



**Аннотация.** Предложен алгоритм наилучшего равномерного приближения сплайном с оптимальными узлами. Для поиска оптимальных узлов использована дифференциальная эволюция — один из лучших эволюционных алгоритмов, стабильно находящий глобальный оптимум функции за минимальное время. Коэффициенты сплайна определены как решение задачи сплайн-аппроксимации с фиксированными узлами. Приведены результаты вычислительного эксперимента.

**Ключевые слова:** наилучшая равномерная аппроксимация, сплайн, оптимальные узлы, дифференциальная эволюция.

#### ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия интенсивно исследуется и используется в прикладных задачах аппарат сплайнов. Они применяются при расчете на прочность строительных конструкций, для аналитического описания поверхностей деталей машин, траектории движения резца станка с программным управлением и др. [1–3]. Особенно популярны интерполяционные сплайны степени не выше трех, поскольку соответствующей гладкости во многих задачах достаточно и параметры такого сплайна легко вычисляются. Однако нахождение параметров интерполяционных сплайнов более высоких степеней, например в случае неравномерной сетки, затруднительно [1].

На практике используются также сплайны наилучшего приближения. При одинаковом числе параметров такой сплайн приближает функцию не хуже, чем интерполяционный, и при этом для его построения не требуется задавать в узлах краевых условий [1]. С учетом этого во многих прикладных задачах применение сплайнов наилучшего приближения оказывается более предпочтительным [4, 5].

Принципиально различается два случая наилучшей аппроксимации сплайнами: с фиксированными и со свободными узлами, когда заданными считаются их число и степень сплайна, но сами узлы не фиксируются. В последнем случае узлы рассматриваются как свободные параметры, что позволяет не только значительно уменьшить погрешность аппроксимации сплайном, но и достичь минимальной погрешности при использовании оптимальных узлов. Отметим, что нахождение таких узлов является сложной нелинейной задачей многомерной оптимизации.

В настоящей статье рассматриваются сплайны наилучшего приближения в равномерной (чебышевской, минимаксной) норме и для поиска оптимальных узлов предлагается эвристический подход с применением алгоритма дифференциальной эволюции, предназначенного для поиска глобального оптимума нели-

нейных, недифференцируемых, мультимодальных функций многих переменных и являющегося прямым методом оптимизации.

#### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБЗОР МЕТОДОВ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Пусть  $f(x)$  — непрерывная на отрезке  $[\alpha, \beta]$  функция,  $T = (t_1, \dots, t_r)$  — вектор узлов, таких что  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_r < t_{r+1} = \beta$ . Функция  $s(x)$  называется сплайном степени  $n$  дефекта  $k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) с узлами  $T$ , если на каждом промежутке  $[t_{j-1}, t_j]$  ( $j=1, \dots, r+1$ ) она совпадает с некоторым многочленом степени  $n$  и  $s \in C^{n-k}[\alpha, \beta]$  [1]. Будем рассматривать множество  $S_{n,r}$  полиномиальных сплайнов степени  $n$  дефекта  $k=1$  с  $r$  узлами. Произвольный сплайн  $s \in S_{n,r}$  можно представить в виде

$$s(x) = \sum_{i=0}^n a_i (x-\alpha)^i + \sum_{i=1}^r a_{n+i} (x-t_i)_+^n, \quad (1)$$

причем такое представление единственно (см., например, [6]). В формуле (1) коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_{n+r}$  — действительные числа и

$$(x-t_i)_+^n = \begin{cases} (x-t_i)^n, & x > t_i, \\ 0, & x \leq t_i. \end{cases}$$

Задача наилучшего равномерного приближения функции  $f$  сплайном с  $r$  фиксированными узлами состоит в нахождении сплайна  $s^* \in S_{n,r}$ , для которого

$$\max_{x \in [\alpha, \beta]} |f(x) - s^*(x)| = \min_{\{a_0, a_1, \dots, a_{n+r}\}} \max_{x \in [\alpha, \beta]} |f(x) - s(x)|. \quad (2)$$

Методы решения задачи (2) достаточно хорошо разработаны. Они являются реализацией двух основных подходов. Первый подход [7–9] состоит в замене промежутка приближения  $[\alpha, \beta]$  некоторой сеткой и сведении дискретной задачи (2) к задаче линейного программирования. Второй подход [10, 11] заключается в обобщении на случай сплайнов метода последовательных чебышевских интерполяций Ремеза [12]. Теоретической основой данного подхода является утверждение [13], что для каждой функции  $f \in C[\alpha, \beta]$  существует наилучшая аппроксимация  $s_f \in S_{n,r}$  такая, что разность  $f - s_f$  имеет по крайней мере  $(n+r+2)$  точек, в которых она достигает своего максимального по модулю значения с последовательной переменной знака.

Обозначим  $\mu(T)$  погрешность наилучшего равномерного приближения функции  $f$  сплайном с фиксированными узлами  $T$

$$\mu(T) = \min_{\{a_0, a_1, \dots, a_{n+r}\}} \max_{x \in [\alpha, \beta]} |f(x) - s(x, T)|.$$

Задача наилучшего равномерного приближения функции  $f$  сплайном с  $r$  свободными узлами состоит в нахождении сплайна  $s^* \in S_{n,r}$ , удовлетворяющего условию

$$\max_{x \in [\alpha, \beta]} |f(x) - s^*(x)| = \min_{\{T\}} \mu(T). \quad (3)$$

В отличие от случая фиксированных узлов наилучшие сплайн-приближения со свободными узлами невозможно охарактеризовать только альтернансными свойствами разности функции и сплайна. Какими должны быть дополнительные условия, чтобы полностью охарактеризовать наилучшее сплайн-приближение, в настоящее время неизвестно [14]. Исследования в этом направлении продолжаются (см., например, [15]).

Для практического построения сплайна наилучшего приближения со свободными узлами необходимо найти оптимальный вектор узлов  $T^* = (t_1^*, \dots, t_r^*)$ , на котором достигается минимум в задаче (3). Погрешность аппроксимации сплайном с узлами  $T^*$  обозначим  $\rho = \mu(T^*)$ . Это наименьшая погрешность приближения функции  $f$  в равномерной норме среди всех сплайнов  $s \in S_{n,r}$ .

При небольших  $r$  для поиска  $T^* = (t_1^*, \dots, t_r^*)$  можно применять общие методы минимизации функций многих переменных. Но с ростом числа узлов увеличивается размерность пространства поиска и возникают серьезные трудности численного дифференцирования. Кроме того, погрешность  $\mu(T)$  обычно не чувствительна к малым изменениям в  $T$  вблизи  $T^*$  [8]. Все это ограничивает применение общих методов.

Более эффективными являются два специальных метода: секущей плоскости (secant plane method) и упрощенный метод Ньютона (simplified Newton's method), учитывающие характеристические свойства наилучшего равномерного приближения [8]. Однако сходимость методов типа Ньютона обеспечивается лишь в случае, если они стартуют с почти оптимальных узлов [16]. Поскольку в общем случае такие узлы неизвестны, то сходимость методов не гарантируется. Но даже если они сходятся, то в общем случае строятся локальные наилучшие приближения.

В [16] предложен алгоритм, сходящийся с произвольных узлов, например равноотстоящих, и позволяющий получать достаточно хорошую глобальную аппроксимацию. Он состоит из двух этапов: вначале вычисляются оптимальные узлы  $\hat{T}$  кусочно-многочленного приближения (так называемая сегментная аппроксимация, в которой непрерывность аппроксиманта не требуется) с использованием метода regula falsi, затем узлы  $\hat{T}$  фиксируются и строится сплайн необходимой гладкости с помощью аналога алгоритма Ремеза. Так как  $\lambda(\hat{T}) < \rho \leq \mu(\hat{T})$ , где  $\lambda(\hat{T})$  — погрешность кусочно-многочленного приближения с оптимальными узлами, то погрешность  $|\rho - \mu(\hat{T})|$  меньше, чем значение  $|\lambda(\hat{T}) - \mu(\hat{T})|$ , которое можно вычислить с помощью алгоритма [16].

Таким образом, в существующих алгоритмах для нахождения оптимальных или близких к ним узлов, как правило, необходимо решать трансцендентные уравнения, системы таких уравнений или системы дифференциальных уравнений, что создает определенные вычислительные сложности. Поэтому актуальна разработка новых эффективных и более простых в реализации алгоритмов решения задачи (3).

Для поиска оптимальных узлов сплайна (аналогично случаю сегментной аппроксимации [17, 18]) предлагается адаптировать алгоритм дифференциальной эволюции (ДЭ) [19]. Он относится к группе эволюционных алгоритмов (ЭА) — современного эффективного инструмента решения оптимизационных задач. В ЭА создаются популяции из решений, которые в результате применения операторов скрещивания, мутации и селекции постоянно модифицируются. С ростом числа поколений решения сходятся в некоторую точку пространства решений, являющуюся глобальным оптимумом. Алгоритм ДЭ — один из лучших ЭА, с его помощью стабильно определяется оптимум функции за минимальное время [19]. Кроме того, он прост в реализации и использовании (содержит мало параметров, требующих настройки), легко распараллеливается.

## АЛГОРИТМ НАИЛУЧШЕГО РАВНОМЕРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ СПЛАЙНОМ С ОПТИМАЛЬНЫМИ УЗЛАМИ

Эволюционный процесс в алгоритме ДЭ начинается с генерации популяции случайных векторов, координатами которых являются возможные значения узлов сплайна. Далее для каждого вектора, называемого базовым, с использованием трех других случайных векторов из того же поколения создается мутантный вектор. Над последним выполняется операция скрещивания. Вектор, полученный после скрещивания, называется пробным. В новое поколение включается тот вектор — базовый или пробный, значение целевой функции (критерия оптимизации) которого меньше. Эволюционный процесс заканчивается, если выполняется одно из терминальных условий (исчерпано максимальное число поколений популяций и др. [19]).

Опыт применения ЭА для решения задач аппроксимации функций показал, что при большом числе оптимизируемых параметров их результативность ухудшается вследствие сильного увеличения размера области поиска [20–22], хотя и в этих случаях можно получить приемлемые результаты. В предлагаемом алгоритме наилучшего равномерного приближения сплайном со свободными узлами ДЭ применяется только для поиска оптимальных узлов  $T^* = (t_1^*, \dots, t_r^*)$ , а коэффициенты сплайна  $a_0, a_1, \dots, a_{n+r}$  находятся как решение задачи аппроксимации сплайном с фиксированными узлами (2). Это позволяет преодолеть вычислительные трудности, вызванные большой размерностью, в случае одновременного поиска и узлов, и коэффициентов сплайна.

Далее приведена вычислительная схема алгоритма наилучшего равномерного приближения функции полиномиальным сплайном со свободными узлами, в котором для поиска оптимальных узлов применяется ДЭ.

1. Устанавливается номер поколения  $G=0$  и создается популяция  $P_G = \{T_{1,G}, \dots, T_{NP,G}\}$ , состоящая из векторов  $T_{i,G} = (t_{i,1,G}, \dots, t_{i,r,G})$ ,  $i=1, \dots, NP$ , где  $NP$  — размер популяции. Координаты векторов вычисляются по формуле

$$t_{i,j,G} = \text{rand}(0,1) \cdot (\beta - \alpha), \quad j=1, \dots, r, \quad (4)$$

где  $\text{rand}(0,1)$  — случайное число из интервала  $(0,1)$ .

2. Для каждого вектора  $T_{i,G} = (t_{i,1,G}, \dots, t_{i,r,G})$  вычисляется значение целевой функции  $F(T_{i,G})$ , равное погрешности наилучшего равномерного приближения заданной функции  $f$  сплайном  $s$  с узлами  $t_{i,1,G}, \dots, t_{i,r,G}$ :

$$F(T_{i,G}) = \mu(T_{i,G}).$$

Для нахождения величины  $\mu(T_{i,G})$  применяется алгоритм чебышевской аппроксимации полиномиальными сплайнами степени  $n$  дефекта  $k=1$  с фиксированными узлами [9], в котором используется сведение к задаче линейного программирования с главной двойственной максимум-задачей заменой промежутка аппроксимации  $[\alpha, \beta]$  некоторой (равномерной или неравномерной) сеткой  $D_m = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset [\alpha, \beta]$ , где  $m \gg n+r+1$ .

3. Для каждого базового вектора  $T_{i,G}$ ,  $i=1, \dots, NP$ , определяется мутантный вектор  $V_{i,G} = (v_{i,1,G}, \dots, v_{i,r,G})$  по формуле

$$V_{i,G} = T_{b,G} + FM \cdot (T_{c,G} - T_{d,G}), \quad (5)$$

где  $b$ ,  $c$  и  $d$  — случайные целые числа из промежутка  $[1, NP]$ ,  $b \neq c \neq d \neq i$ ,  $FM$  — заданная положительная вещественная константа из интервала  $(0,2]$ , которая называется силой мутации и определяет амплитуду возмущений, вносимых в вектор  $T_{b,G}$  внешним шумом. Если какая-либо из координат вектора  $V_{i,G}$  вы-

ходит за границы промежутка  $[\alpha, \beta]$ , то с помощью генератора случайных чисел выбираются новые значения индексов  $b, c, d$  и по формуле (5) выполняется пересчет вектора  $V_{i,G}$ .

4. Выполняется операция скрещивания. Вычисляются координаты пробного вектора  $U_{i,G} = (u_{i,1,G}, \dots, u_{i,r,G})$ ,  $i = 1, \dots, NP$ , по формуле

$$u_{i,j,G} = \begin{cases} v_{i,j,G}, & \text{если } \text{rand}(0,1) \leq CR \vee j = j_{\text{rand}}, \\ t_{i,j,G} & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad j = 1, \dots, r, \quad (6)$$

где  $j_{\text{rand}}$  — случайное целое число из диапазона  $[1, r]$ ,  $CR$  — заданная вероятность скрещивания, с которой пробный вектор  $U_{i,G}$  унаследует искаженный мутацией генетический признак от вектора  $T_{b,G}$ .

5. Вычисляется значение целевой функции пробного вектора  $F(U_{i,G})$ .

6. Для включения в новое поколение с номером  $G+1$  выбирается тот из векторов  $U_{i,G}$  и  $T_{i,G}$ , значение целевой функции  $F$  которого меньше

$$T_{i,G+1} = \begin{cases} U_{i,G}, & \text{если } F(U_{i,G}) \leq F(T_{i,G}), \\ T_{i,G} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

7. Если выполняется одно из терминальных условий: исчерпано максимальное число поколений популяции  $G_{\text{max}}$ , относительный разброс значений целевой функции в популяции меньше заданной величины  $\delta$  (условие стагнации эволюционного процесса)

$$\max_{i=1, \dots, NP} F(T_{i,G}) - \min_{i=1, \dots, NP} F(T_{i,G}) < \delta \cdot \min_{i=1, \dots, NP} F(T_{i,G}),$$

то для лучшего вектора узлов из последнего поколения вычисляются коэффициенты сплайна наилучшего равномерного приближения и завершается работа алгоритма. По умолчанию полагается  $G_{\text{max}} = 200$ ,  $\delta = 10^{-4}$ . Если ни одно из перечисленных условий не выполняется, то осуществляется переход к п. 3.

**Замечание 1.** Для корректной работы алгоритма в пп. 1, 3 и 4 после вычислений соответственно по формулам (4)–(6) необходимо выполнять процедуру упорядочивания координат векторов по возрастанию.

**Замечание 2.** Алгоритм можно использовать не только для сплайнов степени  $n$  дефекта  $k = 1$ , но и для аппроксимации сплайнами произвольного дефекта  $0 \leq k \leq n$ . Для этого в алгоритме [9], который применяется для вычисления значений целевой функции, необходимо внести соответствующие изменения в процедуру формирования начальной симплекс-таблицы задачи линейного программирования.

Размер популяции  $NP$ , сила мутации  $FM$  и вероятность скрещивания  $CR$  являются параметрами настройки алгоритма ДЭ, и выбор их значений в большой степени зависит от решаемой задачи [19]. По результатам выполненного исследования для поиска оптимальных узлов сплайна рекомендуются следующие настройки:  $5r \leq NP \leq 10r$ ,  $0.4 \leq FM \leq 0.5$ ,  $0.9 \leq CR \leq 1$ . Отметим, что ввиду стохастического характера алгоритма ДЭ для получения приемлемого по точности решения алгоритм нужно выполнить несколько раз. В частности, при проведении вычислительного эксперимента выполнялось 10 запусков алгоритма.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Для проверки эффективности предложенного алгоритма выполнен вычислительный эксперимент по получению наилучших равномерных приближений ряда функций сплайнами различной степени  $n$  и с разным количеством узлов  $r$ . В табл. 1 и 2 приведены результаты аппроксимации на отрезке  $[0, 1]$  для функ-

**Таблица 1.** Аппроксимация функции  $f_1(x) = (1+x)^{-1}$  на отрезке  $[0, 1]$

Количество узлов, $r$	Сплайн степени $n$		
	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
0	$\rho = 1.263 \cdot 10^{-3}$	$\rho = 2.166 \cdot 10^{-4}$	$\rho = 3.717 \cdot 10^{-5}$
1	$\rho = 1.494 \cdot 10^{-4}$ $t_1^* = 0.3895$	$\rho = 2.063 \cdot 10^{-5}$ $t_1^* = 0.3935$	$\rho = 2.972 \cdot 10^{-6}$ $t_1^* = 0.3965$
2	$\rho = 3.750 \cdot 10^{-5}$ $t_1^* = 0.2560, t_2^* = 0.5397$	$\rho = 4.202 \cdot 10^{-6}$ $t_1^* = 0.2704, t_2^* = 0.5352$	$\rho = 5.088 \cdot 10^{-7}$ $t_1^* = 0.27996, t_2^* = 0.5291$
3	$\rho = 1.345 \cdot 10^{-5}$ $t_1^* = 0.1938, t_2^* = 0.3921,$ $t_3^* = 0.6332$	$\rho = 1.259 \cdot 10^{-6}$ $t_1^* = 0.2059, t_2^* = 0.3960,$ $t_3^* = 0.6234$	$\rho = 1.303 \cdot 10^{-7},$ $t_1^* = 0.21650, t_2^* = 0.3988,$ $t_3^* = 0.6139$
4	$\rho = 5.952 \cdot 10^{-6}$ $t_1^* = 0.1549, t_2^* = 0.3070,$ $t_3^* = 0.4850, t_4^* = 0.6944$	$\rho = 4.770 \cdot 10^{-7}$ $t_1^* = 0.1662, t_2^* = 0.3141,$ $t_3^* = 0.4851, t_4^* = 0.6835$	$\rho = 4.296 \cdot 10^{-8}$ $t_1^* = 0.1764, t_2^* = 0.3199,$ $t_3^* = 0.4840, t_4^* = 0.6729$

**Таблица 2.** Аппроксимация функции  $f_2(x) = \sqrt{x}$  на отрезке  $[0, 1]$

Количество узлов, $r$	Сплайн степени $n$		
	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
0	$\rho = 0.06764$	$\rho = 0.04598$	$\rho = 0.03471$
1	$\rho = 0.01916$ $t_1^* = 0.0590$	$\rho = 0.01223$ $t_1^* = 0.0395$	$\rho = 0.00894$ $t_1^* = 0.0295$
2	$\rho = 0.00823$ $t_1^* = 0.0109, t_2^* = 0.1523$	$\rho = 0.00494$ $t_1^* = 0.0064, t_2^* = 0.1075$	$\rho = 0.00349$ $t_1^* = 0.0045, t_2^* = 0.0823$
3	$\rho = 0.00435$ $t_1^* = 0.0031, t_2^* = 0.0414,$ $t_3^* = 0.2381$	$\rho = 0.00243$ $t_1^* = 0.0016, t_2^* = 0.0261,$ $t_3^* = 0.1747$	$\rho = 0.00165$ $t_1^* = 0.0010, t_2^* = 0.0185,$ $t_3^* = 0.1357$

ций  $f_1(x) = (1+x)^{-1}$  и  $f_2(x) = \sqrt{x}$  соответственно. Отметим, что результаты для функции  $f_2(x) = \sqrt{x}$  практически совпадают с известными [8] результатами, полученными по методу секущей плоскости и упрощенному методу Ньютона. Среднее число поколений, необходимых для нахождения оптимальных узлов с помощью алгоритма ДЭ, в случае функции  $f_1(x) = (1+x)^{-1}$  равно 20, 35, 60 и 87 при  $r=1, 2, 3, 4$  соответственно, а в случае функции  $f_2(x) = \sqrt{x}$  — 17, 38 и 58 при  $r=1, 2$  и 3 соответственно.

В табл. 3 приведены результаты аппроксимации функций кубическими сплайнами с тремя узлами. Для сравнения точности приближений сплайнами с различными узлами для ряда функций используются следующие обозначения:  $\rho$  — погрешность наилучшей равномерной аппроксимации кубическим

**Таблица 3.** Аппроксимация функций кубическими сплайнами с тремя узлами

Функция	$\rho$	$\mu(\hat{T})$	$\mu(\tilde{T})$
$f_1(x) = (1+x)^{-1}, x \in [0, 1]$	$1.345 \cdot 10^{-5}$	$2.039 \cdot 10^{-5}$	$3.328 \cdot 10^{-5}$
$f_2(x) = \sqrt{x}, x \in [0, 1]$	$2.43 \cdot 10^{-3}$	$3.52 \cdot 10^{-3}$	$2.724 \cdot 10^{-2}$
$f_3(x) = e^x, x \in [0, 1]$	$5.716 \cdot 10^{-6}$	$8.487 \cdot 10^{-6}$	$9.524 \cdot 10^{-6}$
$f_4(x) = (1+x^2)^{-1}, x \in [-5, 5]$	$1.509 \cdot 10^{-2}$	$5.112 \cdot 10^{-2}$	$1.1421 \cdot 10^{-1}$



сплайном с оптимальными узлами  $T^*$ , найденными с помощью алгоритма ДЭ;  $\mu(\hat{T})$  — погрешность равномерного приближения сплайном, где в качестве узлов выбраны, как предложено в [16], оптимальные узлы  $\hat{T}$  сегментной аппроксимации (для расчетов последовательно применялись алгоритмы из [17] и [9]);  $\mu(\tilde{T})$  — погрешность равномерного приближения сплайном с равноотстоящими узлами  $\tilde{T}$  (для расчетов применялся алгоритм из [9]).

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен алгоритм наилучшего равномерного приближения полиномиальным сплайном с оптимальными узлами. Этот сплайн имеет наименьшую погрешность аппроксимации функции среди всех сплайнов той же степени и с таким же количеством узлов. Для поиска оптимальных узлов используется ДЭ — один из лучших стохастических алгоритмов, стабильно находящий глобальный оптимум функции за минимальное время. К преимуществам ДЭ можно отнести высокую точность определения оптимальных узлов, простоту программной реализации и использования (содержит мало параметров настройки, требующих подбора), что подтверждено результатами вычислительного эксперимента. Предложенный подход с использованием ДЭ для поиска оптимальных узлов можно применять и в случае сплайнов наилучшего квадратичного приближения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. Москва: Наука, 1976. 248 с.
2. Бердышев В.И., Петрак Л.В. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения. Екатеринбург: УрО РАН, 1999. 297 с.
3. Vakai E.S., Kivva S.L., Mistetskii G.E., Stelya O.B. Solution method for nonlinear parabolic equations. *Journal of Mathematical Sciences*. 1991. Vol. 54, N 2. P. 781–786.
4. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. Киев: Наук. думка, 1989. 272 с.
5. Малахівський П.С., Скопецький В.В. Неперервне й гладке мінімаксне сплайн-наближення. Київ: Наук. думка, 2013. 270 с.
6. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. Москва: Наука, 1987. 424 с.
7. Barrodale J., Young A. A note on numerical procedures for approximation by spline functions. *Comput. J.* 1966. Vol. 9. P. 318–320.
8. Esch R.E., Eastman W.L. Computational methods for best spline function approximation. *Journal of Approximation Theory*. 1969. Vol. 2, N 1. P. 85–96.
9. Вакал Л.П. Побудова найкращих чебишевських наближень сплайнами. *Штучний інтелект*. 2017. № 2. С. 94–100.
10. Schumaker L.L. Some algorithms for the computation of interpolating and approximating spline functions. Theory and applications of spline functions. New York: Academic Press, 1969. P. 87–102.
11. Nürnberger G., Sommer M. A Remez type algorithm for spline functions. *Numer. Math.* 1983. Vol. 41, N 1. P. 117–146.
12. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев: Наук. думка, 1969. 623 с.
13. Schumaker L.L. Uniform approximation by chebyshev spline functions. II. Free knots. *SIAM Journal of Numerical Analysis*. 1968. Vol. 5, N 4. P. 647–656.
14. Nürnberger G. Bivariate segment approximation and free knot splines; research problems 96-4. *Constructive Approximation*. 1996. Vol. 12, N 4. P. 555–558.

15. Crouzeix J.P., Sukhorukova N., Ugon J. Characterization theorem for best polynomial spline approximation with free knots, variable degree and fixed tails. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2017. Vol. 172, N 3. P. 950–964.
16. Meinardus G., Nürnberger G., Sommer M., Strauss H. Algorithm for piecewise polynomials and splines with free knots. *Math. of Computation*. 1989. Vol. 53, N 187. P. 235–247.
17. Vakal L.P. Seeking optimal knots for segment approximation. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48, N 11. P. 68–75.
18. Vakal L.P., Kalenchuk-Porkhanova A.A., Vakal E.S. Increasing the efficiency of Chebyshev segment fractional rational approximation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 5. P. 759–765.
19. Storn R., Price K. Differential evolution — a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*. 1997. Vol. 11. P. 341–359.
20. Вакал Л.П. Генетичні алгоритми для чебишовської апроксимації. *Комп'ютерні засоби, мережі та системи*. 2013. № 12. С. 20–26.
21. Vakal L.P. Solving uniform nonlinear approximation problem using continuous genetic algorithm. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48, N 6. P. 49–59.
22. Вакал Л.П. Апроксимація функцій багатьох змінних із застосуванням алгоритму диференціальної еволюції. *Математичні машини і системи*. 2017. № 1. С. 90–96.

*Надійшла до редакції 26.06.2018.*

**Л.П. Вакал, Є.С. Вакал**  
**АЛГОРИТМ НАЙКРАЩОЇ РІВНОМІРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ СПЛАЙНАМИ**  
**З ВІЛЬНИМИ ВУЗЛАМИ**

**Анотація.** Запропоновано алгоритм найкращого рівномірного наближення сплайном з оптимальними вузлами. Для пошуку оптимальних вузлів застосовано диференціальну еволюцію — один з найкращих еволюційних алгоритмів, що стабільно знаходить оптимум функції за мінімальний час. Коефіцієнти сплайна визначено як розв'язання задачі сплайн-апроксимації з фіксованими вузлами. Наведено результати обчислювального експерименту.

**Ключові слова:** найкраща рівномірна апроксимація, сплайн, оптимальні вузли, диференціальна еволюція.

**L.P. Vakal, E.S. Vakal**  
**ALGORITHM FOR BEST UNIFORM SPLINE APPROXIMATION WITH FREE KNOTS**

**Abstract.** An algorithm for best uniform spline approximation with free knots is presented in this paper. A differential evolution is used for finding the optimal knots. It is one of the best evolutionary algorithms which finds function's global optimum in minimum time. Spline coefficients are computed as a solution of a spline-approximation problem with fixed knots. Results of the numerical experiment are given.

**Keywords:** best uniform approximation, spline, optimal knots, differential evolution.

**Вакал Лариса Петровна,**  
кандидат техн. наук, старший научний співробітник Інститута кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: lara.vakal@gmail.com.

**Вакал Евгений Сергеевич,**  
кандидат физ.-мат. наук, доцент Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: jvakal@gmail.com.