi'(w)+\frac{1}{2}b(x)\varphi''(w)+\gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(w)=$$

$$=\int_{R}(\varphi(w+\upsilon)-\varphi(w)-\upsilon\varphi'(w))\Gamma_{0}(d\upsilon,x)+a(x)\varphi'(w)+\gamma^{\varepsilon}(w)\varphi(w),$$

де передостання рівність випливає з умов **Р1–Р3** (зауважимо, що функція $\varphi(w+\upsilon)-\varphi(w)-\upsilon\varphi'(w)-\frac{1}{2}\upsilon^{2}\varphi''(w)\in C^{2}(\mathrm{R})$, оскільки є обмеженою на підставі обмеженості $\varphi(w)$ разом з її похідними, і $[\varphi(w+\upsilon)-\varphi(w)-\upsilon\varphi'(w)-$ $-\frac{1}{2}\upsilon^{2}\varphi''(w)]/|\upsilon|^{2}\to 0,\ |\upsilon|\to 0)$.

Пам'ятаючи, що $\gamma^{\varepsilon}(w)\varphi(w)=O(\varepsilon^{2}),\varphi(w)\in C^{2}(\mathrm{R})$, отримаємо представлення (4).

Лема 2. Генератор двокомпонентного марковського процесу $(\eta^{\varepsilon},x(t/\varepsilon^{2})),\ t\geq 0$, має вигляд

$$\hat{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x)=\varepsilon^{-2}Q^{\varepsilon}\varphi(u,w,x)+\Gamma_{1}(x)\varphi(u,w,x)+\gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x), \tag{5}$$

де оператор $\Gamma_{1}(x)$ визначено у лемі 1, а залишковий член $\|\gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x)\|\to 0$ для $\varepsilon\to 0,\varphi(u,w,\cdot)\in C^{2}(R)$.

Доведення. Представлення генератора (5) отримаємо, якщо використати означення генератора марковського процесу та вигляд відповідних генераторів процесів $\eta^{\varepsilon}(t,x)$ і $x(t/\varepsilon^{2})$.

Зрізаний оператор має таку структуру [6]:

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}\varphi(u,w,x)=\varepsilon^{-2}Q^{\varepsilon}\varphi(u,w,x)+\Gamma_{1}(x)\varphi(u,w,x) \tag{6}$$

Лема 3. Розв'язок задачі сингулярного збурення для зрізаного оператора (6) на тест-функціях

$$\varphi^{\varepsilon}(u,w,x)=\varphi(u,w)+\varepsilon\varphi_{1}(u,w,x)+\varepsilon^{2}\varphi_{2}(u,w,x)$$

реалізується співвідношенням

$$\Gamma_{0}^{\varepsilon}(x)\varphi^{\varepsilon}(u,x)=\hat{\hat{L}}\varphi(u)+\varepsilon\theta_{\eta}^{\varepsilon}(x)\varphi(u), \tag{7}$$

де залишковий член є рівномірно обмеженим по x.

Граничний оператор $\hat{\hat{L}}$ з (7) визначається формулою

$$\hat{\hat{L}}=\hat{\Pi}\hat{\Gamma}_{1}\hat{\Pi}, \tag{8}$$

Доведення. Обчислимо

$$(\varepsilon^{-2}Q + \varepsilon^{-1}Q_1 + \Gamma_1)(\varphi + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2) =$$

$$= \varepsilon^{-2}Q\varphi + \varepsilon^{-1}(Q\varphi_1 + Q_1\varphi) + (Q\varphi_2 + Q_1\varphi_1 + \Gamma_1\varphi) + o(\varepsilon)\,.$$

Звідси отримуємо три співвідношення:

$$Q\varphi(w) = 0, \tag{9}$$

$$Q\varphi_1 + Q_1\varphi = 0, \tag{10}$$

$$Q\varphi_2 + Q_1\varphi_1 + \Gamma_1\varphi = \hat{\hat{L}}\varphi. \tag{11}$$

Встановимо, який вигляд має $\hat{\hat{L}}$. З (9) випливає, що $\varphi \in N_Q$. Оскільки $\varphi \in N_Q$, із співвідношення (10) та умови розв'язності матимемо

$$\Pi Q_1 \Pi\varphi = 0\,.$$

Уведемо позначення

$$\Pi Q_1 = \hat{Q}_1,\ \ \Pi\varphi = \hat{\varphi}.$$

Тоді

$$\hat{Q}_1\hat{\varphi} = 0,$$

звідки

$$\hat{\varphi} \in N_{\hat{Q}_1}\,.$$

Перейдемо до (11) і з умови розв'язності для Q отримаємо

$$\Pi Q_1 \Pi\varphi_1 + \Pi\Gamma_1\Pi\varphi = \Pi\hat{\hat{L}}\Pi\varphi. \tag{12}$$

Тоді матимемо

$$\hat{Q}_1\hat{\varphi}_1 + \hat{\Gamma}_1\hat{\varphi} = \hat{\hat{L}}\hat{\varphi}.$$

Своєю чергою, з умови розв'язності для $\hat{\varphi}_2$ і формули (12)

$$\hat{\Pi}\hat{\Gamma}_1\hat{\Pi}\hat{\varphi} = \hat{\hat{L}}\hat{\hat{\varphi}},$$

звідки маємо представлення (8)

$$\hat{\hat{L}} = \hat{\Pi}\hat{\Gamma}_1\hat{\Pi},$$

а також

$$\hat{\varphi}_1 = \hat{R}_0[\hat{\Gamma}_1 - \hat{\hat{L}}]\hat{\varphi}\,,$$

$$\hat{\varphi}_2 = R_0(Q_1\varphi_1 + \Gamma_1\varphi - \hat{\hat{L}}\varphi)\,.$$

Обмеженість $\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(\omega)$ випливає з вигляду операторів Γ_1 та R_0.

Доведення теореми завершують з використанням леми 3 і теореми 4.2 із [3].

ПОВЕДІНКА ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

Розглянемо асимптотичні властивості вихідної еволюційної системи (1).

Теорема 2. За виконання умов **P1**–**P4** справедлива слабка збіжність

$$(u^\varepsilon(t), \eta^\varepsilon(t)) \to (\hat{\hat{u}}(t), \eta^0(t))\,,\ \ \varepsilon \to 0\,.$$

Граничний процес $(\hat{\hat{u}}(t), \eta^0(t))$ визначається генератором

$$\mathbf{L}\varphi(u, w) = \hat{\hat{C}}(u)\varphi'_u(u, w) + \hat{\hat{\Gamma}}^w\varphi(\cdot, w)\,, \tag{13}$$

де

$$\hat{\hat{C}}(u) = \Pi \mathbf{C}(x) = \sum_{k \in \hat{E}} \hat{\pi}_k \int_{\hat{E}_k} \pi(dx) C(u, x),$$

а генератор $\hat{\hat{\Gamma}}^w$ визначений у теоремі 1, але діє за змінною w.

Зауваження 1. Слабка збіжність процесів $u^\varepsilon(t) \Rightarrow \hat{\hat{u}}(t)$, $\varepsilon \to 0$, буде випливати зі збіжності відповідних генераторів за умови компактності допграничної сукупності процесів $u^\varepsilon(t)$. Відповідні теореми про компактність процесів з незалежними приростами в схемі пуассонової апроксимації було доведено, зокрема, в [4].

Доведення теореми 2.

Лема 4. Генератор трикомпонентного марковського процесу $(u^\varepsilon(t), \eta^\varepsilon(x, t), x^\varepsilon(t/\varepsilon^2)), t \ge 0$, має представлення

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x) = \varepsilon^{-2} Q^\varepsilon \varphi(u, w, x) + \varepsilon \Gamma_u^\varepsilon(x)\varphi(u, \cdot, x) + \Gamma_w^\varepsilon(x)\varphi(\cdot, w, x)$$
$$+ \mathbf{C}(x)\varphi(u, w, x) + \theta_\omega^\varepsilon \varphi(u, w, x), \tag{14}$$

де $\Gamma_\bullet^\varepsilon(x)$ — генератор сукупності ІПЗ (3),

$$\mathbf{C}(x)\varphi(u, w, x) = C(u, x)\varphi'_u(u, w, x).$$

Залишковий член $\| \theta_\omega^\varepsilon(x)\varphi(w, x) \| \to 0$ для $\varepsilon \to 0$.

Доведення леми і вигляд генератора (14) можна знайти в [7].

Лема 5. Генератор $\mathbf{L}^\varepsilon(x)$ у випадку імпульсного процесу збурень допускає асимптотичне представлення

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x) = \varepsilon^{-2} Q^\varepsilon \varphi(u, w, x) + \varepsilon \Gamma_1^u(x)\varphi(u, w, x) + \tag{15}$$

$$+ \Gamma_1^w(x)\varphi(u, w, x) + \mathbf{C}(x)\varphi(u, w, x) + \hat{\theta}_w^\varepsilon \varphi(u, w, x),$$

де

$$\hat{\theta}_w^\varepsilon(x) = \gamma^\varepsilon + \theta_w^\varepsilon(x),$$

$\Gamma_1^\bullet(x)$ визначено у лемі 1. Залишковий член $\| \hat{\theta}_w^\varepsilon(x)\varphi(w, x) \| \to 0$, якщо $\varepsilon \to 0$.

Використовуючи представлення оператора (4) та результати леми 4, отримаємо співвідношення (15).

Зрізаний оператор має вигляд

$$\mathbf{L}_0^\varepsilon(x)\varphi = \varepsilon^{-2} Q^\varepsilon \varphi + \Gamma_1^w(x)\varphi + \mathbf{C}(x)\varphi. \tag{16}$$

Лема 6. Розв'язання проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора (16) на тест-функціях

$$\varphi^\varepsilon(w, x) = \varphi(w) + \varepsilon \varphi_1(w, x) + \varepsilon^2 \varphi_2(w, x)$$

здійснюється зі співвідношення

$$\mathbf{L}_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(w, x) = \mathbf{L}\varphi(w) + \varepsilon^3 \theta_\omega^\varepsilon(x)\varphi(w), \tag{17}$$

де залишковий член $\theta_\omega^\varepsilon(x)$ є рівномірно обмеженим по x.

Граничний оператор $\mathbf{L}$ задається формулою

$$\mathbf{L} = \hat{\hat{\mathbf{C}}} + \hat{\hat{\Gamma}}_1^w. \tag{18}$$

Доведення. Для виконання рівності (17) необхідно, щоб коефіцієнти при однакових степенях ε зліва та справа були однаковими. З цією метою обчислимо

$$(\varepsilon^{-2}Q+\varepsilon^{-1}Q_1+\Gamma_1^w+\mathbf{C})(\varphi+\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2)=$$

$$=\varepsilon^{-2}Q\varphi+\varepsilon^{-1}(Q\varphi_1+Q_1\varphi)+(Q\varphi_2+Q_1\varphi_1+\Gamma_1^w\varphi+\mathbf{C})+o(\varepsilon)\,.$$

Знову отримаємо три співвідношення:

$$Q\varphi=0\,, \tag{19}$$

$$Q\varphi_1+Q_1\varphi=0\,, \tag{20}$$

$$Q\varphi_2+Q_1\varphi_1+\Gamma_1^w\varphi=\hat{\hat{L}}\varphi. \tag{21}$$

Встановимо вигляд $\hat{\hat{L}}$. З (19) випливає, що $\varphi\in N_Q$. Оскільки $\varphi\in N_Q$, із (20) і умови розв'язності матимемо

$$\Pi Q_1\Pi\varphi=0.$$

Уведемо позначення

$$\Pi Q_1=\hat{Q}_1,\ \ \Pi\varphi=\hat{\varphi}\,.$$

Тоді

$$\hat{Q}_1\hat{\varphi}=0\,,$$

звідки

$$\hat{\varphi}\in N_{\hat{Q}_1}\,.$$

Розглянемо (21). З умови розв'язності для Q матимемо

$$\Pi Q_1\Pi\varphi_1+\Pi\Gamma_1^w\Pi\varphi+\Pi\mathbf{C}\Pi\varphi=\Pi\hat{\hat{L}}\Pi\varphi, \tag{22}$$

звідки

$$\hat{Q}_1\hat{\varphi}_1+\hat{\Gamma}_1^w\hat{\varphi}+\hat{\mathbf{C}}\hat{\varphi}=\hat{\hat{L}}\hat{\varphi}.$$

Своєю чергою, з умови розв'язності для $\hat{\varphi}_2$ маємо

$$\hat{\Pi}\hat{\mathbf{C}}\hat{\Pi}\hat{\varphi}+\hat{\Pi}\hat{\Gamma}_1^w\hat{\Pi}\hat{\varphi}=\hat{\hat{L}}\hat{\hat{\varphi}}\,,$$

звідки витікає представлення (18)

$$\hat{\hat{L}}=\hat{\Pi}\hat{\mathbf{C}}\hat{\Pi}+\hat{\Pi}\hat{\Gamma}_1^w\hat{\Pi}\,,$$

$$\hat{\varphi}_1=\hat{R}_0[\hat{\hat{L}}-\hat{\Gamma}_1^w-\hat{\mathbf{C}}]\hat{\varphi},$$

$$\hat{\varphi}_2=R_0(\hat{\hat{L}}\varphi+Q_1\varphi_1+\Gamma_1^w\varphi+\mathbf{C}\varphi)\,.$$

Обмеженість $\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(\omega)$ випливає з вигляду операторів Γ_1 та R_0.

Завершення доведення теореми та отримання вигляду генератора (13) здійснюється з використанням леми 3 і теореми 6.3 з [3].

ВИСНОВКИ

Укрупнення фазового простору станів еволюційної системи здійснено у два етапи. На першому укрупнено кожну з підмножин станів, у яких марковський процес перебуває протягом великого інтервалу часу, за відповідною стаціонарною мірою, і таким чином, їх зведено до рівня одного стану. На другому етапі виконано усереднення за стаціонарною мірою рідкісних стрибків між отриманими укрупненими підмножинами марковського процесу. Це дає змогу отримати граничні генератори для укрупнених систем, що узагальнюють моделі з рівноправним набором станів перемикального процесу, та дослідити умови їхньої асимптотичної поведінки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Королюк В.С., Турбін А.Ф. Полумарковские процессы и их приложения. Київ: Наук. думка, 1976. 184 с.
2. Korolyuk V.S., Korolyuk V.V. Stochastic models of systems. Dordrecht: Kluwer. 1999. 185 с.
3. Korolyuk V.S., Limnios N. Stochastic systems in merging phase space. Singapore: World Scientific, 2005. 330 с.
4. Korolyuk V.S., Limnios N., Samoilenko I.V. Lévy and Poisson approximations of switched stochastic systems by a semimartingale approach. *Comptes Rendus Mathématique*. 2016. Vol. 354, Iss. 7. P. 723–728.
5. Samoilenko I.V., Nikitin A.V. Differential equations with small stochastic terms under the Lévy approximation conditions. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2018. Vol. 69, N 9, P. 1445–1454.
6. Samoilenko A.M., Stanzhytskyi O.M. Qualitative and asymptotic analysis of differential equations with random perturbations. Singapore: World Scientific, 2011. 323 p.
7. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. Киев: Наук. думка, 1982. 236 с.
8. Samoilenko I.V., Chabanyuk Y.M., Nikitin A.V., Khimka U.T. Differential equations with small stochastic additions under Poisson approximation conditions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 3. P. 410–416.
9. Samoilenko I.V., Chabanyuk Y.M., Nikitin A.V. Asymptotic dissipativity of random processes with impulse perturbation in the Poisson approximation scheme. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 2. P. 205–211.

Надійшла до редакції 14.03.2018

И.В. Самойленко, А.В. Никитин

ДВОЙНОЕ УКРУПНЕНИЕ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СТОХАСТИЧЕСКИ МАЛЫМИ ДОБАВКАМИ В УСЛОВИЯХ ПУАССОНОВОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Аннотация. Проведено двойное укрупнение фазового пространства состояний для стохастической эволюционной системы. Рассмотрен случай, когда возмущения системы определяются импульсным процессом в схеме пуассоновой аппроксимации. Предельный процесс при таких условиях имеет две составляющие: детерминированный снос и пуассонову скачковую добавку.

Ключевые слова: стохастическая эволюционная система, двойное укрупнение фазового пространства, схема пуассоновой аппроксимации.

I.V. Samoilenko, A.V. Nikitin

DOUBLE MERGING OF THE PHASE SPACE FOR STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SMALL ADDITIONS IN POISSON APPROXIMATING CONDITIONS

Abstract. Double merging of phase space for the stochastic evolutionary system is carried out. The case is considered where the system's perturbations are determined by the impulse process at the Poisson approximation scheme. The limiting process under such conditions has two components: deterministic shift and Poisson jump addition.

Keywords: stochastic evolutionary system, double merging of phase space, Poisson approximation scheme.

Самойленко Ігор Валерійович,
доктор фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри Київського національного університету імені Тараса Шевченка, e-mail: isamoil@i.ua

Нікітін Анатолій Володимирович,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент, завідувач науково-дослідної лабораторії Київського національного університету імені Тараса Шевченка, e-mail: nikitin2505@gmail.com