УДК 519.853

Ю.П. ЛАПТИН, Т.А. БАРДАДЫМ

ПРОБЛЕМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТОЧНЫХ ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Рассмотрены новые подходы к оцениванию коэффициентов точных штрафных функций для оптимизационных задач с ограничениями. Приведены результаты вычислительных экспериментов с использованием упрощенных процедур оценивания коэффициентов при решении некоторых классов задач. Наиболее актуальны такие подходы при применении методов декомпозиции по переменным (обобщенных методов декомпозиции Бендерса). Это позволяет преодолевать проблемы, связанные с неявным описанием допустимой области координирующей задачи.

Ключевые слова: точные штрафные функции, структурированные задачи оптимизации, методы декомпозиции.

ВВЕДЕНИЕ

Использование точных штрафных функций позволяет для оптимизационных задач с ограничениями формировать эквивалентные задачи безусловной оптимизации. При этом эквивалентность достигается при конечных значениях штрафных коэффициентов. Впервые точные штрафные функции предлагались в [1, 2]. Вопросам исследования и использования точных штрафных функций и их обобщений посвящено большое количество работ (см., например, [3–11]).

Точные штрафные функции могут быть недифференцируемыми, поэтому для решения сформированных задач безусловной оптимизации естественно применять методы негладкой оптимизации. Точные штрафные функции широко используются и в методах гладкой оптимизации, а именно в методе линеаризации [9, 10], последовательного квадратичного программирования [12, 13] и др.

Свойства точных штрафных функций исследованы, например в [7–11], а вопросы построения различных форм точных штрафных функций рассмотрены в [5, 6]. При формулировке условий, которым должны удовлетворять штрафные коэффициенты, обычно выбирают оптимальные значения множителей Лагранжа исходной задачи.

При использовании точных штрафных функций существенна проблема определения значений штрафных коэффициентов, при которых штрафная функция является точной. Для преодоления этой проблемы применяются различные подходы, а именно решение последовательности задач минимизации штрафной функции при увеличивающихся значениях штрафных коэффициентов; решение вспомогательных упрощенных (линеаризованных) задач для оценки оптимальных значений множителей Лагранжа; выбор значений штрафных коэффициентов пользователем при решении конкретной задачи.

Вспомогательные (линеаризованные) задачи часто используются для определения направления спуска из текущей точки в алгоритмах линеаризации и последовательного квадратичного программирования [9–13]. Для оценки оптимальных значений множителей Лагранжа в этом случае дополнительные затраты обычно не требуются. Сложности возникают, если в текущей точке вспомогательная задача не имеет решений.

При решении оптимизационных задач большой размерности, имеющих блочную структуру со связывающими переменными, широко применяются методы декомпозиции по переменным (обобщенные методы декомпозиции Бендерса [14–20]), сводящие решение исходной задачи к решению координирующей задачи и совокупности подзадач меньшего объема (блоков). Ограничения координирующей задачи описываются неявно, и при использовании таких методов возникают определенные проблемы в случае отсутствия решений подзадач при некоторых значениях связывающих переменных. Если подзадачи не имеют решений, генерируются отсечения допустимости для аппроксимации допустимой области координирующей задачи. В работе [18] приводится пример нелинейной выпуклой задачи, когда использование отсечений допустимости, предложенных в [15, 16], не обеспечивает сходимости к оптимальному решению исходной задачи. В связи с этим предлагается специальная форма отсечений допустимости. Применение точных штрафных функций позволяет преодолеть указанные проблемы, но в [18] отмечается, что получить оценки штрафных коэффициентов с использованием решений подзадач невозможно.

В работах [21, 22] для задач выпуклого программирования предлагались простые процедуры оценки штрафных коэффициентов, не требующие решения сложных вспомогательных задач. Для их применения должна быть известна допустимая точка исходной задачи, удовлетворяющая условию Слейтера.

В настоящей работе рассмотрены обобщения предложенных ранее подходов для оценки штрафных коэффициентов. В разд. 1 сформулированы достаточные условия, при выполнении которых штрафная функция является точной, определены вспомогательные задачи, приближенные решения которых можно использовать при оценке штрафных коэффициентов. В разд. 2 рассмотрены возможности применения предложенных подходов в схемах декомпозиции по переменным для блочных задач оптимизации со связывающими переменными. В разд. 3 описаны упрощенные процедуры уточнения штрафных коэффициентов как для задач, удовлетворяющих условию Слейтера, так и для задач, содержащих ограничения-равенства. Приведены результаты вычислительных экспериментов на случайно генерируемых задачах линейного программирования.

1. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ТОЧНОСТИ ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим задачу оптимизации: найти

$$f_0^* = \min \{f_0(x) \colon x \in C, x \in M\}, \tag{1}$$

где $C = \{x \colon f_i(x) \le 0,\ i = 1, \ldots, m, x \in R^n\}$, $f_i \colon R^n \to R$, $i = 0, \ldots, m$, — выпуклые функции, M — некоторое (простое) выпуклое множество, $M \subseteq R^n$. В качестве множества M обычно используется положительный ортант пространства R^n, множества с двусторонними ограничениями на переменные и другие множества простой структуры.

Положим

$$\Phi_\beta(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \beta_i f_i^+(x),\ F_\lambda(x) = f_0(x) + \lambda \cdot h^+(x),\ \lambda, \beta_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, m,$$

где $f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$, $h(x) = \max\{f_i(x), i = 1, \ldots, m\}$,

$$\Phi_\beta^* = \min\{\Phi_\beta(x) \colon x \in M\}, \tag{2}$$

$$F_\lambda^* = \min\{F_\lambda(x) \colon x \in M\}. \tag{3}$$

Далее предполагается, что задача (1) имеет решение. Функцию $\Phi_\beta(x)$ (или $F_\lambda(x)$) будем называть точной штрафной функцией, если решения задач (1) и (2) (соответственно (3)) совпадают. Условия, при которых функции $\Phi_\beta(x)$ и $F_\lambda(x)$ являются точными, исследовались в [7, 9].

Обозначим

$$C(\eta)=\{x: h(x)\le\eta,\ x\in R^n\},$$

где $\eta\in R$, $F_\lambda(\eta,x)=f_0(x)+\lambda\cdot(h(x)-\eta)^+$,

$$f_0^*(\eta)=\min\{f_0(x): x\in C(\eta),\ x\in M\}, \tag{4}$$

$$F_\lambda^*(\eta)=\min\{F_\lambda(\eta,x): x\in M\}.$$

Лемма 1. Пусть M — компактное множество, заданы числа $\eta_1, \eta_2, \eta_1<\eta_2$, задача (4) имеет решение при $\eta=\eta_1$, коэффициент λ такой, что $F_\lambda(\eta,x)$ является точной штрафной функцией для задачи (4) при $\eta=\eta_1$. Тогда $F_\lambda(\eta,x)$ является точной штрафной функцией для задачи (4) при $\eta=\eta_2$.

Доказательство. Обозначим $x^*(\eta_1)$ решение задачи (4) при $\eta=\eta_1$. Очевидно, что задача (4) имеет решение при $\eta=\eta_2$. Положим

$$x_2^*=\arg\min\{F_\lambda(\eta_2,x): x\in M\}. \tag{5}$$

Предположим, что $x_2^*\notin C(\eta_2)$, т.е. $h(x_2^*)>\eta_2$. Обозначим $\widetilde{x}$ точку на отрезке $[x^*(\eta_1), x_2^*]$, ближайшую к x_2^* и такую, что $\widetilde{x}\in C(\eta_2)$. Очевидно, что $h(\widetilde{x})=\eta_2$. Из точности штрафной функции $F_\lambda(\eta_1,x)$ следует $F_\lambda(\eta_1,x^*(\eta_1))<F_\lambda(\eta_1,\widetilde{x})$. Откуда из условия выпуклости функции $F_\lambda(\eta_1,x)$ имеем $F_\lambda(\eta_1,\widetilde{x})<F_\lambda(\eta_1,x_2^*)$. Далее, поскольку $h(\widetilde{x})=\eta_2$, имеем

$$F_\lambda(\eta_1,\widetilde{x})-F_\lambda(\eta_1,x_2^*)=f_0(\widetilde{x})+\lambda(h(\widetilde{x})-\eta_1)-(f_0(x_2^*)+\lambda(h(x_2^*)-\eta_1)=$$

$$=F_\lambda(\eta_2,\widetilde{x})-F_\lambda(\eta_2,x_2^*)<0,$$

что противоречит предположению об оптимальности точки x_2^* для задачи (5). ■

Таким образом, показано, что если функция $F_\lambda(\eta,x)$ является точной для задачи (4) при текущем значении параметра η, то она остается точной при увеличении параметра η (при расширении множества $C(\eta)$).

Пусть множество индексов ограничений $I=\{1,\dots,m\}$ задачи (1) разбито на совокупность подмножеств $I=\bigcap_{q=1}^{Q} I_q$, $I_q\cap I_p=\varnothing$, $q\ne p$. Положим $h_q(x)=$ $=\max\{f_i(x),\ i\in I_q\}$, $q=1,\dots,Q$. Рассмотрим штрафную функцию $\overline{\Phi}_\beta(x)=f_0(x)+$ $+\sum_{q=1}^{Q}\beta_q h_q^+(x)$ и задачу

$$\overline{\Phi}_\beta^*=\inf\{\overline{\Phi}_\beta(x): x\in M\}. \tag{6}$$

Лемма 2. Пусть задача (1) имеет решение, u_i^*, $i=1,\dots,m$, — оптимальные значения множителей Лагранжа, $\beta_q>\sum_{i\in I_q}u_i^*$, $q=1,\dots,Q$, тогда задачи (1) и (6) эквивалентны, т.е. $\overline{\Phi}_\beta(x)$ — точная штрафная функция.

Доказательство. Следуя [7], для множества X_1 допустимых точек задачи (1) имеем $h_q^+(x) = 0$, $q = 1, \ldots, Q$. Откуда $\inf \{\overline{\Phi}_\beta(x) : x \in X_1\} = \inf \{f_0(x) : x \in X_1\} = f_0^*$.

Для $x \in M \setminus X_1$ получаем

$$\overline{\Phi}_\beta(x) = f_0(x) + \sum_{q=1}^{Q} \beta_q h_q^+(x) > f_0(x) + \sum_{q=1}^{Q} \left(\sum_{i \in I_q} u_i^* \right) h_q^+(x) \geq f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* f_i(x) \geq f_0^*,$$

т.е. недопустимые точки не являются точками минимума функции $\overline{\Phi}_\beta(x)$. ■

Рассмотрим вопросы оценивания коэффициентов функции $\Phi_\beta(x)$. Следующая лемма очевидна. Однако приведенные в ней условия позволяют формулировать различные вспомогательные оптимизационные задачи, приближенные решения которых являются оценками значений коэффициентов точных штрафных функций. Под приближенным решением понимается точка допустимого множества вспомогательной задачи, получаемая в результате применения некоторых упрощенных процедур поиска. В качестве таких процедур можно рассматривать конечное (небольшое) число итераций обычных методов оптимизации (для некоторых задач оптимизации на начальных итерациях происходит существенное улучшение значения целевой функции), а также разрабатывать специальные эвристические процедуры поиска приближенных решений, при этом необходимо учитывать особенности исходной задачи.

Существующие методы негладкой оптимизации, например r-алгоритм Шора [7, 8], мало чувствительны к завышенным значениям коэффициентов штрафных функций, поэтому не требуется высокой точности приближенных решений вспомогательных задач.

В дальнейшем будем считать значение штрафного коэффициента приемлемым, если оно превышает значение, определяемое в соответствии с леммой 2 (или ее аналогами), не более чем в 100 раз.

Лемма 3. Пусть M — компактное множество, $\tilde{x}$ — решение задачи (2), значения штрафных коэффициентов фиксированы. Заданы числа $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и последовательность точек $x_k \in M$, $k = 1, 2, \ldots$, сходящаяся к $\tilde{x}$. Пусть каждой x_k по некоторому правилу R_i поставлены в соответствие точки $z_{ki} = R_i(x_k) \in M$, $i = 1, \ldots, m$, такие, что

1) $f_i(z_{ki}) \leq (f_i(x_k) - \delta)^+$,

2) выполняются неравенства

$$\Phi_\beta(x_k) \geq \Phi_\beta(z_{ki}) + \varepsilon \| z_{ki} - x_k \|, \text{ если } f_i(x_k) > 0. \tag{7}$$

Тогда $\tilde{x} \in C$.

Доказательство. Предположим противное, $\tilde{x} \notin C$. Без ограничения общности можно считать, что для некоторого $p \in \{1, \ldots, m\}$ последовательность z_{kp}, $k = 1, 2, \ldots$, сходится к предельной точке $\tilde{z}^p$ и выполняются условия $f_p(\tilde{x}) > 0$, $f_p(\tilde{z}^p) \leq (f_p(\tilde{x}) - \delta)^+$, т.е. $\tilde{z}^p \neq \tilde{x}$. Откуда, поскольку из (7) следует $\Phi_\beta(\tilde{x}) > \Phi_\beta(z^p)$, получаем, что $\tilde{x}$ не является решением задачи (2), т.е. предположение $\tilde{x} \notin C$ не выполняется. ■

Лемма 3 позволяет формулировать правила уточнения штрафных коэффициентов при решении задачи (2) каким-либо сходящимся алгоритмом. Пусть правила R_i, $i = 1, \ldots, m$, фиксированы, а на некоторой итерации k для индекса $p \in \{1, \ldots, m\}$ неравенство (7) нарушено. Тогда значение коэффициента β_p необходимо увеличить, чтобы это неравенство выполнялось. Имеем

$$f_0(x_k)+\sum_{i\neq p}\beta_i f_i^+(x_k)+\beta_p f_p^+(x_k)\geq$$

$$\geq f_0(z_{kp})+\sum_{i\neq p}\beta_i f_i^+(z_{kp})+\beta_p f_p^+(z_{kp})+\varepsilon\,||\,z_{kp}-x_k\,||$$

или

$$\beta_p(f_p^+(x_k)-f_p^+(z_{kp}))\geq$$

$$\geq f_0(z_{kp})+\sum_{i\neq p}\beta_i f_i^+(z_{kp})-f_0(x_k)-\sum_{i\neq p}\beta_i f_i^+(x_k)+\varepsilon\,||\,z_{kp}-x_k||. \qquad (8)$$

Откуда, обозначив $\chi_p(x)=f_0(x)+\sum_{i\neq p}\beta_i f_i^+(x)$,

$$\zeta_p(z,x_k)=\frac{\chi_p(z)+\varepsilon\,||\,z-x_k||^2-\chi_p(x_k)}{f_p^+(x_k)-f_p^+(z)},$$

получим условие, которому должен удовлетворять коэффициент β_p:

$$\beta_p\geq\zeta_p(z_{kp},x_k). \qquad (9)$$

При нарушении этого условия коэффициент β_p уточняется, т.е. можно полагать $\beta_p=\zeta_p(z_{kp},x_k)$. Для сокращения числа уточнений значений штрафных коэффициентов используется усиленное правило

$$\beta_p=\zeta_p(z_{kp},x_k)+B, \qquad (10)$$

где $B>0$ — заданный параметр.

Завышенные значения штрафных коэффициентов приводят к плохой обусловленности решаемой задачи. Для минимизации значений β_p, $p=1,\ldots,m$, нужно использовать в качестве правила R_p для каждой точки x_k решение вспомогательных задач (построение оптимального правила R_p)

$$\zeta_p^*=\min_z\{\zeta_p(z,x_k): f_p(z)\leq(f_p(x_k)-\delta)^+,\ z\in M\}. \qquad (11)$$

Задача (11) не проще исходной задачи (1), однако, поскольку она предназначена для оценки штрафных коэффициентов, можно использовать ее приближенные решения.

Рассмотрим упрощение задачи (11): найти

$$\chi_p^*=\min_z\{\chi_p(z)+\varepsilon\,||\,z-x_k||^2: f_p(z)\leq(f_p(x_k)-\delta)^+,\ z\in M\}. \qquad (12)$$

Будем говорить, что выполняется условие A, если ограничение $f_p(z)\leq(f_p(x_k)-\delta)^+$ задачи (11) активно в точке, являющейся решением этой задачи.

При выполнении условия A решения задач (11) и (12) совпадают. В самом деле

$$\zeta_p(z,x_k)=\frac{\chi_p(z)+\varepsilon\,||\,z-x_k\,||^2-\chi_p(x_k)}{f_p^+(x_k)-f_p^+(z)}\leq\frac{\chi_p(z)+\varepsilon\,||\,z-x_k\,||^2-\chi_p(x_k)}{f_p^+(x_k)-(f_p(x_k)-\delta)^+}.$$

Откуда следует $\zeta_p^* \le \dfrac{\chi_p^* - \chi_p(x_k)}{f_p^+(x_k) - (f_p(x_k) - \delta)^+}$. При выполнении условия A последнее неравенство превращается в равенство и решение задачи (11) является решением задачи (12). При невыполнении условия A решение задачи (12) является приближенным решением задачи (11).

Заметим, что для некоторых $i \ne p$, $i = 1, \ldots, m$, может иметь место $f_i^+(z_{kp}) > f_i^+(x_k)$. В этом случае использование правила (10) приводит к существенному завышению значений коэффициентов. Поэтому далее также рассматриваются оценочные задачи с несколько суженной областью допустимых точек

$$\min_z \{\chi_p(z) + \varepsilon \| z - x_k \|^2 : z \in \overline{C}_p(x_k)\}, \tag{13}$$

$$\min_z \{f_0(z) + \varepsilon \| z - x_k \|^2 : z \in \overline{C}_p(x_k)\}, \tag{14}$$

где $\overline{C}_p(x_k) = \{z : f_p(z) \le (f_p(x_k) - \delta)^+,\ f_i(z) \le f_i^+(x_k),\ i \ne p,\ i = 1, \ldots, m,\ z \in M\}$.

Как и ранее, если ограничения задачи (13) активны в оптимальной точке, то решения задач (13) и (14) совпадают.

Любое допустимое решение задачи (13) или (14) позволяет получить оценку значения штрафного коэффициента. Заметим, что поиск допустимого решения этих задач может быть проблематичным. Сужение допустимой области задач (13) или (14) приводит к увеличению соответствующих оптимальных значений (и к увеличению оценок штрафных коэффициентов) и может использоваться для упрощения получаемых задач. Вводя в задачу доверительную область $\| z - x_k \| \le \rho$ (trust region), при вычислении оценок штрафных коэффициентов используем свойства функций задачи в окрестности текущей точки

$$\min_z \{f_0(z) + \varepsilon \| z - x_k \|^2 : \| z - x_k \| \le \rho,\ z \in \overline{C}_p(x_k)\}. \tag{15}$$

Выбирая минимальное значение ρ, при котором задача (15) имеет допустимые решения, получаем задачу проектирования текущей точки x_k на допустимую область задачи (14)

$$z_k^p = \arg\min_z \{\| z - x_k \|^2 : z \in \overline{C}_p(x_k)\}. \tag{16}$$

Вместо функций f_i, $i = 1, \ldots, m$, в задаче (16) можно использовать их кусочно-линейные аппроксимации в точке x_k. При такой замене получим задачу проектирования на выпуклый многогранник, который назовем начальной (кусочно-линейной) аппроксимацией множества $\overline{C}_p(x_k)$. Для приближенного решения такой задачи разрабатываются эффективные специализированные методы. Заметим, что полученное решение может не удовлетворять ограничениям задачи (15). В этом случае следует уточнять начальную аппроксимацию множества $\overline{C}_p(x_k)$, пока ограничения не станут выполняться, либо применять другие подходы.

Обозначим $\hat{z}_{kp}$ проекцию точки x_k на начальную аппроксимацию множества $\overline{C}_p(x_k)$. Для уточнения решения $\hat{z}_{kp}$ можно использовать простую процедуру, если известна допустимая точка y_0 исходной задачи, такая что $f_i(y_0) < 0$, $i = 1, \ldots, m$, $y_0 \in M$. Для такого уточнения достаточно выполнить поиск на отрезке $[y_0, \hat{z}_{kp}]$ точки $\tilde{z}$, ближайшей к $\hat{z}_{kp}$ и такой, что $\tilde{z} \in \overline{C}_p(x_k)$.

Методы проектирования на полиэдр описаны в [23, 24].

2. ШТРАФНЫЕ ФУНКЦИИ В СХЕМАХ ДЕКОМПОЗИЦИИ БЕНДЕРСА

Схемы декомпозиции по переменным рассмотрены в [7, 14–20]. Особенностью методов декомпозиции по переменным является неявное описание допустимой области координирующей задачи. Если связывающие переменные находятся вне допустимой области, то некоторые подзадачи могут не иметь решения. Для преодоления этих проблем естественно использование точных штрафных функций, однако, как отмечается в [18, 19], для оценки штрафных коэффициентов в общем случае эффективные алгоритмы неизвестны. Далее исследуется возможность применения описанных подходов в схемах декомпозиции по переменным.

Рассмотрим задачу (1). Пусть вектор x представлен в виде $x=(x^0, x^1, \dots, x^Q)$, где

- $x^q \in M^q \subseteq R^{n^q}$, $q=0,1,\dots,Q$;
- множество индексов ограничений $I=\{1,\dots,m\}$ задачи (1) разбито на совокупность подмножеств, $I=\bigcup_{q=1}^{Q} I_q$, $I_q \cap I_p = \varnothing$, $q \neq p$;
- функции $f_i(x)$, $i=0,1,\dots,m$, и множество M имеют вид

$$f_0(x)=\sum_{q=1}^{Q} f_0^q(x^0, x^q),$$

$$f_i(x)=f_i^q(x^0, x^q),\ i \in I_q,\ q=1,\dots,Q,$$

$$M=M^0 \times M^1 \times \dots \times M^Q.$$

Здесь $f_0^q(x^0,x^q)$, $f_i^q(x^0,x^q)$, $i \in I_q$, — выпуклые функции, принимающие конечные значения при любых значениях переменных, M^q — выпуклые множества простой структуры, $q=0,\dots,Q$. Тогда (1) является блочной задачей со связывающими переменными

$$f_0^* = \min\left\{\sum_{q=1}^{Q} f_0^q(x^0,x^q) : (x^0,x^q) \in C^q, x^q \in M^q, q=1,\dots,Q, x^0 \in M^0\right\}, \quad (17)$$

где $C^q = \{(x^0,x^q) : f_i^q(x^0,x^q) \le 0, i \in I_q, x^0 \in R^{n^0}, x^q \in R^{n^q}\}$.

Будем полагать, что задача (17) имеет решение.

Пусть связывающие переменные x^0 фиксированы. Обозначим

$$\Psi^q(x^0) = \min\{f_q^0(x^0,x^q) : x^q \in C^q(x^0), x^q \in M^q\}, \quad (18)$$

где $C^q(x^0)=\{x^q : f_i^q(x^0,x^q) \le 0, i \in I_q\}$.

Положим $W^q = \{x^0 : C^q(x^0) \cap M^q \neq \varnothing\}$, $\Psi^q(x^0)=+\infty$, если $x^0 \notin W^q$.

В схемах декомпозиции по переменным решается следующая (координирующая) задача, которая эквивалентна исходной (17): найти

$$\min\left\{\sum_{q=1}^{Q} \Psi^q(x^0) : x^0 \in \bigcap_{q=1}^{Q} W^q, x^0 \in M^0\right\}. \quad (19)$$

Функции $\Psi^q(x^0)$ выпуклые собственные, множества W^q заданы неявно. Для вычисления субградиентов функций $\Psi^q(x^0)$ используются точные решения подзадач (18) или приближенные решения для построения ε-субградиентов [7, 25, 26]. Для решения задачи (19) можно применять методы негладкой оптимизации. При использовании точных штрафных функций получаем $W^q = R^{n^0}$, $q=1,\ldots,Q$, и проблема неявного описания множеств W^q решается.

Положим $h_q(x^0, x^q) = \max\{f_i^q(x^0, x^q), i \in I_q\}$, $q=1,\ldots,Q$, $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_Q)$. Задачу (17) рассмотрим в форме

$$f_0^* = \min\left\{\sum_{q=1}^{Q} f_0^q(x^0, x^q) : h_q(x^0, x^q) \le 0,\ x^q \in M^q, q=1,\ldots,Q, x^0 \in M^0\right\}$$

и используем штрафную функцию $\overline{\Phi}_\beta(x) = \sum_{q=1}^{Q}[f_0^q(x^0, x^q) + \beta_q h_q^+(x^0, x^q)]$.

Приведем возможные схемы оценки штрафных коэффициентов функции $\overline{\Phi}_\beta(x)$. Будем считать заданной точку $y_0 = (y_0^0, y_0^1, \ldots, y_0^Q)$, $y_0^q \in M^q$, $q = 0,1,\ldots,Q$, такую, что $h_q(y_0^0, y_0^q) < 0$, $q=1,\ldots,Q$.

Пусть задана текущая точка x_k. Для определения точки z_{kp}, $p \in \{1,\ldots,Q\}$, удовлетворяющей условиям 1 леммы 3, используем задачу (14). Поскольку эта задача не проще исходной, рассмотрим ее на суженном множестве допустимых решений, которое опишем с помощью переменных $z^p \in M^p$ (локальных переменных блока p) и переменной $t \in R$, $0 \le t \le 1$. Положим $z(t, z^p) = (z^q(t, z^p), q = 0,1,\ldots,Q)$, где $z^q(t, z^p) = z^q(t) = x_k^q + t(y_0^q - x_k^q), q \ne p, 0 \le t \le 1$ и $z^p(t, z^p) = z^p$ — локальные переменные блока p.

Для функций h_q, $q \ne p$, как нетрудно проверить, выполняется $h_q(z^0(t), z^q(t)) \le h_q(x_k^0, x_k^q)$ при $0 \le t \le 1$. Откуда следует, что задачу (14) на суженном множестве допустимых решений можно привести к виду

$$\min_{t,\, z^p}\{f_0(z(t, z^p)) + \varepsilon \| z(t, z^p) - x_k \|^2 : h_p(z^0(t), z^p) \le$$

$$\le (h_p(x_k^0, x_k^p) - \delta)^+,\ z^p \in M^p, 0 \le t \le 1\}, \tag{20}$$

где $f_0(z(t, z^p)) = \sum_{q=1,\, q\ne p}^{Q} f_0^q(z^0(t), z^q(t)) + f_0^p(z^0(t), z^p)$.

Задача (20) всегда имеет решение и число ее переменных на единицу превышает число локальных переменных блока p.

Для того чтобы выяснить, как зависят получаемые оценки штрафных коэффициентов от выбора точки y_0 и в каких случаях такие оценки принимают приемлемые или чрезмерно завышенные значения, необходим дополнительный анализ.

3. УПРОЩЕННЫЕ ОЦЕНКИ

3.1. Процедура упрощенного направленного поиска. Рассмотрим исходную задачу (1) и штрафную функцию $F_\lambda(x)$. Предположим, что $M = R^n$ и для множества C выполняется условие Слейтера.

Для функции $F_\lambda(x)$ и фиксированной точки $x_k \in R^n$ задачу (14) запишем как

$$\min_z \{f_0(z)+\varepsilon\,||\,z-x_k||^2 : h(z) \le (h(x_k)-\delta)^+\}, \tag{21}$$

неравенство (9), которому в данном случае должен удовлетворять коэффициент λ, принимает вид

$$\lambda \ge \zeta(z_k, x_k) = \frac{f_0(z_k)-f_0(x_k)+\varepsilon\,||\,z_k-x_k||^2}{h^+(x_k)-h^+(z_k)}, \tag{22}$$

где в качестве точки z_k используем приближенное решение задачи (21).

Будем считать заданной базовую точку $y_0 \in C$, такую что $h(y_0)<0$. Для $y \in R^n$ положим

$$z(y)=\arg\min_t \{f_0(z)+\varepsilon\,||\,z-x_k||^2 : z=y+t\,(y_0-y), h(z)\le (h(x_k)-\delta)^+, t\in R\}, \tag{23}$$

$$\varphi(y)=f_0(z(y))+\varepsilon\,||\,z(y)-x_k||^2.$$

Задача одномерного поиска (23) имеет решение при любом y.

Для определения точки z_k вместо задачи (21) можно использовать приближенное решение следующей задачи:

$$\widetilde{y} \approx \arg\min_y \{\varphi(y) : y \in R^n\}. \tag{24}$$

При этом $z_k = z(\widetilde{y})$.

Простейшим правилом выбора точки $\widetilde{y}$ при приближенном решении задачи (24) является $\widetilde{y}=x_k$. При определении точки z_k используем приближенное решение $\widetilde{z}(x_k)$ задачи (23), для которого выполняется

$$h(\widetilde{z}(x_k))=(h(x_k)-\delta)^+, \tag{25}$$

т.е. $z_k=\widetilde{z}(x_k)$. Такое правило будем называть процедурой упрощенного направленного поиска относительно функции $h(x)$ и точки x_k. Можно ожидать, что такое простое правило приведет к существенно завышенным оценкам штрафного коэффициента и что в определенных ситуациях эти оценки будут неограниченно возрастать. Свойства этого правила характеризуются следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть множество C ограничено, функция f_0 удовлетворяет условию Липшица на C. Заданы:

- точка $y_0 \in C$, $h(y_0)<0$,
- последовательность точек x_k, $k=1,2,\ldots$, сходящаяся к решению $\widetilde{x}$ задачи (3).

Для каждого $k=1,2,\ldots$ положим $z_k=\widetilde{z}(x_k)$. Тогда существует $\widetilde{\zeta}<\infty$ такое, что $\zeta(z_k,x_k)<\widetilde{\zeta}$ ($\zeta(z_k,x_k)$ определено в условии (22)) для любого k, для которого $h(x_k)>0$, т.е. при выборе $\lambda>\widetilde{\zeta}$ штрафная функция $F_\lambda(x)$ является точной.

Доказательство. Обозначим L константу Липшица функции f_0, $r=\max\{||\,y_0-z\,||: z\in C\}$, $\widetilde{y}$ — точку отрезка $[y_0, x_k]$ такую, что $h(\widetilde{y})=0$.

Можно показать, что в силу выпуклости функции h имеют место неравенства

$$h(x_k)-h(z_k) \ge \frac{h(\widetilde{y})-h(y_0)}{||\,y_0-\widetilde{y}\,||}\cdot||\,z_k-x_k|| \ge \frac{-h(y_0)}{r}\cdot||\,z_k-x_k||. \tag{26}$$

Поскольку $h(x_k)>0$, $h(z_k)\ge 0$ (в соответствии с (25)), в силу липшицевости функции f_0 и неравенств (26) получаем

$$\zeta(z_k,x_k)=\frac{f_0(z_k)-f_0(x_k)+\varepsilon\|z_k-x_k\|^2}{h(x_k)-h(z_k)}\le$$

$$\le\frac{L\|z_k-x_k\|+\varepsilon\|z_k-x_k\|^2}{h(x_k)-h(z_k)}\le\frac{r}{-h(y_0)}(L+\varepsilon\|z_k-x_k\|).$$

Из условия (25) следует $h(x_k)-h(z_k)\le\delta$. Учитывая (26), получаем $\|z_k-x_k\|\le r\dfrac{h(x_k)-h(z_k)}{-h(y_0)}\le\dfrac{r\delta}{-h(y_0)}$. Откуда окончательно имеем $\zeta(z_k,x_k)\le$ $\le\dfrac{r}{-h(y_0)}\left(L+\varepsilon\dfrac{r\delta}{-h(y_0)}\right)$. Полагая $\tilde{\zeta}=\dfrac{r}{-h(y_0)}\left(L+\varepsilon\dfrac{r\delta}{-h(y_0)}\right)$, получаем утверждение теоремы. ■

При применении процедуры упрощенного направленного поиска существенен выбор точки y_0. Целесообразно выбрать $y_0=\arg\min\limits_x h(x)$. При этом важным является масштабирование функций $f_i(x)$, $i=1,\ldots,m$. В качестве точки y_0 может использоваться также центр вписанного во множество C шара максимального радиуса.

Вычислительные эксперименты проводились на задачах линейного программирования (ЛП): $\min\{\langle c,x\rangle : x\in C\}$, где $C=\{x: Ax\le b,\ -100\le x^i\le 100,\ i=1,\ldots,n,$ $x\in R^n\}$, $b\in R^m$, $A\in R^{m\times n}$, x^i — i-я компонента вектора x.

Множество $\{x: Ax\le b, x\in R^n\}$ определялось набором m случайных опорных плоскостей к n-мерной сфере с центром в случайной точке x_0 с нормально распределенными координатами и радиусом $r=1$. Генерирование таких многогранников проводилось с помощью Octave-программы из [23]. Целевая функция задавалась вектором со случайными коэффициентами. Для решения задачи ЛП использовалась Octave-программа GLPK, что позволяло определять значения двойственных переменных. Для сгенерированной задачи ЛП формировалась штрафная функция $F_\lambda(x)$, для решения задачи безусловной оптимизации (3) применялся r-алгоритм Шора [8], программная реализация на языке Octave из [27].

Условие, которому должен удовлетворять коэффициент λ, проверялось при каждом вычислении значения штрафной функции. В случае нарушения этого условия коэффициент λ увеличивался. Предполагалось, что значения коэффициента λ, генерируемые предложенными процедурами уточнения штрафного коэффициента, существенно зависят от базовой точки $y_0\in C$. Поэтому в качестве y_0 выбиралась точка $y_0(\tau)=x_0+\tau p$, где $p\in R^n$ — случайный вектор такой, что $Ay_0(\tau)<b$, если $\tau<1$, при $\tau=1$ вектор $y_0(\tau)$ принадлежит границе множества C.

Результаты вычислительных экспериментов проведенных при различных значениях параметра τ, приведены в табл. 1, в которой использованы следующие обозначения: n — число переменных задачи ЛП; m — число ограничений-неравенств; λ^* — сумма значений (по абсолютной величине) двойственных переменных, полученных при решении задачи ЛП; $\tilde{\lambda}$ — значение коэффициента λ, полученное в результате применения процедуры уточнения значения штрафного коэффициента; τ — величина сдвига из точки x_0 в направлении случайного вектора p при построении базовой точки $y_0=x_0+\tau p$.

Таблица 1

$m \times n$	Результаты вычислительного эксперимента при использовании процедуры упрощенного направленного поиска				
	λ^*	$\tilde{\lambda}$			
		$\tau = 0$	$\tau = 0.3$	$\tau = 0.6$	$\tau = 0.9$
20×10	1.6775	3.1351	3.1351	6.4115	20.536
100×10	1.1215	3.0306	3.0306	4.0564	13.591
100×20	2.0470	4.6529	4.6529	4.6529	4.6529
100×50	6.8511	14.806	20.784	36.269	125.36
100×100	3.6452	52.656	74.861	123.02	373.84
200×100	6.7081	24.671	34.747	58.162	145.81

Таблица 2

$m \times n$	Результаты решения задач с дополнительными параллельными ограничениями-неравенствами при использовании процедуры упрощенного направленного поиска							
	$\delta = 0.3$		$\delta = 0.2$		$\delta = 0.1$		$\delta = 0.05$	
	λ^*	$\tilde{\lambda}$	λ^*	$\tilde{\lambda}$	λ^*	$\tilde{\lambda}$	λ^*	$\tilde{\lambda}$
20×10	1.7300	51.369	1.8815	93.373	1.8815	180.24	1.8815	2734.8
100×10	2.3431	39.488	2.3588	69.861	2.3588	110.02	2.3936	2710.0
100×20	2.9644	92.095	2.9644	131.54	2.9644	257.76	2.9644	5006.8
100×50	7.2650	524.92	7.2650	746.76	7.2650	1861.6	7.2650	3.6882e+004
100×100	6.2961	5605.6	6.3349	7985.1	6.3349	1.5539e+004	6.3349	2.7235e+005
200×100	8.2491	2843.8	8.2491	4121.8	8.2491	6938.0	8.2491	1.5099e+005

Также рассматривались задачи, в которые добавлялись два (параллельных) ограничения-неравенства: $\langle p, x_0 \rangle - \delta \le \langle p, x \rangle \le \langle p, x_0 \rangle + \delta$, где p — случайный (нормированный) вектор, а δ задает различные значения ширины полосы, определяемой этими неравенствами. Такие задачи являются приближениями для задач с ограничениями-равенствами. Результаты решения таких задач приведены в табл. 2, в которой использованы обозначения, аналогичные табл. 1. При оценке штрафных коэффициентов в качестве базовой точки y_0 выбиралась $y_0 = x_0$.

Результаты, приведенные в табл. 1, показывают, что предложенная процедура упрощенного направленного поиска генерирует не слишком большие значения коэффициентов точных штрафных функций при решении задач рассмотренного класса. Для выбора базовой точки y_0 наиболее предпочтительны точки, расположенные вблизи точки x_0, которую можно условно трактовать как центр сферы максимального радиуса, вписанной в допустимое множество C исходной задачи. При удалении базовой точки y_0 от центра x_0 (и приближении к границе множества C) значения коэффициентов увеличиваются, но остаются в приемлемых пределах. При наличии дополнительных ограничений-неравенств (см. табл. 2), приближающих ограничения-равенства, значения штрафных коэффициентов становятся неприемлемо большими.

3.2. Процедура проектирования и направленного поиска. Рассмотрим случай, когда допустимое множество исходной задачи (1) имеет вид $C = \{x : Ax = b, f_i(x) \le 0, i = 1, \ldots, m, x \in R^n\}$, где A — невырожденная $(m_e \times n)$-матрица, $b \in R^{m_e}$, m_e — число ограничений-равенств, $m_e < n$. Положим $h_1(x) =$

$= \max\{|A_i x - b_i|, i = 1, \ldots, m_e\}$, $h_2(x) = \max\{f_i(x), i = 1, \ldots, m\}$, $h(x) = \max\{h_1(x), h_2(x)\}$. Используем штрафные функции вида $F_\lambda(x) = f_0(x) + \lambda \cdot h^+(x)$.

Обозначим $X_e = \{x : Ax = b, x \in R^n\}$ и рассмотрим задачу проектирования произвольной точки x_k на множество X_e

$$y_e(x_k) = \Pi_{X_e}(x_k) = \arg\min \left\{ \frac{1}{2} || x - x_k ||^2 : Ax = b, x \in R^n \right\}. \quad (27)$$

Решение задачи (27) можно представить в виде

$$y_e(x_k) = A^{\mathrm{T}} (AA^{\mathrm{T}})^{-1} (b - Ax_k) + x_k = \bar{b} + \bar{A} x_k,$$

где $\bar{b} = A^{\mathrm{T}} (AA^{\mathrm{T}})^{-1} b$, $\bar{A} = I - A^{\mathrm{T}} (AA^{\mathrm{T}})^{-1} A$. Будем полагать, что задана начальная точка $y_0 \in X_e$, для которой выполняется $h_2(y_0) < 0$.

Для уточнения коэффициента λ функции $F_\lambda(x)$ предлагается следующая процедура проектирования и направленного поиска.

Шаг 1. Если $h_1(x_k) \le (h(x_k) - \delta)^+$, выполнить процедуру упрощенного направленного поиска относительно функции $h_2(x)$ и точки x_k, перейти к шагу 5.

Шаг 2. Определить точку $y_e(x_k) = \Pi_{X_e}(x_k)$ (решить задачу (27)).

Шаг 3. Определить точку y_1 отрезка $[y_e(x_k), x_k]$, ближайшую к x_k, для которой выполняется $h_1(y_1) = (h(x_k) - \delta)^+$.

Шаг 4. Выполнить процедуру упрощенного направленного поиска относительно функции $h_2(x)$ и точки y_1.

Шаг 5. Вычислить $\zeta(z_k, x_k)$ в соответствии с (22) и, если условие $\lambda \ge \zeta(z_k, x_k)$ не выполняется, увеличить значение λ.

Действия, выполняемые на шагах 2–4, можно рассматривать как приближенное решение аналога задачи (21) при дополнительном ограничении

$$z_k \approx \arg\min_z \{f_0(z) + \varepsilon || z - x_k ||^2 : h(z) \le (h(x_k) - \delta)^+, z \in \mathit{aff}\{x_k, y_0, y_e(x_k)\}\}, \quad (28)$$

где $\mathit{aff}\{a_1, a_2, a_2\}$ — аффинная оболочка точек a_1, $a_2, a_2 \in R^n$.

Трудоемкость шага 2 невысокая, поскольку вектор $\bar{b}$ и матрица $\bar{A}$ вычисляются один раз. Задача (28) является задачей двумерного поиска.

Теорема 2. Пусть множество C ограничено, функции f_0 и h_2 удовлетворяют условию Липшица на C. Заданы:

- точка $y_0 \in X_e = \{x : Ax = b\}$, для которой выполняется $h_2(y_0) < 0$;
- последовательность точек, сходящаяся к решению $\tilde{x}$ задачи (3).

Пусть для каждого $k = 1, 2, \ldots$ величина $\zeta(z_k, x_k)$ определяется в соответствии с процедурой проектирования и направленного поиска. Тогда существует $\tilde{\zeta} < \infty$ такое, что при выборе $\lambda > \tilde{\zeta}$ штрафная функция $F_\lambda(x)$ является точной.

Доказательство. При условии $h_1(x_k) > (h(x_k) - \delta)^+$ формируется точка $y_e(x_k) = \Pi_{X_e}(x_k)$ (проекция x_k на множество X_e) и точка y_1 отрезка $[y_e(x_k), x_k]$, ближайшая к x_k, для которой выполняется $h_1(y_1) = (h(x_k) - \delta)^+$. Можно показать, что существует константа l_1, определяемая матрицей A, такая что $|| x_k - y_1 || \le l_1 (h_1(x_k) - h_1(y_1)) \le l_1 (h(x_k) - (h(x_k) - \delta)^+)$. Обозначим $\tilde{\delta} = h(x_k) - (h(x_k) - \delta)^+ = \min\{h(x_k), \delta\}$. Тогда

$$|| x_k - y_1 || \le l_1 \tilde{\delta}. \quad (29)$$

Обозначим L_2 константу Липшица функции h_2. Тогда $h_2(y_1)-h_2(x_k)\le$ $\le L_2\,||\,x_k-y_1\,||\le L_2 l_1\tilde{\delta}$, т.е.

$$h_2(y_1)\le h_2(x_k)+L_2 l_1\tilde{\delta}\le h(x_k)+L_2 l_1\tilde{\delta}. \tag{30}$$

Повторив доказательство теоремы 1, можно показать, что существует константа l_2 такая, что $||\,z_k-y_1\,||\le l_2(h_2(y_1)-h_2(z_k))$. Учитывая (30) и то, что $h_2(z_k)=h(z_k)=(h(x_k)-\delta)^+$, получаем $||\,z_k-y_1||\le l_2(h(x_k)+L_2 l_1\tilde{\delta}-(h(x_k)-\delta)^+)=$ $=l_2(\tilde{\delta}+L_2 l_1\tilde{\delta})=l_2\tilde{\delta}(1+L_2 l_1)$. Учитывая (29), имеем

$$||\,z_k-x_k||\le||\,z_k-y_1||+||\,x_k-y_1||\le l_2\tilde{\delta}(1+L_2 l_1)+l_1\tilde{\delta}=\tilde{\delta}(l_2+l_1+L_2 l_1 l_2)=\tilde{\delta}\Phi,$$

где $\Phi=l_2+l_1+L_2 l_1 l_2$. В силу липшицевости функции f_0 получаем

$$\zeta(z_k,x_k)=\frac{f_0(z_k)-f_0(x_k)+\varepsilon\,||\,z_k-x_k||^2}{h(x_k)-h(z_k)}\le\frac{L\,||\,z_k-x_k||+\varepsilon\,||\,z_k-x_k||^{\,2}}{\tilde{\delta}}\le$$

$$\le\frac{L\tilde{\delta}\Phi+\varepsilon(\tilde{\delta}\Phi)^2}{\tilde{\delta}}=L\Phi+\varepsilon\tilde{\delta}\Phi^2,$$

где L — константа Липшица функции f_0. Откуда следует доказательство теоремы. ■

В качестве точки y_0 может использоваться решение задачи $y_0=$ $=\arg\min\,\{h_2(x)\colon Ax=b\}$. Вычислительные эксперименты проводились на задачах ЛП:

$$\min\,\{\langle c,x\rangle : x\in C\},$$

где $C=\{x\colon Ax\le b,\ A_e x=b_e,\ -100\le x^i\le 100,\ i=1,\dots,n,\ x\in R^n\}$, $b\in R^m$, $b_e\in R^{m_e}$, $A\in R^{m\times n}$, $A_e\in R^{m_e\times n}$, $m_e<n$, x^i — *i*-я компонента вектора x.

Множество $\{x : Ax\le b,\ x\in R^n\}$ и целевая функция определялись так же, как и в подразд. 3.2. Ограничения $A_e x=b_e$ определяются случайными плоскостями, проходящими через точку x_0. Для решения задачи безусловной оптимизации (2) применялись те же программные средства.

Результаты вычислительных экспериментов при использовании процедуры проектирования и направленного поиска приведены в табл. 3, в которой, кроме обозначения m_e — число ограничений-равенств, использованы обозначения табл. 1 и 2.

Таблица 3

$m\times n$	Результаты вычислительного эксперимента при использовании процедуры проектирования и направленного поиска					
	m_e	λ^*	$\tilde{\lambda}$			
			$\tau=0$	$\tau=0.3$	$\tau=0.6$	$\tau=0.9$
20×10	3	2.1796	4.5815	6.6127	6.6127	6.6127
100×10	3	1.8820	4.6494	4.6494	4.6494	4.6494
100×20	7	2.6429	4.6072	4.6072	4.6072	4.6072
100×50	17	7.9559	13.476	13.476	16.403	16.403
100×100	33	4.8329	27.909	31.711	45.899	45.899
200×100	33	8.3726	11.528	11.528	14.239	38.517

В качестве базовой выбрана точка $y_0(\tau) = x_0 + \tau p$, где $p \in R^n$ — случайный вектор такой, что $A y_0(\tau) < b$, $A_e y_0(\tau) = b_e$, если $\tau < 1$, при $\tau = 1$ вектор $y_0(\tau)$ принадлежит границе множества C.

Из табл. 3 следует, что для рассматриваемого класса задач с ограничениями-равенствами предложенная процедура проектирования и направленного поиска генерирует приемлемые значения штрафных коэффициентов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приведены достаточные условия для значений штрафных коэффициентов, при выполнении которых штрафные функции являются точными. На основании этих условий сформулированы различные вспомогательные оптимизационные задачи, приближенные решения которых можно использовать для вычисления оценок штрафных коэффициентов.

Для блочных задач со связывающими переменными такие вспомогательные задачи сформулированы для каждого отдельного блока, при этом число переменных каждой вспомогательной задачи (подзадачи) на единицу превышает число локальных переменных соответствующего блока. При определенных условиях вспомогательная подзадача имеет решение для любых значений связывающих переменных. Такой подход определения штрафных коэффициентов может быть полезен при реализации схем декомпозиции по переменным (обобщенных методов декомпозиции Бендерса).

В работе для некоторых классов задач рассмотрены упрощенные процедуры построения приближенных решений сформулированных вспомогательных задач. Сформулированы условия, при которых такие упрощенные процедуры генерируют конечные значения штрафных коэффициентов. Приведены результаты вычислительных экспериментов с применением предложенных процедур для оценки штрафных коэффициентов при решении задач линейного программирования, удовлетворяющих условию Слейтера, а также при наличии линейных ограничений-равенств. Для рассматриваемых классов задач штрафные коэффициенты, полученные с использованием предложенных процедур, не слишком сильно отличались от оценок, определяемых оптимальными значениями двойственных переменных.

Рассмотренные упрощенные процедуры построения приближенных решений вспомогательных задач можно также использовать для блочных задач со связывающими переменными. Для построения приближенных решений вспомогательных задач можно разрабатывать различные упрощенные процедуры, при этом необходимо учитывать особенности решаемых задач. Вопросы эффективности предлагаемого подхода требуют углубленного анализа, что планируется делать в дальнейших работах.

Авторы благодарят Н.Г. Журбенко и В.Н. Кузьменко за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zangwill W. Non-linear programming via penalty function. *Manag. Sci*. 1967. Vol. 13, N 5. P. 344–358.
2. Еремин И.И. Метод «штрафов» в выпуклом программировании. *Докл. АН СССР*. 1967. Т. 173, № 4. С. 748–751.
3. Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. Москва: Высш. шк., 2005. 335 с.
4. Demyanov V.F., Di Pillo G., Facchinei F. Exact penalization via Dini and Hadamars conditional derivatives. *Optim. Methods and Software*. 1998. Vol. 9. P. 19–36.

5. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. Москва: Наука, 1982. 432 с.
6. Евтушенко Ю.Г., Жадан В.Г. Точные вспомогательные функции в задачах оптимизации. *ЖВМ и МФ*. 1990. Т. 30, № 1. С. 43–57.
7. Shor N.Z. Nondifferentiable optimization and polynomial problems. Amsterdam; Dordrecht; London: Kluwer Academic Publishers, 1998. 381 p.
8. Шор Н.З., Журбенко Н.Г. Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов. *Кибернетика*. 1971. № 3. С. 51–59.
9. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации. Москва: Наука. 1983. 136 с.
10. Данилин Ю.М. Линеаризация и штрафные функции. *Кибернетика и системный анализ.* 2002. № 5. С. 65–79.
11. Бертсекас Д. Условная оптимизация и множители Лагранжа. Москва: Радио и связь, 1987. 399 с.
12. Byrd R.H., Nocedal J., Waltz R. Steering exact penalty methods. *Optim. Methods Softw*. 2008. Vol. 23, N 2. P. 197–213.
13. Byrd R.H., Lopez-Calva G., Nocedal J. A line search exact penalty method using steering rules. *Math. Program., Series A and B*. 2012. Vol. 133. P. 39–73.
14. Benders J.F. Partitioning procedures for solving mixed variables programming problems. *Numerische Mathematik.* 1962. N 4. P. 238–252.
15. Geoffrion, A.M. Generalized Benders decomposition. *Journal of Optimization Theory and Applications.* 1972. Vol. 10, Iss. 4. P. 237–260,
16. Flippo O.E., Rinnoy Kan A.H.G. Decomposition in general mathematical programming. *Mathematical Programming*. 1993. Vol 60, Iss. 1–3. P. 361–382.
17. Ruszczyński A. A regularized decomposition method for minimizing a sum of polyhedral functions. *Mathematical Programming.* 1986. Vol. 35, Iss. 3. P. 309–333.
18. Grothey A., Leyffer S., Mckinnon K.I.M. A note on feasibility in Benders decomposition. Numerical Analysis Report NA/188, Department of Mathematics, University of Dundee. 2000.
19. Fabian C., Szoke Z. Solving two-stage stochastic programming problems with level decomposition. *Computational Management Science.* 2007. Vol. 4, Iss. 4. P. 313–353.
20. Zverovich V., Fábián C., Ellison E., Mitra G. A computational study of a solver system for processing two-stage stochastic LPs with enhanced Benders decomposition. *Mathematical Programming Computation.* 2012. Vol. 4, Iss. 3. P. 211–238.
21. Лаптин Ю.П. Вопросы построения точных штрафных функций. *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика*. 2013. Вып. 4. С. 21–31.
22. Лаптин Ю.П. Точные штрафные функции и выпуклые продолжения функций в схемах декомпозиции по переменным. *Кибернетика и системный анализ.* 2016. Т. 52, № 1. С. 96–108.
23. Нурминский Е.А. Проекция на внешне заданные полиэдры. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ*. 2008. Т. 48, № 3. С. 387–396.
24. Журбенко Н. Г. Алгоритм проектирования на политоп. *Теорія оптимальних рішень*. 2008. № 7. С. 125–131.
25. Лаптин Ю.П. ε-субградиенты в методах декомпозиции по переменным для некоторых задач оптимизации. *Теорія оптимальних рішень*. 2003. № 2. С. 75–82.
26. Лаптин Ю.П., Журбенко Н.Г. Некоторые вопросы решения блочных нелинейных задач оптимизации со связывающими переменными. *Кибернетика и системный анализ.* 2006. № 2. С. 47–55.
27. Стецюк П.И. Программа ralgb5 для минимизации выпуклых функций. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем.* 2016. С. 185–197.

Надійшла до редакції 03.07.2018

Ю.П. Лаптін, Т.О. Бардадим

ПРОБЛЕМИ ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ТОЧНИХ ШТРАФНИХ ФУНКЦІЙ

Анотація. Розглянуто нові підходи до оцінювання коефіцієнтів точних штрафних функцій для оптимізаційних задач з обмеженнями. Наведено результати обчислювальних експериментів з використанням спрощених процедур оцінювання коефіцієнтів для розв'язання деяких класів задач. Найбільш актуальними такі підходи є для методів декомпозиції за змінними (узагальнених методів декомпозиції Бендерса). Це дозволяє запобігати труднощам, пов'язаним з неявним описом допустимої області координувальної задачі.

Ключові слова: точні штрафні функції, структуровані задачі оптимізації, методи декомпозиції.

Yu.P. Laptin, T.O. Bardadym

PROBLEMS RELATED TO ESTIMATION OF THE COEFFICIENTS OF EXACT PENALTY FUNCTIONS

Abstract. New approaches to estimation of the coefficients of exact penalty functions for constrained optimization problems are considered. The results of computational experiments on the use of simplified coefficient estimation procedures for solving certain classes of problems are presented. Such approaches are most relevant when using the methods of decomposition in variables (generalized Benders decomposition). This allows us to overcome the issues related to implicit description of feasible region in the master problem.

Keywords: exact penalty functions, structured optimization problems, decomposition methods.

Лаптин Юрий Петрович,
доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: yu.p.laptin@gmail.com.

Бардадым Тамара Алексеевна,
кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: tbardadym@gmail.com.