



ПРОГРАМНО-ТЕХНИЧНИ КОМПЛЕКСИ

А.С. ГОРОДЕЦКИЙ, М.С. БАРАБАШ, Ю.Б. ФИЛОНЕНКО

УДК 624.048

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЖЕСТКОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ

Аннотация. Рассмотрены некоторые аспекты определения жесткостных характеристик сечения стержневых элементов и моделирования напряженно-деформированного состояния стержневых систем. Предложена методика определения напряжений на основе нелинейных зависимостей напряжения–деформации. При численном определении жесткостных характеристик сечения выполнен нелинейный расчет для заданного набора усилий. С помощью реализованной в программном комплексе «ЛИРА-САПР» методики проведения нелинейного расчета определены касательные и секущие жесткостные характеристики. Предлагаемые методы определения жесткостных характеристик и моделирования позволяют более точно задавать характеристики нелинейного деформирования материалов и применять их к элементам конструируемого сечения.

Ключевые слова: численные методы, жесткостные характеристики, компьютерное моделирование, напряженно-деформированное состояние, модуль деформации, нелинейный анализ.

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании строительных и машиностроительных конструкций проводится комплекс расчетов на прочность, жесткость и устойчивость. В последнее время приоритетным направлением становится моделирование жизненного цикла конструкций [1, 2], где важны задачи расчета в нелинейной постановке. В таких расчетах одна из ключевых процедур — определение жесткостных характеристик, осуществить которое аналитическим путем практически невозможно, особенно в нелинейной постановке, а экспериментальные исследования каждого типа конструкций являются весьма трудоемкими. Поэтому разработка численных методов определения жесткостных характеристик элементов конструкций — актуальная задача в строительной отрасли.

Большой вклад в общую теорию методов численного анализа, включая создание и развитие метода конечных элементов, а также методы нелинейного анализа конструкций, внесли В.А. Баженов, И.А. Биргер, И.Н. Молчанов, А.В. Попов, С.П. Тимошенко, А.Н. Химич и др. [3–10].

Целью настоящего исследования является разработка и реализация методики определения жесткостных характеристик сечения, на основе которых проводится нелинейный анализ. Если определить такие жесткостные характеристики, как EF — продольную жесткость, EI_x , EI_y — изгибные жесткости, несложно, то вычислить момент инерции кручения $I_{\text{тор}}$, сдвиговые площади F_y , F_z , секториальный момент инерции I_ω , положение центра кручения и центра изгиба (сдвига), крутильную жесткость $GI_{\text{тор}}$, сдвиговые жесткости GF_y , GF_z , секториальную жесткость EI_ω трудно и, как правило, в этих случаях необходимо применять численные методы.

© А.С. Городецкий, М.С. Барабаш, Ю.Б. Филоненко, 2019

Эти трудности обусловлены сложной конфигурацией сечения и наличием в нем участков из различных материалов. Эти участки могут быть либо из отдельных вкраплений (арматурные стержни в сечении железобетонного элемента), либо в виде полос (сердечник сталежелезобетонного элемента, высокопрочные пленки для многослойной конструкции лопасти вертолета или ветроагрегата и др.).

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК СЕЧЕНИЯ

Для получения крутильных, сдвиговых и секториальных характеристик используется методика, основанная на теории Сен-Венана [4, 10–13]. Основные зависимости получены из соотношений трехмерной теории упругости при соответствующих гипотезах.

Пусть ось x направлена вдоль прямолинейной оси стержня, оси y, z — главные центральные оси сечения. Двумерную область сечения обозначим Ω , единичный вектор нормали к границе Γ имеет вид $n = (n_y, n_z)$. Для вычисления указанных характеристик необходимо определить три функции: ψ_1, ψ_2, ψ_3 , заданные в области Ω ; первая из них соответствует кручению, вторая и третья — сдвигу [3, 14].

Согласно теории Сен-Венана функции ψ_i удовлетворяют в области Ω уравнению $\Delta\psi_i = f_i$, а на границе Γ области Ω — граничному условию:

$$\psi_{i,n} + g_i = 0, \quad (1)$$

где $\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа, $\psi_{i,n}$ — производная ψ_i по направлению нормали к границе Γ :

$$\psi_{i,n} = \frac{\partial\psi_i}{\partial y} n_y + \frac{\partial\psi_i}{\partial z} n_z; \quad f_1 = 0, \quad f_2 = y, \quad f_3 = z; \quad g_1 = yn_z - zn_y; \quad (2)$$

$$g_2 = [(y^2 - z^2)n_y + 2yzn_z] \cdot \mu / 4; \quad g_3 = [2yzn_y + (z^2 - y^2)n_z] \cdot \mu / 4, \quad (3)$$

где μ — коэффициент Пуассона.

Краевая задача Неймана, описанная формулами (1)–(3), для уравнений Лапласа и Пуассона имеет единственное, с точностью до аддитивной постоянной, решение, если

$$\int_{\Omega} f_i d\Omega + \int_{\Gamma} g_i d\Gamma = 0. \quad (4)$$

Условие (4) для данных уравнений выполняется, что можно доказать, используя формулу Грина и учитывая принятую систему координат в центральных осях. Значение аддитивной постоянной определяется из дополнительного условия, например

$$\int_{\Omega} \Psi_i d\Omega = q_i \quad \text{или} \quad \Psi_i(y_0, z_0) = p_i, \quad (5)$$

где q_i, p_i — постоянные, $(y_0, z_0) \in \Omega \cup \Gamma$.

Уравнения (4), (5) соответствуют условиям минимума функционала энергии

$$\int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial z} \right)^2 + 2f_i\Psi_i \right] d\Omega + \int_{\Gamma} 2g_i\Psi_i d\Gamma \quad (6)$$

в классе функций из пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$, удовлетворяющих условию единственности.

Функционал (6) используется для построения системы уравнений метода конечных элементов (МКЭ).

Выбор в качестве искомым функции кручения ψ_1 и функций изгиба ψ_2, ψ_3 вместо функции напряжений Прандтля позволяет получить общий алгоритм решения задач кручения и изгиба и упростить задачу для многосвязной области [3, 4, 7].

По найденной функции ψ_1 вычисляются:

— момент инерции кручения

$$I_{\text{tor}} = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} - z \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} + y \right)^2 \right] d\Omega; \quad (7)$$

— крутильная жесткость

$$GI_{\text{tor}} = \int_{\Omega} G \left[\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} - z \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} + y \right)^2 \right] d\Omega; \quad (8)$$

— координаты центра кручения

$$Y_0 = - \int_{\Omega} z \Psi_1 E d\Omega / EI_y, \quad Z_0 = \int_{\Omega} y \Psi_1 E d\Omega / EI_z, \quad (9)$$

где $EI_y = \int_{\Omega} z^2 E d\Omega$, $EI_z = \int_{\Omega} y^2 E d\Omega$;

— секториальный момент инерции

$$I_{\omega} = \int_{\Omega} \Psi_1^2 d\Omega - Y_0^2 I_y - Z_0^2 I_z - \left(\int_{\Omega} \Psi_1 d\Omega \right)^2 / F, \quad F = \int_{\Omega} d\Omega; \quad (10)$$

— секториальная жесткость

$$EI_{\omega} = \int_{\Omega} E \Psi_1^2 d\Omega - Y_0^2 EI_y - Z_0^2 EI_z - \left(\int_{\Omega} E \Psi_1 d\Omega \right)^2 / EF, \quad EF = \int_{\Omega} E d\Omega; \quad (11)$$

— координаты центра изгиба (сдвига)

$$\bar{Y} = Y_0 + \frac{1}{EI_y} \left[\int_{\Omega} G \mu y^3 d\Omega + \int_{\Gamma} G \mu \Psi_1 y^2 n_z d\Gamma \right], \quad (12)$$

$$\bar{Z} = Z_0 + \frac{1}{EI_z} \left[\int_{\Omega} G \mu z^3 d\Omega + \int_{\Gamma} G \mu \Psi_1 z^2 n_y d\Gamma \right]. \quad (13)$$

Сдвиговые площади F_y, F_z вычисляются по функциям ψ_2, ψ_3 . Обозначим

$$\eta_{22} = \frac{\mu(y^2 - z^2)}{4} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y}, \quad \eta_{33} = \frac{\mu(z^2 - y^2)}{4} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z}, \quad (14)$$

$$\eta_{23} = \frac{\mu y z}{2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z}, \quad \eta_{32} = \frac{\mu y z}{2} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y}, \quad (15)$$

$$q_2 = \int_{\Omega} (\eta_{32}^2 + \eta_{33}^2) \cdot 4G^2 d\Omega, \quad q_3 = \int_{\Omega} (\eta_{22}^2 + \eta_{23}^2) \cdot 4G^2 d\Omega. \quad (16)$$

Тогда $F_y = \frac{q_3}{EI_z^2}, F_z = \frac{q_2}{EI_y^2}$ и

$$GF_y = \int_{\Omega} G d\Omega \cdot \frac{F_y}{F}, \quad GF_z = \int_{\Omega} G d\Omega \cdot \frac{F_z}{F}. \quad (17)$$

Изложенная методика применяется и для тонкостенных сечений. Область такого сечения разбивается на прямоугольные полосовые элементы. Искомые функции $\psi_i(y, z)$ на каждом прямоугольнике представляются в виде $\psi_i(y, z) = \varphi_i(y) + z\xi_i(y)$, где ось y направлена вдоль длинной стороны, ось z — вдоль короткой. Тогда $\frac{\partial \psi_i}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + z \frac{\partial \xi_i}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi_i}{\partial z} = \xi_i(y)$.

Выбрав линейные функции формы для φ_i и ξ_i и подставив эти формулы в функционал энергии, получим уравнения МКЭ из условия минимума этого функционала. Характеристики тонкостенного сечения вычисляются по найденным ψ_i так же, как и в общем случае.

При реализации МКЭ применяются треугольные и полосовые (для тонкостенных сечений) конечные элементы с полилинейной функцией формы, хотя можно использовать и высокоточные полиномы [5, 14, 15].

Построение матрицы жесткости, вектора правых частей конечного элемента, формирование системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) проводится по стандартному алгоритму МКЭ [14, 15]. В результате приходим к решению СЛАУ с разреженной положительно полуопределенной матрицей. Для выделения единственного решения задается произвольное значение в одном из узлов области или контура. Вместо этого можно находить обобщенное решение, используя специально разработанные для этого методы, например метод трехэтапной регуляризации, в котором предлагается итерационный алгоритм выбора параметра регуляризации для решения задачи с требуемой точностью [7].

Для решения СЛАУ и вычисления жесткостных характеристик сечения используется многофункциональный процессор программного комплекса «ЛИРА-САПР», в том числе процессор «ЛИРА-cluster», который ориентирован на использование современных средств высокопроизводительных вычислений [7–9, 16]. Дискретизация области и построение расчетной модели выполняется подсистемой «Конструктор сечений».

Задача определения жесткостных характеристик значительно усложняется при расчете конструкций в нелинейной постановке. Как правило, все методы решения нелинейных задач основаны на решении рекуррентной последовательности линейных уравнений. При использовании шаговых методов необходимо определять для каждого шага жесткостные характеристики, соответствующие касательным модулям деформации, а при применении метода секущих — жесткостные характеристики, соответствующие секущим модулям деформации. В этом случае при нелинейных зависимостях σ – ε модули деформации по сечению имеют переменное значение и зависят от усилий, действующих на сечение.

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЖЕСТКОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Алгоритм вычисления жесткостных характеристик, соответствующих касательным или секущим модулям деформации, состоит в следующем:

- для заданного сечения и заданных действующих на сечение усилий на k -м шаге шагового метода или k -й итерации метода секущих находятся положение центра тяжести, поворот осей и кривизна сечения (y_c, β, ξ);
- на основании найденных y_c, β, ξ определяются деформации элементарных участков сечения (принята гипотеза плоских сечений);
- для каждого участка определяется касательный или секущий модуль деформации;
- касательные или секущие жесткостные характеристики $GI_{\text{тор}}, Y_0, Z_0, GF_y, GF_x$ вычисляются по формулам (7)–(17) для переменных по сечению модулей деформации.

На рис. 1 представлено произвольное сечение железобетонного стержня, на которое действуют два момента: M_x и M_y , а также нормальная сила N . В качестве примера (см. рис. 1) показано биматериальное сечение железобетонного элемента, поскольку, во-первых, этот материал наиболее распространен в строительной практике, а во-вторых, зависимость σ – ε для бетона достаточно сложна — сжатый бетон имеет нелинейную нисходящую ветвь, а растянутый теряет несущую способность

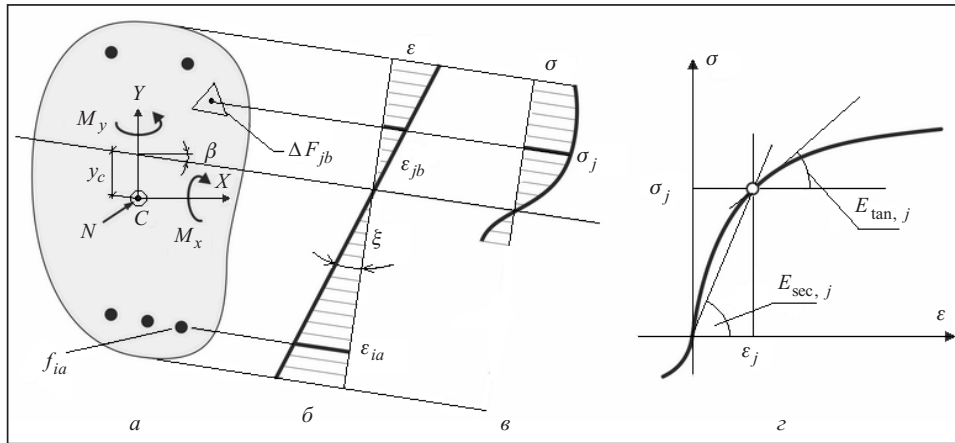


Рис. 1. Напряженно-деформированное состояние сечения стержня: произвольное (а); эпюра деформаций (б); эпюра напряжений в бетоне (в); зависимость σ - ϵ для бетона (г)

уже при небольших растягивающих напряжениях [17]. Моменты M_x и M_y действуют относительно главных осей и сечения x и y . Нормальная сила N приложена в точке C — пересечении геометрической оси стержня с плоскостью сечения. Требуется определить жесткостные характеристики сечения $E_{\tan, j}$ и $E_{\sec, j}$, соответствующие секущим или касательным модулям деформации бетона и арматуры. Для определения напряженно-деформированного состояния (НДС) сечения необходимо найти положение нейтральной оси, которое характеризуется величинами y_c , β и кривизной сечения ξ , а также ΔF_{jb} , f_{ia} — элементарные участки, на которые расчленяется сечение бетона и площади отдельных стержней арматуры (см. рис. 1).

Решение задачи выполняется численным методом. В результате итерационного процесса определяются три неизвестных: y_c , β , ξ , которые находятся из трех уравнений равновесия по формулам:

$$\begin{aligned} \sum Z &= 0, \quad \sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \\ \sum Z &= \sum_{j=1}^n \Delta F_{jb} \cdot \sigma_{jb}(y_c, \beta, \xi) + \sum_{i=1}^m f_{ia} \sigma_{ia}(y_c, \beta, \xi) + N = 0, \\ \sum M_x &= \sum_{j=1}^n \Delta F_{jb} \cdot \sigma_{jb}(y_c, \beta, \xi) \cdot y_j(y_c, \beta, \xi) + \\ &+ \sum_{i=1}^m f_{ia} \cdot \sigma_{ia}(y_c, \beta, \xi) \cdot y_{ia}(y_c, \beta, \xi) + M_x + Ne_x = 0, \\ \sum M_y &= \sum_{j=1}^n \Delta F_{jb} \cdot \sigma_{jb}(y_c, \beta, \xi) \cdot x_j(y_c, \beta, \xi) + \\ &+ \sum_{i=1}^m f_{ia} \cdot \sigma_{ia}(y_c, \beta, \xi) \cdot x_{ia}(y_c, \beta, \xi) + M_y + Ne_y = 0. \end{aligned}$$

Для бетона определение жесткостных характеристик включает только его сжатую часть с переменным по сечению секущими или касательными модулями деформации. Для каждого арматурного стержня также используется соответствующий модуль деформации. Жесткостные характеристики E_{gen}^F , $E_{\text{gen}}^{I_x}$, $E_{\text{gen}}^{I_y}$ определяются на основании зависимостей σ - ϵ для бетона и арматуры по формулам:

$$\begin{aligned} E_{\text{gen}}^F &= \sum_{j=1}^n E_{jb} \Delta F_{jb} + \sum_{i=1}^m E_{ia} f_{ia}, \\ E_{\text{gen}}^{I_x} &= \sum_{j=1}^n E_{jb} \Delta F_{jb} y_{jb}^2 + \sum_{i=1}^m E_{ia} f_{ia} y_{ia}^2, \\ E_{\text{gen}}^{I_y} &= \sum_{j=1}^n E_{jb} \Delta F_{jb} x_{jb}^2 + \sum_{i=1}^m E_{ia} f_{ia} x_{ia}^2. \end{aligned}$$

Здесь ΔF_{jb} , f_{ia} — элементарные участки, на которые расчленяется сечение бетона и площади отдельных стержней арматуры; E_{gen} — обобщенный касательный или секущий модуль деформации; E_{jb} — касательный или секущий модуль деформации j -го участка, соответствующий ε_j для этого участка.

По аналогичной схеме для i -го участка арматурного включения F_{ia} по заданной зависимости $\sigma_a - \varepsilon_a$ и найденной деформации i -го участка ε_{ia} вычисляются $E_{ia, sec}$ и $E_{ia, tan}$.

РЕЗУЛЬТАТЫ РЕАЛИЗАЦИИ

В программном комплексе «ЛИРА-САПР» реализована подсистема «Конструктор сечений» [17], с помощью которой можно определять весь набор жесткостных характеристик для сечения стержня, а для проведения нелинейного расчета — касательные и секущие жесткостные характеристики. Конструктор сечений программного комплекса «ЛИРА-САПР» поддерживает нелинейный расчет для заданного набора усилий. Для подсистемы «Конструктор сечений» разработаны инструменты, позволяющие задавать характеристики нелинейного деформирования материалов и применить их к элементам конструируемого сечения.

Реализованы законы нелинейного деформирования [18], согласно которым моделируются арматурные стали, полосовой и профильный прокат и бетоны различных марок. Имеется возможность формирования пользователем диаграммы $\sigma - \varepsilon$ в табличном виде. Результаты ввода для контроля отображаются в графическом окне и могут динамически обновляться. Программа автоматически отслеживает корректность введенных данных.

В результате расчета с учетом нелинейных характеристик деформирования материалов выполняется определение жесткостных характеристик сечения, построение эпюр напряжений, относительных деформаций, модулей деформаций. Результаты работы подсистемы «Конструктор сечений» приведены на рис. 2.

Имеется возможность формировать расчетные сочетания, моделировать шаговое приложение нагрузки и осуществлять контроль за состоянием сечения на каждом шаге. Для множества сочетаний программа позволяет в пакетном режиме формировать слайды для анимации.

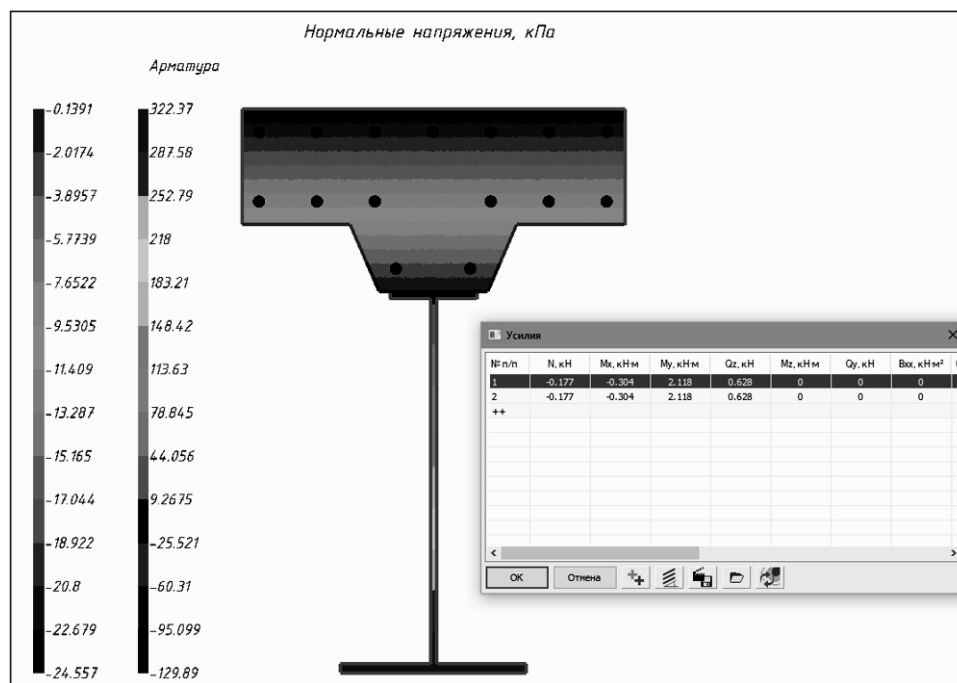


Рис. 2. Эпюра напряжений в сечении железобетонного элемента

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены численные методы определения всего набора жесткостных характеристик сечения стержневого элемента, включая такие характеристики, как жесткость на кручение, сдвиг, секторальная жесткость.

Определение жесткостных характеристик является одной из основных процедур численного анализа произвольных стержневых систем на прочность, устойчивость и динамические воздействия. Для численного анализа в нелинейной постановке предложенные методы позволяют вычислять касательные (для шаговых методов) и секущие (для итерационных методов) жесткостные характеристики. Предложенные методы реализованы в подсистеме «Конструктор сечений», которая включена в программный комплекс «ЛИРА-САПР».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Городецкий А.С., Барабаш М.С., Сидоров В.Н. Компьютерное моделирование в задачах строительной механики: Учеб. пособие. Москва: Изд-во АВС, 2016. 338 с.
2. Барабаш М.С. Компьютерное моделирование процессов жизненного цикла объектов строительства. Киев: Сталь, 2014. 301 с.
3. Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Сахаров О.С. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах континуального руйнування просторових тіл. Київ: Каравела, 2014. 236 с.
4. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность, устойчивость, колебания. Т. 1. Москва: Машиностроение, 1968. 831 с.
5. Молчанов И.Н., Николенко Л.Д., Филоненко Ю.Б. Решение задачи Неймана для уравнения Пуассона методом конечных элементов. *Вычислительная и прикладная математика: Межведомственный научный сборник*. Киев, 1977. Вып. 33. С. 137–143.
6. Молчанов И.Н., Попов А.В., Химич А.Н. Алгоритм решения частичной проблемы собственных значений для больших ленточных матриц. *Кибернетика и системный анализ*. 1992. № 2. С. 141–147.
7. Химич А.Н., Попов А.В., Полянко В.В. Алгоритмы параллельных вычислений для задач линейной алгебры с матрицами нерегулярной структуры. *Кибернетика и системный анализ*. 2011. № 6. С. 159–174.
8. Великоиваненко Е.А., Миленин А.С., Попов А.В., Сидорук В.А., Химич А.Н. Методы и технологии параллельных вычислений для математического моделирования напряженно-деформированного состояния конструкций с учетом вязкого разрушения. *Проблемы управления и информатики*. 2014. № 6. С. 42–52.
9. Баранов А.Ю., Попов А.В., Слободян Я.Е., Химич А.Н. Математическое моделирование прочности строительных конструкций на гибридных вычислительных системах. *Проблемы управления и информатики*. 2017. № 4. С. 68–81.
10. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. Москва: Наука, 1975. 576 с.
11. Лурье А.И. Теория упругости. Москва: Наука, 1970. 547 с.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. Москва: Наука, 1987. 246 с.
13. Новацкий В. Теория упругости. Москва: Мир, 1975. 872 с.
14. Фялко С.Ю., Лумельский Д.Е. О численном решении задачи кручения и изгиба призматических стержней произвольного поперечного сечения. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2012. Т. 55, № 2. С. 156–169.
15. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. Москва: Мир, 1975. 541с.
16. Химич А.Н., Попов А.В., Чистяков А.В. Гибридные алгоритмы решения алгебраической проблемы собственных значений с разреженными матрицами. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 6. С. 132–146.

17. Городецкий А.С., Барабаш М.С. Учет нелинейной работы железобетона в ПК ЛИРА-САПР. Метод «Инженерная нелинейность». *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2016. Vol. 12, Iss. 2. P. 92–98.
18. Барабаш М.С., Сорока М.М., Сур'янінов М.Г. Нелінійна будівельна механіка з ПК ЛІРА-САПР. Одеса: Екологія, 2018. 248 с.

Надійшла до редакції 01.11.2018

О.С. Городецкий, М.С. Барабаш, Ю.Б. Філоненко
ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ЖОРСТКІСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК
ПЕРЕРІЗУ СТРИЖНЯ

Анотация. Розглянуто деякі аспекти визначення характеристик жорсткості перерізу стрижневих елементів та моделювання напружено-деформованого стану стрижневих систем. Запропоновано методику обчислення напружень на основі нелінійних залежностей напруження–деформації. Для чисельного визначення характеристик жорсткості перерізу виконано нелінійний розрахунок для заданого набору зусиль. Реалізована у програмному комплексі «ЛІРА-САПР» методика дозволяє визначати дотичні і січні жорсткісні характеристики для проведення нелінійного розрахунку. Запропоновані методи визначення характеристик жорсткості та моделювання дозволяють більш точно задати характеристики нелінійного деформування матеріалів і застосувати їх до елементів конструйованого перерізу.

Ключові слова: чисельні методи, жорсткісні характеристики, напружено-деформований стан, модуль деформації, нелінійний аналіз.

O.S. Gorodetsky, M.S. Barabash, Y.B. Filonenko
NUMERICAL METHODS TO FIND STIFFNESS PROPERTIES OF A BAR CROSS-SECTION

Abstract. The paper considers several aspects of determining stiffness properties of bar sections and simulating stress-strain state of bar section. The authors propose a method to find stresses based on nonlinear 'stress-strain' dependencies. Nonlinear analysis for the specified set of forces is carried out when stiffness properties of the section are determined numerically. This method is implemented in the LIRA-SAPR software package and makes it possible to determine tangential and secant stiffness properties in order to carry out nonlinear analysis. The methods proposed for computation of stiffness properties and simulation allow the user to specify the characteristics of nonlinear strain in materials more accurately.

Keywords: numerical methods, stiffness characteristics, computer simulation, stress-strain state, deformation modulus, nonlinear analysis.

Городецкий Александр Сергеевич,
доктор техн. наук, профессор, заместитель директора ООО «ЛИРА-САПР», Киев.

Барабаш Мария Сергеевна,
доктор техн. наук, доцент, старший научный сотрудник, профессор кафедры Национального авиационного университета, директор ООО «ЛИРА-САПР», Киев, e-mail: bmari.lira@gmail.com.

Філоненко Юрий Борисович,
инженер ООО «ЛИРА-САПР», Киев.