

ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА ДЛЯ СУММЫ КОРРЕЛЯЦИЙ ТРЕХ ИНДИКАТОРОВ В ОТСУТСТВИЕ ОБЩЕГО ФАКТОРА

Аннотация. Показано, что в линейной модели с тремя индикаторными переменными, где каждая пара индикаторов имеет отдельный «парный» фактор, сумма трех корреляций ограничена сверху. Нарушение установленного неравенства свидетельствует о том, что каузальная структура генеративной модели отличается от предполагаемой. В случае нарушения неравенства можно утверждать, что существует общая причина трех индикаторов или что одна из них каузально влияет на другую. Ограничение может результативно применяться даже в ситуации неполной наблюдаемости (в частности, когда наблюдаются только две индикаторные переменные).

Ключевые слова: корреляция, ограничение типа неравенство, цикл с тремя коллайдерами, скрытая общая причина, система линейных структуральных уравнений.

ВВЕДЕНИЕ

Задача построения адекватной модели объекта на основе эмпирических данных ставится в разнообразных прикладных исследованиях (социологических, эконометрических, биохимических, физических и т.д.). В большинстве таких исследований возникает проблема существования ненаблюдаемых (скрытых) факторов. Требуется выявить существование скрытых факторов, идентифицировать их место в модели и оценить эффекты их влияния. Такую задачу удобно рассматривать в аппарате каузальных сетей и других статистических моделей, структурированных графами. В последние два десятилетия получены результаты, показывающие, что структура модели (в том числе со скрытыми переменными) налагает ограничения на набор зависимостей между переменными [1–5]. Такие ограничения помогают выполнять валидацию (тестирование) модели. Нарушение соответствующих ограничений свидетельствует о том, что предполагаемая модель не согласуется со статистическими данными. В настоящей статье анализируется модель (структура которой часто приводится в публикациях), где три наблюдаемые переменные (индикаторы) коррелированы вследствие влияния трех скрытых факторов, причем каждый из них влияет только на два индикатора. (Не существует фактора, влияющего одновременно на три индикатора.) Рассмотрен случай линейных зависимостей (и нормальных распределений). Известные ограничения для корреляций в такой модели значительно улучшены.

МОДЕЛЬ И ЗАДАЧА

Рассмотрим модель, которая содержит наблюдаемые переменные (индикаторы) X, Y, Z , скрытые переменные H, L, U и «индивидуальные» факторы Q, T, W , которые могут быть либо наблюдаемыми, либо скрытыми. Модель описывается системой уравнений

$$\begin{aligned}x &= a \cdot h + f \cdot u + \alpha \cdot q + \varepsilon_1, \\y &= b \cdot h + c \cdot l + \beta \cdot t + \varepsilon_2, \\z &= d \cdot l + e \cdot u + \gamma \cdot w + \varepsilon_3,\end{aligned}\tag{1}$$

где переменные H, L, U, Q, T, W взаимно независимы (не коррелированы) и нормально распределены; члены «ошибок» ε_i ($i=1, 2, 3$) взаимно независимы и независимы от переменных H, L, U, Q, T, W ; $\varepsilon_i \sim N(m_i, \sigma_i^2)$.

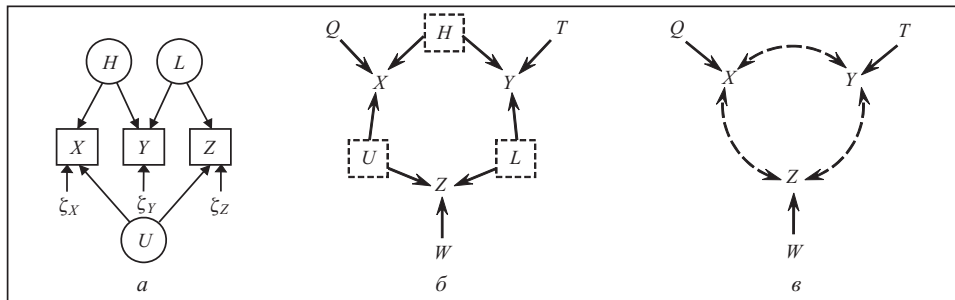


Рис. 1. Варианты отображения модели: в факторном анализе (а); в каузальных сетях (б); в линейных SEM с коррелированными ошибками (в)

Подобные модели графически изображаются по-разному в публикациях различного направления. На рис. 1 представлены варианты изображения описанной модели, принятые соответственно в факторном анализе, теории каузальных сетей (общего вида) и линейных каузальных диаграммах с коррелированными ошибками. В терминах каузальных сетей данную модель можно назвать циклической структурой с тремя коллайдерами в цикле. (Коллайдером называют фрагмент структуры вида $A \rightarrow C \leftarrow B$.) Каузальная модель (1) является гауссовой (все зависимости линейны, а распределения нормальны) и характеризуется матрицей ковариаций (корреляций).

Предположим, переменные Q, T, W скрыты или не существуют. Тогда (поскольку H, L, U скрытые) наблюдаемая часть модели будет выглядеть как «треугольник» с вершинами X, Y, Z , т.е. как «насыщенная» модель. Однако это впечатление обманчиво. Ошибочно думать, что модель, полученная из (1) в результате маргинализации переменных H, L, U , эквивалентна насыщенной модели с переменными X, Y, Z . Модель с насыщенной структурой не влечет никаких условных независимостей и никаких нетривиальных ограничений на величины корреляций. Напротив, из того факта, что каждая корреляция между наблюдаемыми переменными X, Y, Z создается влиянием отдельного независимого «парного» фактора, следует количественное ограничение для набора корреляций наблюдаемых переменных $\rho_{XY}, \rho_{YZ}, \rho_{ZX}$. Такая модель не может воспроизвести произвольное (нормальное) распределение вероятностей переменных X, Y, Z .

В большинстве публикаций, в которых анализируется описанная структура, рассмотрены модели с бинарными переменными и даны ограничения в терминах взаимной информации и энтропии (см., например, [2, 3]). В работах [4, 5] исследованы линейные модели различной структуры и для них найдены ограничения типа равенства. Разработаны графовые критерии для вывода таких ограничений, причем помимо равенств, которые выражают условные независимости, получены также равенства, основанные на процедурах идентификации параметров и путей эффектов. Далее предложены ограничения типа неравенства, которые можно объяснить эффектом аддитивного действия независимых факторов.

Автору настоящей статьи удалось найти в публикациях только одно ограничение для представленной линейной модели (1), а именно в [6] для подобной модели (но без «индивидуальных» факторов Q, T, W) представлено ограничение (без вывода) в следующей форме:

$$\min \{ \rho_{XY}, \rho_{YZ}, \rho_{ZX} \} < 1/\sqrt{2}. \quad (2)$$

Поскольку в случае отрицательных корреляций неравенство (2) неинформативно, целесообразно переписать его с использованием абсолютных величин (модулей) в виде

$$\min \{ |\rho_{XY}|, |\rho_{YZ}|, |\rho_{ZX}| \} < 1/\sqrt{2} \quad (3)$$

или эквивалентно как

$$\min \{ \rho_{XY}^2, \rho_{YZ}^2, \rho_{ZX}^2 \} < 1/2. \quad (4)$$

В работе [7] для той же модели выведено неравенство

$$\rho_{XY}^2 + \rho_{YZ}^2 + \rho_{ZX}^2 \leq 3/2, \quad (5)$$

а также набор неравенств

$$\rho_{XY}^2 + \rho_{YZ}^2 \leq 1, \quad \rho_{XY}^2 + \rho_{ZX}^2 \leq 1, \quad \rho_{YZ}^2 + \rho_{ZX}^2 \leq 1. \quad (6)$$

Из (5) или (6) легко получить (4) и (3). (Далее показаны условия, при которых неравенство становится строгим, и случай, когда неравенство обращается в равенство.)

Заметим, что указанные ограничения выведены в [7] по упрощенной схеме. Поэтому неудивительно, что эти ограничения можно усилить. Найдем более жесткие ограничения для суммы квадратов корреляций $\rho_{XY}^2 + \rho_{YZ}^2 + \rho_{ZX}^2$ в модели (1). Дополнительно учтем влияние наблюдаемых «индивидуальных» факторов Q, T, W и усилим ограничение.

БАЗОВЫЙ РЕЗУЛЬТАТ

Наблюдаемые индивидуальные факторы Q, T, W увеличивают дисперсию индикаторов X, Y, Z и снижают корреляции между индикаторами в модели (1). При выводе верхних границ для суммы корреляций целесообразно исключить влияние факторов Q, T, W (т.е. устранить соответствующие компоненты дисперсий). Поэтому найдем ограничение для суммы частных корреляций $\Sigma_{(p)} = \rho_{XY;QT}^2 + \rho_{YZ;TW}^2 + \rho_{ZX;WQ}^2$. Поскольку фактор Q независим от всех переменных модели (1), за исключением «своего» индикатора X (и аналогичное справедливо для других индивидуальных факторов), получаем

$$\begin{aligned} \rho_{XY;QT}^2 &= \frac{\rho_{XY}^2}{(1-\rho_{XQ}^2)(1-\rho_{YT}^2)}, \quad \rho_{YZ;TW}^2 = \frac{\rho_{YZ}^2}{(1-\rho_{YT}^2)(1-\rho_{ZW}^2)}, \\ \rho_{ZX;WQ}^2 &= \frac{\rho_{ZX}^2}{(1-\rho_{ZW}^2)(1-\rho_{XQ}^2)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Обозначим дисперсии переменных Q, T, W соответственно $\sigma_Q^2, \sigma_T^2, \sigma_W^2$. Выразим корреляции для пар переменных, связанных ребром:

$$\begin{aligned} \rho_{XH}^2 &= \frac{a^2 \cdot \sigma_H^2}{a^2 \cdot \sigma_H^2 + f^2 \cdot \sigma_U^2 + \alpha^2 \cdot \sigma_Q^2 + \sigma_1^2}, \quad \rho_{YH}^2 = \frac{b^2 \cdot \sigma_H^2}{b^2 \cdot \sigma_H^2 + c^2 \cdot \sigma_L^2 + \beta^2 \cdot \sigma_T^2 + \sigma_2^2}, \dots \\ \dots, \rho_{ZU}^2 &= \frac{e^2 \cdot \sigma_U^2}{d^2 \cdot \sigma_L^2 + e^2 \cdot \sigma_U^2 + \gamma^2 \cdot \sigma_W^2 + \sigma_3^2}. \end{aligned}$$

Видим, что дисперсии переменных H, L, U, Q, T, W входят в формулы корреляций только в составе произведений (каждая с соответствующим структурным коэффициентом). Поэтому, если структурные коэффициенты оставить свободными, то можно без потери общности положить $\sigma_H = \sigma_L = \sigma_U = \sigma_Q = \sigma_T = \sigma_W = 1$.

Поскольку зависимость между переменными X и Y создается исключительно с помощью общего фактора H , имеем $\rho_{XY}^2 = \rho_{XH}^2 \cdot \rho_{YH}^2$. Аналогично имеем $\rho_{YZ}^2 = \rho_{YL}^2 \cdot \rho_{ZL}^2$ и $\rho_{ZX}^2 = \rho_{ZU}^2 \cdot \rho_{XU}^2$. Тогда (с учетом $\sigma_H = \sigma_L = \sigma_U = \sigma_Q = \sigma_T = \sigma_W = 1$) получаем

$$\begin{aligned} \rho_{XY;QT}^2 &= \frac{a^2 \cdot b^2}{(a^2 + f^2 + \sigma_1^2)(b^2 + c^2 + \sigma_2^2)}, \\ \rho_{YZ;TW}^2 &= \frac{c^2 \cdot d^2}{(b^2 + c^2 + \sigma_2^2)(d^2 + e^2 + \sigma_3^2)}, \\ \rho_{ZX;WQ}^2 &= \frac{e^2 \cdot f^2}{(a^2 + f^2 + \sigma_1^2)(d^2 + e^2 + \sigma_3^2)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Анализируя эти выражения, видим, что удалось исключить влияние индивидуальных факторов Q, T, W . Заметим, что выражения в правых частях (8) будут адекватно описывать ординарные корреляции соответственно ρ_{XY}^2, ρ_{YZ}^2 и ρ_{ZX}^2 для случая, когда факторы Q, T, W не существуют.

Утверждение 1. В каузальной гауссовой сети (1) выполняется ограничение

$$\rho_{XY;QT}^2 + \rho_{YZ;TW}^2 + \rho_{ZX;WQ}^2 < 1, \quad (9)$$

если все три корреляции не равны нулю. Если одна из корреляций в (9) равна нулю, то неравенство становится нестрогим (т.е. знак $<$ следует заменить знаком \leq). В частности, если $\rho_{XY} = 0$, то ограничение принимает вид

$$\rho_{YZ;TW}^2 + \rho_{ZX;WQ}^2 \leq 1. \quad (9a)$$

Поясним формулировку утверждения 1. Использование частной корреляции с двумя переменными в условии подразумевает, что соответствующая ординарная корреляция не равна нулю, а корреляция индивидуального фактора с индикатором не равна единице. Нулевую корреляцию требуется удалить из формулы суммы. (Если две из трех корреляций равны нулю, ограничение становится тривиальным для модели (1).) Если некоторые (или все) индивидуальные факторы Q, T, W отсутствуют, в ограничение подставляются частные корреляции с одной переменной в условии (например, $\rho_{XY;Q}^2$) или ординарные корреляции.

Доказательство. Чтобы упростить выкладки, заметим, что при увеличении σ_1, σ_2 и σ_3 (когда прочие параметры фиксированы) значения $\rho_{XY;QT}^2, \rho_{YZ;TW}^2$ и $\rho_{ZX;WQ}^2$ монотонно уменьшаются. Поэтому достаточно доказать неравенства только для случая $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Далее подразумевается $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

Рассмотрим случай, когда все три корреляции: $\rho_{XY;QT}, \rho_{YZ;TW}, \rho_{ZX;WQ}$, не равны нулю. Тогда все коэффициенты a, b, c, d, e, f не равны нулю.

Используя (8), получаем

$$\begin{aligned} \rho_{XY;QT}^2 + \rho_{YZ;TW}^2 + \rho_{ZX;WQ}^2 &= \frac{a^2 \cdot b^2}{(a^2 + f^2)(b^2 + c^2)} + \\ &+ \frac{c^2 \cdot d^2}{(b^2 + c^2)(d^2 + e^2)} + \frac{e^2 \cdot f^2}{(a^2 + f^2)(d^2 + e^2)} = \frac{S - a^2 c^2 e^2 - b^2 d^2 f^2}{S}, \quad (10) \end{aligned}$$

где $S = (a^2 + f^2)(b^2 + c^2)(d^2 + e^2)$.

Поскольку в рассматриваемом случае все коэффициенты не равны нулю и выполняется условие $S > 0$, неравенство $(S - a^2 c^2 e^2 - b^2 d^2 f^2) / S < 1$ справедливо.

Рассмотрим случай, когда одна из трех корреляций равна нулю. Пусть $\rho_{ZX}^2 = 0$. Это означает, что $e = 0$ или $f = 0$. Без потери общности выберем $f = 0$. (Коэффициенты a, b, c, d не равны нулю.) Тогда получаем

$$\rho_{XY;QT}^2 + \rho_{YZ;TW}^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2(b^2 + c^2)} + \frac{c^2 \cdot d^2}{(b^2 + c^2)(d^2 + e^2)} = \frac{R}{R + a^2 c^2 e^2}, \quad (11)$$

где $R = a^2 b^2 d^2 + a^2 b^2 e^2 + a^2 c^2 d^2$.

Поскольку в данном случае имеем $R > 0$, то справедливо $\rho_{XY;QT}^2 + \rho_{YZ;TW}^2 \leq 1$.

Значение выражения (11) может равняться единице только, когда $e = 0$.

Утверждение 1 доказано. Заметим, что согласно (7) имеем соотношения $\rho_{XY}^2 \leq \rho_{XY;Q}^2 \leq \rho_{XY;QT}^2$. Поэтому, если в формулу суммы подставить ординарные корреляции или частные корреляции с одной переменной в условии, неравенства останутся справедливыми.

Итак, равенство $\rho_{XY;QT}^2 + \rho_{YZ;TW}^2 + \rho_{ZX;WQ}^2 = 1$ может выполняться, только если одна или две из корреляций, входящих в сумму, равны нулю. В таких случаях циклическая структура модели «разрывается». Если цикл не разорван (т.е. имеем $\rho_{XY}^2 > 0, \rho_{YZ}^2 > 0$ и $\rho_{ZX}^2 > 0$), то ограничение уточняется до строгого неравенства (9).

Все девять вариантов модели, когда ограничение может превратиться в равенство, можно разбить на два концептуальных класса. В моделях первого класса (назовем его «один ноль») только одна из трех корреляций: $\rho_{XY}^2, \rho_{YZ}^2, \rho_{ZX}^2$, равна нулю. В моделях второго класса («два нуля») две из трех указанных корреляций равны нулю. Заметим, что для того чтобы выполнялось равенство $\rho_{XY;QT}^2 + \rho_{YZ;TW}^2 + \rho_{ZX;WQ}^2 = 1$, необходимо не только разорвать цикл, но также не позволить скрытому фактору, который перестал создавать одну из корреляций,

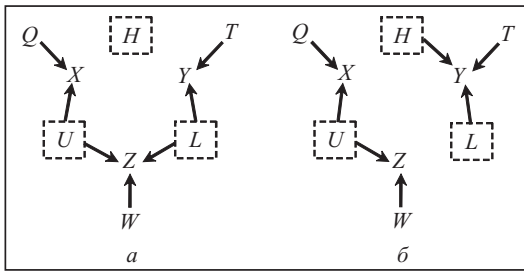


Рис. 2. Варианты модели после удаления двух связей: трехколлайдерная структура (а); структура с изолированным индикатором Y (б)

превратиться в «шум» и снизить другую корреляцию. Поэтому одновременно два коэффициента в определенных позициях должны обращаться в нуль. На рис. 2 отображено по одному варианту из этих двух классов моделей для случаев $a = b = 0$ и $a = d = 0$ соответственно. В моделях класса «один ноль» (см. рис. 2, а) через три индикаторные переменные проходит путь с тремя коллайдерами. В моделях класса «два нуля» (см. рис. 2, б) одна из индикаторных переменных изолирована от двух других. Фрагмент этой модели включает два индикатора и упрощенно изображается в виде $Q \rightarrow X \leftarrow \circ \rightarrow Z \leftarrow W$.

СЛЕДСТВИЯ И КОММЕНТАРИИ

В отличие от работ [6, 7] в настоящей статье получены ограничения для частных корреляций. Все выведенные неравенства справедливы также и для ординарных корреляций. Действительно, если имеем $\rho_{XQ}^2 \neq 0, \rho_{YT}^2 \neq 0, \rho_{ZW}^2 \neq 0$, то согласно (7) $\rho_{XY}^2 < \rho_{XY;QT}^2, \rho_{YZ}^2 < \rho_{YZ;TW}^2, \rho_{ZX}^2 < \rho_{ZX;WQ}^2$. Поэтому замена частных корреляций ординарными ослабляет установленное ограничение. Ординарные корреляции придется использовать в том случае, когда «индивидуальные» факторы Q, T, W не наблюдаются (недоступны) или они не существуют. Кроме того, лучше воздержаться от кондиционирования по фактору Q , когда величина корреляции ρ_{XQ}^2 приближается к единице (особенно, если используется выборочная оценка корреляции).

Следствие 1. В модели (1) выполняются следующие неравенства:

$$\rho_{XY}^2 + \rho_{YZ}^2 + \rho_{ZX}^2 \leq 1, \quad (12)$$

$$\min \{\rho_{XY}^2, \rho_{YZ}^2, \rho_{ZX}^2\} < 1/3, \quad (13)$$

$$\min \{|\rho_{XY}|, |\rho_{YZ}|, |\rho_{ZX}|\} < 1/\sqrt{3}, \quad (14)$$

$$\min \{\rho_{XY;QT}^2, \rho_{YZ;TW}^2, \rho_{ZX;WQ}^2\} < 1/3, \quad (15)$$

$$\min \{|\rho_{XY;QT}|, |\rho_{YZ;TW}|, |\rho_{ZX;WQ}|\} < 1/\sqrt{3}. \quad (16)$$

Действительно, либо наименьшая из трех корреляция равна нулю, либо неравенства (13)–(16) следуют из (9).

Констатируем, что полученные верхние границы улучшают предыдущие результаты в полтора раза (для квадратов). В частности, (16) в $\sqrt{3}/2$ раза сильнее, чем (3).

Сформулируем ограничение более концептуально.

Утверждение 1а. Если в линейной каузальной гауссовой сети, включающей переменные $X, Y, Z, H, L, U, Q, T, W$, справедливо $\rho_{HL} = \rho_{LU} = \rho_{UH} = 0$, $\rho_{XQ}^2 > 0$, $\rho_{YT}^2 > 0$, $\rho_{ZW}^2 > 0$ и $\rho_{XY} = \rho_{XH} \cdot \rho_{YH}$, $\rho_{YZ} = \rho_{YL} \cdot \rho_{ZL}$, $\rho_{ZX} = \rho_{ZU} \cdot \rho_{XU}$, то выполняется ограничение $\rho_{XY;QT}^2 + \rho_{YZ;TW}^2 + \rho_{ZX;WQ}^2 \leq 1$.

Если принять предположение каузальной необманчивости (т.е. исключить особые случаи, которые характеризуются нулевой мерой Лебега), то из условий утверждения 1а с необходимостью вытекают те же свойства модели (существенные для результатов (9)–(16)), что и у модели (1). Действительно, из трех равенств: $\rho_{XY} = \rho_{XH} \cdot \rho_{YH}$, $\rho_{YZ} = \rho_{YL} \cdot \rho_{ZL}$ и $\rho_{ZX} = \rho_{ZU} \cdot \rho_{XU}$, следует, что каждая пара индикаторных переменных соединена только одним бесколайдерным путем вида $X \leftarrow H \rightarrow Y$, $Y \leftarrow L \rightarrow Z$, $Z \leftarrow U \rightarrow X$ соответственно. (Допускаются эквивалентные варианты путей связи вида $X \leftarrow H \leftrightarrow Y$, $X \leftrightarrow H \rightarrow Y$, $Y \leftarrow L \leftrightarrow Z$ и т.п.) Более того, из указанных трех равенств вытекает также, что факторы Q, T, W индивидуальны, т.е. $\rho_{XT} = \rho_{XW} = \rho_{YW} = \rho_{YQ} = \rho_{ZQ} = \rho_{ZT} = 0$. Условия утверждения 1а допускают несущественные отклонения от модели (1). Например, если имеется путь вида $X \leftarrow H \leftrightarrow Y$, то может существовать связь $Q \rightarrow H$. Эта связь не изменит свойств модели: переменные Q и Y останутся взаимно независимыми и по-прежнему будет справедливо $\rho_{XY} = \rho_{XH} \cdot \rho_{YH}$. (Заметим, что в случае нелинейной или дискретной модели введение связи $Q \rightarrow H$ изменяет свойства модели.)

Можно предложить альтернативную концептуальную формулировку утверждения и не требовать выполнения равенств $\rho_{XY} = \rho_{XH} \cdot \rho_{YH}$, $\rho_{YZ} = \rho_{YL} \cdot \rho_{ZL}$, $\rho_{ZX} = \rho_{ZU} \cdot \rho_{XU}$. Вместо этого можно ввести в условия ограничения $\rho_{XH}^2 > 0$, $\rho_{XU}^2 > 0$, $\rho_{YH}^2 > 0$ и т.д., а также требование $\rho_{XT} = \rho_{XW} = \rho_{YW} = \rho_{YQ} = \rho_{ZQ} = \rho_{ZT} = 0$. В рамках таких модифицированных требований переменная H может не лежать на пути между X и Y . (Аналогично для переменных L, U .) Но тогда на этом пути лежит некоторая другая «промежуточная» переменная H^* , с которой H связана. Например, имеются связи $X \leftarrow H^* \rightarrow Y$ и $H \rightarrow H^*$. (Аналогично для других пар индикаторов.)

УТОЧНЕНИЕ ВЕРХНИХ ГРАНИЦ

Базовый результат можно уточнить (усилить) следующим образом.

Утверждение 2. В каузальной гауссовой сети (1) выполняется ограничение

$$\rho_{XY;QT}^2 + \rho_{YZ;TW}^2 + \rho_{ZX;WQ}^2 + \min \{ \rho_{XY;QT}^2, \rho_{YZ;TW}^2, \rho_{ZX;WQ}^2 \} \leq 1. \quad (17)$$

Упорядочим тройку квадратов корреляций: $\rho_{XY;QT}^2, \rho_{YZ;TW}^2, \rho_{ZX;WQ}^2$, по величине и обозначим их $\rho_{(\min)}^2, \rho_{(\text{md})}^2$ и $\rho_{(\max)}^2$ соответственно (выполняется $\rho_{(\min)}^2 \leq \rho_{(\text{md})}^2 \leq \rho_{(\max)}^2$). Тогда неравенство (17) можно переписать в виде

$$2 \cdot \rho_{(\min)}^2 + \rho_{(\text{md})}^2 + \rho_{(\max)}^2 \leq 1. \quad (18)$$

Для утверждения 2 действуют те же пояснения, что и для утверждения 1 (отбрасывание нулевой корреляции, переход к ординарным корреляциям в случае отсутствия индивидуальных факторов Q, T или W). Однако изменяется условие, при котором ограничение превращается в равенство.

Чтобы показать справедливость ограничений (17) и (18), найдем максимум суммы $\Lambda = 2 \cdot \rho_{(\min)}^2 + \rho_{(\text{md})}^2 + \rho_{(\max)}^2$. Для упрощения выкладок рассмотрим случай, когда индивидуальных факторов Q, T, W нет, и поэтому в (18) используются орди-

нарные корреляции. Снова, по тем же соображениям, что и для утверждения 1, положим $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$, т.е. перейдем к рассмотрению функции верхних границ сумм $\widehat{\Sigma}$ и $\widehat{\Lambda}$. Тогда (ввиду взаимной независимости H, L, U) имеем $\rho_{XH}^2 + \rho_{XU}^2 = 1$, $\rho_{YH}^2 + \rho_{YL}^2 = 1$, $\rho_{ZL}^2 + \rho_{ZU}^2 = 1$. Заменяем переменные $\rho_{XH}^2 = r_1$, $\rho_{YL}^2 = r_2$, $\rho_{ZU}^2 = r_3$ и получим $\widehat{\Sigma} = \rho_{XY}^2 + \rho_{YZ}^2 + \rho_{ZX}^2 = r_1(1-r_2) + r_2(1-r_3) + r_3(1-r_1)$.

Предположим, из трех квадратов корреляций, входящих в сумму $\widehat{\Sigma}$, наименьшим является ρ_{XY}^2 . Тогда суммы в (17) и (18) принимают вид

$$\widehat{\Lambda}_{(XY)} = 2 \cdot r_1 \cdot (1-r_2) + r_2 \cdot (1-r_3) + r_3 \cdot (1-r_1).$$

Продифференцируем эту функцию $\widehat{\Lambda}_{(XY)}$ и найдем решения системы уравнений $\frac{d\widehat{\Lambda}_{(XY)}}{dr_1} = 0$, $\frac{d\widehat{\Lambda}_{(XY)}}{dr_2} = 0$, $\frac{d\widehat{\Lambda}_{(XY)}}{dr_3} = 0$. Система имеет единственное решение $r_1 = 1/4$, $r_2 = 3/4$, $r_3 = 1/2$. Легко убедиться, что для этого решения корреляция ρ_{XY}^2 действительно является наименьшей из трех. Однако найденное решение соответствует не максимуму $\widehat{\Lambda}_{(XY)}$, а седловой точке. В этой точке имеем $\widehat{\Lambda}_{(XY)} = 7/8$. При одновременном уменьшении r_1 и r_2 или при одновременном увеличении r_1 и r_2 сумма $\widehat{\Lambda}_{(XY)}$ будет снижаться. Приращения r_1 и r_2 разных знаков приведут к возрастанию суммы $\widehat{\Lambda}_{(XY)}$. К аналогичному эффекту приводят изменения значений r_2 и r_3 .

Анализ альтернативных случаев (когда наименьшим слагаемым суммы является не ρ_{XY}^2 , а другие корреляции) даст иные седловые точки. Ввиду круговой симметрии эти точки можно получить проще — путем циклической перестановки найденных значений r_1, r_2, r_3 . Максимум величины $\widehat{\Lambda}$ необходимо искать на границах допустимой области значений r_1, r_2 и r_3 . Действительно, максимум $\widehat{\Lambda} = 1$ достигается, в частности, при условии $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, r_3 любое (в интервале от 0 до 1). Иными словами, максимум достигается на гиперлинии, заданной координатами $(0, 1, -)$. Максимум $\widehat{\Lambda} = 1$ достигается также на гиперлиниях, заданных координатами $(1, 0, -)$, $(0, -, 1)$, $(1, -, 0)$, $(-, 0, 1)$ и $(-, 1, 0)$. Кроме того, максимум возможен на «внутренних» границах, которые возникают вследствие использования функции $\min \{ * \}$ в формуле (17) (т.е. на стыке аналитических функций). Внутренние границы определяются условием, что одна из корреляций (например, ρ_{XY}^2) перестает быть наименьшей среди величин ρ_{XY}^2 , ρ_{YZ}^2 и ρ_{ZX}^2 . Действительно, максимум $\widehat{\Lambda} = 1$ достигается в точке $(1/2, 1/2, 1/2)$. Другие внутренние границы определяются условием, что две из трех корреляций $(\rho_{XY}^2, \rho_{YZ}^2, \rho_{ZX}^2)$ равны между собой и меньше третьей. Оказалось, на внутренних границах нет других максимумов, но найдены дополнительные («неаналитические») седловые точки, в которых имеем $\widehat{\Lambda} = 15/16$. Одна из таких точек задается значениями $r_1 = 1/2$, $r_2 = 1/4$, $r_3 = 3/2$. Другие «неаналитические» седловые точки можно получить с помощью циклической перестановки этих значений координат.

Аналогичные результаты также выполняются для случая, когда используются частные корреляции $\rho_{XY;QT}^2, \rho_{YZ;TW}^2$ и $\rho_{ZX;WQ}^2$ вместо ординарных. Ограничения (17) и (18) справедливы.

На рис. 3 изображены поверхности верхних границ $\widehat{\Sigma}$ и $\widehat{\Lambda}$ как функции от r_1 и r_2 при фиксированной $r_3 = 1/2$. На рис. 4 показана линия пересечения поверхности $\widehat{\Lambda}$ с вертикальной плоскостью, проходящей по диагонали основания через точки $(0, 1)$

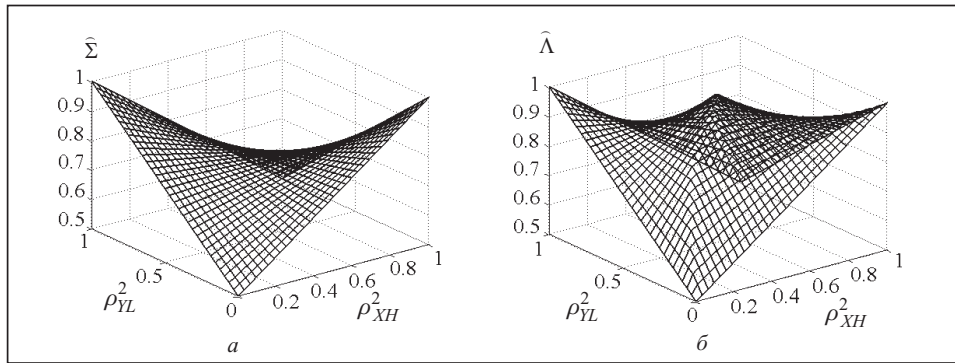


Рис. 3. Поверхности верхних границ сумм как функции переменных ρ_{XH}^2 и ρ_{YL}^2 при $\rho_{ZU}^2 = 1/2$: $\hat{\Sigma}$ (а) и $\hat{\Lambda}$ (б)

и $(1, 0)$. В центральной точке поверхности имеем $\rho_{XY}^2 = \rho_{YZ}^2 = \rho_{ZX}^2 = 1/4$, $\hat{\Sigma} = 3/4$ и $\hat{\Lambda} = 1$.

Ввиду тривиального отношения $\rho_{(md)}^2 \leq \rho_{(max)}^2$ получаем из (18) неравенство $2 \cdot \rho_{(min)}^2 + 2 \cdot \rho_{(md)}^2 \leq 1$ или $\rho_{(min)}^2 + \rho_{(md)}^2 \leq 1/2$.

Поскольку имеем $\rho_{(min)}^2 \leq \rho_{(md)}^2$, из последнего неравенства вытекает $\rho_{(min)}^2 \leq 1/4$. Таким образом, получен следующий результат.

Следствие 2. Модель (1) удовлетворяет ограничениям:

$$\min \{ \rho_{XY}^2, \rho_{YZ}^2, \rho_{ZX}^2 \} \leq 1/4, \quad (19)$$

$$\min \{ |\rho_{XY}|, |\rho_{YZ}|, |\rho_{ZX}| \} \leq 1/2, \quad (20)$$

$$\min \{ \rho_{XY}^2; QT, \rho_{YZ}^2; TW, \rho_{ZX}^2; WQ \} \leq 1/4, \quad (21)$$

$$\min \{ |\rho_{XY}; QT|, |\rho_{YZ}; TW|, |\rho_{ZX}; WQ| \} \leq 1/2. \quad (22)$$

Полученные ограничения превосходят результаты, приведенные в [6, 7]. А именно наименьший квадрат корреляции ограничен сверху величиной $1/4$ (неравенство (4) дает $1/2$). Соответственно оценка для модуля наименьшей корреляции усилена в $\sqrt{2}$ раза. Тем не менее неравенства из [7] полезны, так как получены в более общих предположениях. Действительно, для обоснования ограничений из утверждения 5 в [7] использованы неравенства $\rho_{XY}^2 \leq \rho_{XH}^2$, $\rho_{YZ}^2 \leq \rho_{YL}^2$ и $\rho_{ZX}^2 \leq \rho_{ZU}^2$, которые справедливы для значительно более широкого класса моделей. (Линейности не требуется.)

Покажем, что можно распространить полученные результаты на некоторые модели с дискретными случайными переменными. Пусть имеется модель той же структуры (см. рис. 1), но с бинарными переменными H, L, U и дискретными (необязательно бинарными) прочими переменными. Тогда легко показать, что из условной независимости переменных X и Y при условии для бинарной переменной H следует равенство $\rho_{XY}^2 = \rho_{XH}^2 \cdot \rho_{YH}^2$. (Если переменные X, Y, H категориальные, то для вычисления корреляций можно произвольно присвоить переменным действительные значения.) Если безусловно независимые дискретные переменные H и U влияют на третью дискретную переменную X , выполняется $\rho_{XH}^2 + \rho_{XU}^2 \leq 1$. Следовательно, в указанной дискретной модели выполняются те

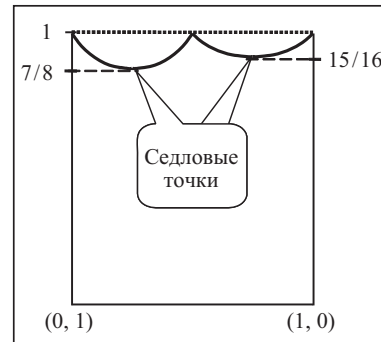


Рис. 4. Сечение поверхности верхней границы $\hat{\Lambda}$ по диагонали ($\rho_{ZU}^2 = 1/2$, $\rho_{YL}^2 = 1 - \rho_{XH}^2$)

же условия, на которых основаны доказательства результатов. Значит, полученные результаты и, в частности, неравенство (18) останутся валидными.

ПРИМЕНЕНИЕ ОГРАНИЧЕНИЙ, АНАЛИЗ НАРУШЕНИЙ И ОБСУЖДЕНИЕ

Выведенные ограничения предназначены для применения в неопределенной ситуации, когда генеративная модель, из которой получен набор корреляций, неизвестна и может отличаться от основной модели (1). Для альтернативной модели величины $\rho_{XY;QT}^2$, $\rho_{YZ;TW}^2$ и $\rho_{ZX;WQ}^2$ (определенные в (7)), могут не выражать частных корреляций. Поэтому лучше называть их, например, «калиброванными», «приведенными» или «очищенными» корреляциями для критерия. Перепишем неравенство из утверждения 2 и одно из его следствий (19) в полной форме и назовем их критерием валидации цикла, образованного тремя индикаторами и тремя скрытыми парными факторами (СЗІЗРФ).

Критерий СЗІЗРФ:

$$cr(X, Y) + cr(Y, Z) + cr(Z, X) + \min\{cr(X, Y), cr(Y, Z), cr(Z, X)\} \leq 1, \quad (23)$$

$$\min\{cr(X, Y), cr(Y, Z), cr(Z, X)\} \leq 1/4, \quad (24)$$

где

$$cr(X, Y) = \frac{\rho_{XY}^2}{(1 - \rho_{XQ}^2)(1 - \rho_{YT}^2)}, \quad cr(Y, Z) = \frac{\rho_{YZ}^2}{(1 - \rho_{YT}^2)(1 - \rho_{ZW}^2)},$$

$$cr(Z, X) = \frac{\rho_{ZX}^2}{(1 - \rho_{ZW}^2)(1 - \rho_{XQ}^2)}.$$

Если некоторая из корреляций равна нулю или неизвестна, то соответствующий член следует опустить. Это можно сформулировать в виде правила: если корреляция ρ_* неизвестна, то в (23) и (24) принимаем $\rho_* = 0$.

Нарушение критерия СЗІЗРФ свидетельствует о том, что распределение вероятностей $p(x, y, z)$, из которого вычислены «калиброванные» корреляции $cr(X, Y)$, $cr(Y, Z)$, $cr(Z, X)$, несовместимо с линейной моделью, имеющей структуру цикла с тремя коллайдерами (см. рис. 1). Иными словами, модель, из которой получен набор корреляций, нарушающий критерий СЗІЗРФ, имеет другую структуру.

Легко построить альтернативные модели, где критерий СЗІЗРФ грубо нарушается. В частности, существует много моделей, где величины ρ_{XY}^2 , ρ_{YZ}^2 и ρ_{ZX}^2 одновременно приближаются к единице. Общей чертой всех моделей, нарушающих указанные ограничения, является существование хотя бы одной связи, которая изменяет каузальный характер модели. Если некоторая альтернативная модель M нарушает критерий СЗІЗРФ, то можно утверждать, что в структуре модели M должен присутствовать общий фактор всех трех индикаторных переменных: X, Y, Z , или по крайней мере одна индикаторная переменная в модели M должна каузально влиять на другую индикаторную переменную. (Оба эти механизма могут действовать одновременно.)

Некоторые характерные варианты альтернативных моделей изображены на рис. 5. В моделях, показанных на рис. 5, а, з, есть общая причина для трех индикаторов. В структуре на рис. 5, б переменная Z непосредственно влияет на Y . В структурах на рис. 5, в, д, е переменная X является причиной для двух других. В структуре на рис. 5, е переменная X влияет на Y и Z непосредственно. Только одна эта структура среди представленных имеет насыщенную систему связей для переменных X, Y, Z . Структуру, в которой одна из переменных X, Y, Z является причиной для двух других, можно было бы рассматривать как частный случай структуры с общей причиной трех индикаторов. Однако этот частный случай отличается признаком, что переменная-причина не может иметь индивидуального фактора. Например, в структуре, показанной на рис. 5, д, любой фактор G переменной X будет ассоциирован также с Y и Z (транзитная зависимость). В некото-

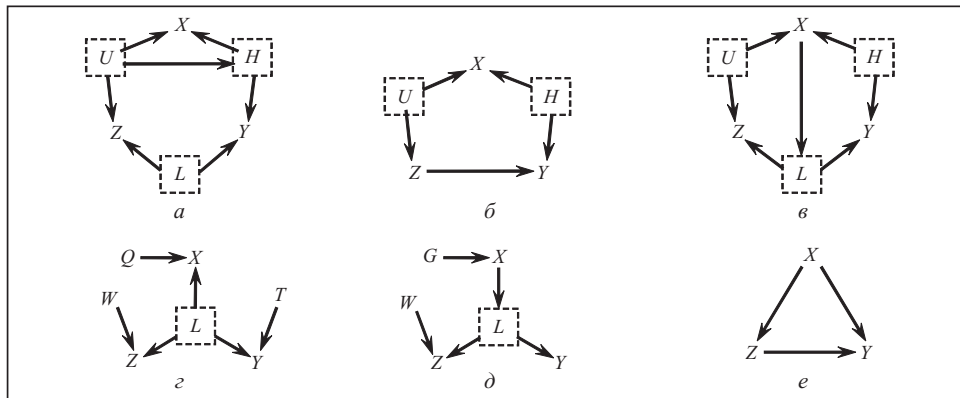


Рис. 5. Альтернативные структуры модели: структуры с общим фактором трех индикаторов (а, с); структуры, где один индикатор влияет на два других (б, д); структуры с непосредственной связью индикаторов (б, е), в том числе — насыщенная структура (е)

рых ситуациях такой признак может помочь дискриминировать модели даже без проверки критерия СЗІЗРФ. В то же время для опровержения модели (1) в пользу альтернативной модели, показанной на рис. 5, з, необходимо использовать критерий СЗІЗФ. Кстати, модели, где переменные X, Y, Z соединены структурой дерева, характеризуются известным специальным ограничением, а именно каждая из трех корреляций: $\rho_{XY}^2, \rho_{YZ}^2, \rho_{ZX}^2$, должна превышать произведение двух других. С этой точки зрения каузально различные структуры, отображенные на рис. 5, з и 5, д, подобны.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение выведенных ограничений. Пусть генеративная модель имеет структуру, показанную на рис. 5, а, но с дополнением, что на переменные X, Y и Z влияют индивидуальные факторы Q, T и W соответственно. Такая модель отличается от (1) только дополнительной связью $U \rightarrow H$, которая создает эффект общего фактора трех индикаторов. Пусть модель описывается системой

$$h = 0.75 \cdot u + \varepsilon_H, \quad x = h + u + q + \varepsilon_1, \\ y = h + l + t + \varepsilon_2, \quad z = l + u + w + \varepsilon_3,$$

где $\varepsilon_H, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, H, L, U, Q, T, W$ взаимно независимы и нормально распределены; $\varepsilon_i \sim N(m_i, \sigma_i^2)$; $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 0.5$; $\varepsilon_H \sim N(m, \sigma_H^2)$; $\sigma_H = \sigma_L = \sigma_U = \sigma_Q = \sigma_T = \sigma_W = 1$.

Вычисляем корреляции переменных X, Y и Z :

$$\rho_{XY}^2 \approx 0.237; \quad \rho_{YZ}^2 \approx 0.215; \quad \rho_{ZX}^2 \approx 0.157; \quad \rho_{XY;QT}^2 \approx 0.383; \\ \rho_{YZ;TW}^2 = 0.4; \quad \rho_{ZX;WQ}^2 \approx 0.268.$$

Получаем значения критериальных сумм:

$$\Sigma_{(o)} = \rho_{XY}^2 + \rho_{YZ}^2 + \rho_{ZX}^2 \approx 0.609; \quad \Sigma_{(p)} = \rho_{XY;QT}^2 + \rho_{YZ;TW}^2 + \rho_{ZX;WQ}^2 \approx 1.05;$$

$$\Lambda_{(o)} = \rho_{XY}^2 + \rho_{YZ}^2 + 2\rho_{ZX}^2 \approx 0.767; \quad \Lambda_{(p)} = \rho_{XY;QT}^2 + \rho_{YZ;TW}^2 + 2\rho_{ZX;WQ}^2 \approx 1.32.$$

Значения $\Sigma_{(p)}$ и $\Lambda_{(p)}$ превысили установленную верхнюю границу, что свидетельствует о неадекватности модели (1). Пример продемонстрировал, что при тестировании предпочтительнее использовать «калиброванные» корреляции (а не ординарные); это может стать решающим условием эффективности предложенного критерия. Также можно сделать вывод, что сумма $\Lambda_{(p)}$ дает значительно более жесткий критерий, чем сумма $\Sigma_{(p)}$. Если изменить один параметр модели, а именно уменьшить коэффициент дополнительной связи $U \rightarrow H$ до величины 0.675, то сумма $\Sigma_{(p)}$ не нарушит ограничения ($\Sigma_{(p)} \approx 0.997$), в то время как сумма $\Lambda_{(p)}$ по-прежнему будет значительно превышать ограниче-

ние ($\Lambda_{(p)} \approx 1.26$). Однако, когда коэффициент дополнительной связи снижается до величины приблизительно 0.385, ограничения для обоих вариантов сумм не нарушаются. Можно сказать, что при таком уровне влияния U на H эффект общего фактора трех индикаторов слишком слаб и практически не различим.

Критерий СЗІЗРФ может эффективно работать даже в усеченном (редуцированном) виде, когда приходится использовать только одно или два слагаемых критериальной суммы. Такая ситуация возможна в случае двух сценариев: в первом одна или две из трех корреляций индикаторов равны нулю (разорванный цикл), а во втором аналитику доступен сокращенный набор эмпирической информации, т.е. из трех корреляций индикаторов известны только две или одна. Заметим, что случай, когда две корреляции индикаторов равны нулю, соответствует структуре модели из известной теоремы Дж. Белла о нелокальности [8, 9]. Для такой структуры полученные результаты дают ограничение другого вида (неизвестного ранее), а именно

$$\rho_{XY}^2 \leq (1 - \rho_{XQ}^2)(1 - \rho_{YT}^2). \quad (25)$$

Нарушение неравенства (25) свидетельствует о том, что модель со структурой $Q \rightarrow X \leftarrow \circ \rightarrow Y \leftarrow T$ неконсистентна.

Рассмотрим следующий пример. Пусть аналитику известны только две корреляции: ρ_{XY} и ρ_{XQ} . Тогда критерий СЗІЗРФ редуцируется до вида $\frac{\rho_{XY}^2}{1 - \rho_{XQ}^2} \leq 1$.

Пусть фрагмент генеративной модели описывается уравнениями

$$x = h + q + \varepsilon_{1*}, \quad y = h + 0.4 \cdot x + \varepsilon_{2*}, \quad (26)$$

где $h, q, \varepsilon_{1*}, \varepsilon_{2*}$ взаимно независимы; $h \sim N(0, 1), \varepsilon_{1*} \sim N(0, 0.5), \varepsilon_{2*} \sim N(0, 0.5), q \sim N(0, 2)$. Тогда получаем корреляции $\rho_{XQ}^2 \approx 0.571; \rho_{XY}^2 \approx 0.575$ и критериальное значение $\rho_{XY}^2 / (1 - \rho_{XQ}^2) \approx 1.34$. Таким образом, критерий СЗІЗРФ грубо нарушен, базовая модель (1) опровергается. Нарушение вызвано непосредственным каузальным влиянием переменной X на Y согласно второму уравнению в (26).

(Заметим, что этот пример иллюстрирует не только ситуацию, когда нет третьего индикатора Z , ассоциированного с X и Y . Аналогичная ситуация может возникнуть, когда переменная Z не наблюдается, но она существует и связана с другими переменными так же, как в модели (1). Тогда дистурбация ε_{1*} будет включать величину $f \cdot u$ как одну из компонент, а дистурбация ε_{2*} — компоненту $c \cdot l + \beta \cdot t$.)

Рассмотрим еще один пример использования критерия СЗІЗРФ в усеченном виде. Пусть доступны только две корреляции: ρ_{XY} и ρ_{XQ} . Однако теперь генеративная модель отличается тем, что переменная Q является не фактором, а эффектом переменной X . (Проверить этот факт традиционным способом аналитик не может, так как корреляция ρ_{QY} недоступна.) Фрагмент генеративной модели описывается (неизвестными аналитику) уравнениями

$$x = h + \varepsilon_1, \quad y = h + \varepsilon_2, \quad q = x + \varepsilon_3,$$

где $h, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ взаимно независимы; $h \sim N(0, 1); \varepsilon_1 \sim N(0, 0.5); \varepsilon_2 \sim N(0, 0.5); \varepsilon_3 \sim N(0, 0.25)$.

Аналитику известны только корреляции $\rho_{XQ}^2 = 6/7, \rho_{XY}^2 = 4/9$, и он вычисляет критериальное значение $\rho_{XY}^2 / (1 - \rho_{XQ}^2) = 28/9 \approx 3.11$. Критерий СЗІЗРФ грубо нарушен, базовая модель (1) опровергается.

Понятно, что приведенные примеры использования критерия СЗІЗРФ идеализированы. В реальных ситуациях значения корреляций вычисляют из статистических выборок, а для тестирования модели строят выборочные распределения соответствующей статистики.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен и обоснован набор ограничений-неравенств для корреляций трех индикаторных переменных в линейной модели, где корреляции формируются исключительно вследствие влияния скрытых факторов, причем каждый из них влияет только на два индикатора. Выведены ограничения сверху для сумм квадратов корреляций (ординарных и частных) и для наименьшей корреляции (из трех). Эти ограничения значительно улучшают известные результаты для подобной модели. Предложенные ограничения, по-видимому, достаточно жесткие, и могут оказаться полезными для тестирования (валидации) модели в соответствующих ситуациях. Полученные результаты можно распространить на некоторые нелинейные и дискретные модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kang Ch., Tian J. Inequality constraints in causal models with hidden variables. *Proc. of 22nd Conf. on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI-06)*. AUAI Press, 2006. P. 233–240.
2. Steeg G.V., Galstyan A. A sequence of relaxations constraining hidden variable models. *Proc. of 27th Conf. on Uncertainty in Artif. Intel. (UAI-11)*. AUAI Press, 2011. P. 717–726.
3. Steudel B., Ay N. Information-theoretic inference of common ancestors. *Entropy*. 2015. Vol. 17. P. 2304–2327.
4. Chen B., Tian J., Pearl J. Testable implications of linear structural equation models. *Proc. 28th AAAI Conf. on Artif. Intel. (AAAI'14)*. Québec, Canada, AAAI Press, 2014. P. 2424–2430.
5. van Ommen T., Mooij J.M. Algebraic equivalence class selection for linear structural equation models. *Proc. of 33rd Conf. on Uncertainty in Artif. Intel. (UAI-17)*. Vol. 1. Curran Associates, Inc., 2017. P. 763–773.
6. Spirtes P., Richardson T. Ancestral graph Markov models. *Ann. Statist.* 2002. Vol. 30, N 4. P. 962–1030.
7. Balabanov O.S. Structurally determined inequality constraints on correlations in the cycle of linear dependencies. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 2. P. 173–184.
8. Gill R.D. Statistics, causality and Bell's theorem. *Statistical Science*. 2014. Vol. 29, N 4. P. 512–528.
9. Suppes P., de Barros J.A., Oas G. A collection of probabilistic hidden-variable theorems and counterexamples. In: *Waves, Information and Foundations of Physics. Conf. Proceeding*. Pratesi R., Ronchi E. (Eds.). Vol. 60. Bologna: Società Italiana Di Fisica, 1998. P. 267–291 (arXiv:quant-ph/9610010).

Надійшла до редакції 11.05.2018

О.С. Балабанов

ВЕРХНЯ МЕЖА ДЛЯ СУМИ КОРЕЛЯЦІЙ ТРЬОХ ІНДИКАТОРІВ ЗА ВІДСУТНОСТІ СПІЛЬНОГО ФАКТОРА

Анотація. Показано, що в лінійній моделі з трьома індикаторними змінними, де кожна пара індикаторів має окремий прихований «парний» фактор, сума трьох кореляцій обмежена зверху. Порушення встановленого обмеження свідчить про те, що каузальна структура генеративної моделі відрізняється від припущеної. У випадку порушення нерівності можна стверджувати, що існує загальна причина трьох індикаторів, або що одна з індикаторних змінних каузально впливає на іншу. Обмеження можна ефективно застосовувати навіть за неповної спостережуваності (зокрема, коли спостерігаються тільки дві індикаторні змінні).

Ключові слова: кореляція, обмеження типу нерівність, цикл з трьома колізорами, прихована загальна причина, система лінійних структуральних рівнянь.

O.S. Balabanov

UPPER BOUND ON CORRELATION SUM FOR THREE INDICATORS UNDER ABSENCE OF COMMON FACTOR

Abstract. We demonstrate that in linear model with three indicator variables, where each pair of indicators is associated by separate hidden pairwise factor, the sum of correlations is upper bounded. The inequality constraint violation manifests that the underlying causal structure differs from the supposed one. In the case of the inequality violation, one may suggest that there is a common cause of the three indicators, or one indicator variable causally influences the other one. The inequality constraint remains efficient under partial observability (for instance, when two indicators only are observed).

Keywords: correlation, inequality constraint, cycle with three colliders, hidden common cause, linear SEM.

Балабанов Александр Степанович,

доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института программных систем НАН Украины, Киев, e-mail: bas@isofts.kiev.ua.