УДК 517.9

Э.Р. СМОЛЬЯКОВ

ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

Аннотация. Приведен простой и быстрый метод оценки асимптотической устойчивости существенно нелинейных динамических систем, в частности систем большой размерности, для которых ряды Тейлора разложения правых частей дифференциальных уравнений сходятся медленно и сумма членов выше второго порядка малости может значительно превышать величину любого члена второго порядка. В таком случае метод функций Ляпунова не может гарантировать корректную оценку устойчивости. В основе предложенного метода — процедура максимизации скорости изменения метрики пространства возмущенного состояния, которая только в частных случаях может оказаться одновременно и функцией Ляпунова. Описанная методика не рассчитана на оценку устойчивости линейных систем.

Ключевые слова: устойчивость движения, нелинейные динамические системы.

ВВЕДЕНИЕ

Базовые основы общей теории устойчивости динамических систем заложены в диссертации А.М. Ляпунова в 1892 г. и позднее дополнены Н.Г. Четаевым, Н.Н. Красовским и др. Некоторые частные приемы исследования устойчивости разрабатывались и ранее, например Э.Дж. Раусом, Н.Е. Жуковским и другими учеными, однако систематизированная общая постановка задач устойчивости движения предложена и глубоко проработана А.М. Ляпуновым. Самым общим методом до сих пор остается метод Ляпунова, позволяющий точно оценивать устойчивость линейных динамических систем, но в случае нелинейных систем он не всегда корректен [1–4].

Метод функций Ляпунова в своей идейной основе простой, но при его практическом использовании возникают большие, а нередко и неразрешимые трудности. Первый недостаток обусловлен тем, что знакоопределенная функция (квадратичная форма) $V(x)$ должна быть выбрана так, чтобы полная производная от нее по времени $\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}$, где $\frac{dx}{dt} = f(x)$ — векторное дифференциальное уравнение движения, была знакоопределенной функцией противоположного знака относительно функции V. Однако поиск подобной функции скорее можно отнести к математической интуиции, чем к науке. Второй недостаток заключается в том, что функция Ляпунова $V(x)$ — только квадратичная форма, составленная из малых второго порядка при разложении правых частей дифференциальных уравнений в ряды Тейлора. Но квадратичная форма в существенно нелинейных задачах большой размерности ($n \geq 5$) с медленно сходящимися рядами Тейлора не учитывает частные суммы ряда разложения в ряд Тейлора, которые в задачах большой размерности могут превышать даже самый большой член квадратичной формы. В таком случае она не может быть основой для оценки устойчивости. Например, сумма всех членов третьего порядка малости в существенно нелинейных задачах большой размерности, в которых ряды Тейлора сходятся медленно, как правило, превосходит (за счет большого числа членов разложения третьего порядка при больших n) любой член второго порядка, из которых строится функция Ляпунова. Отсюда следует, что функция Ляпунова не учитывает полной информации о дина-

[1] Работа поддержана Программой РФФИ, проект № 18-01-00842-а.

мике системы, а значит, она не может обеспечить достоверный анализ устойчивости системы. Это является причиной ошибок в оценке устойчивости по методу функций Ляпунова и существенного несовпадения областей устойчивости, получаемых на основе разных функций Ляпунова в одной и той же задаче. Возникает вопрос: насколько корректны оценки устойчивости, получаемые на основе функций Ляпунова?

В данной работе рассматривается «вариационная» методика, имеющая следующие положительные характеристики: не требуется предварительного разложения правых частей дифференциальных уравнений в ряды Тейлора; не требуется сложного и не всегда эффективного поиска функции Ляпунова; задача сводится к простой задаче поиска максимума функции конечного числа переменных. Такая методика дает необходимые условия устойчивости, в отличие от методики Ляпунова, основанной на достаточных условиях. В данной методике предлагается вместо трудоемкого поиска функций Ляпунова определять максимум скорости изменения евклидовой метрики $S(x)$ в пространстве X. В частных случаях, когда эта метрика в конкретно решаемой задаче оказывается функцией Ляпунова, найденные условия устойчивости становятся необходимыми и достаточными.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть некоторый процесс в n-мерном евклидовом пространстве описывается векторным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dt} = Y(y(t), t), \tag{1}$$

где $Y(y(t), t)$ — заданная вектор-функция, удовлетворяющая требованиям, обеспечивающим существование решения уравнения (1), $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ — вектор-функция фазовых координат $y_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$. Дополнительно предполагается существование и непрерывность вторых частных производных $\dfrac{\partial^2 Y_i}{\partial y_k^2}$, $i, k = 1, \ldots, n$.

Пусть $z(t)$ — некоторое решение уравнения (1), относительно которого требуется установить, устойчиво ли оно к малым возмущениям $x(t)$. Эти возмущения можно задать в виде

$$x(t) = y(t) - z(t).$$

Подставим данное равенство в уравнение (1) и перепишем его в координатах

$$\frac{dz_i}{dt} + \frac{dx_i}{dt} = Y_i(z_1 + x_1, \ldots, z_n + x_n, t), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1a}$$

Исследование устойчивости проводим, основываясь на этих уравнениях или предварительно разлагая правые части уравнений (1a) в ряды Тейлора в окрестности решения $z(t)$:

$$\frac{dz_i}{dt} + \frac{dx_i}{dt} = Y_i(z, t) + \left(\sum_{k-1}^{n} \frac{\partial Y_i}{\partial x_k} \right)_z x_k + \Delta Y_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где ΔY_i — сумма членов разложения выше первого порядка малости по x.

Поскольку исследуемое на устойчивость решение $z(t)$ удовлетворяет уравнению (1), т.е. уравнению

$$\frac{dz}{dt} = Y(z, t), \tag{2}$$

получаем уравнения возмущенного движения вида

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_k} \right)_z x_k + \Delta Y_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Устойчивость заданного решения $z(t)$ определяют по характеру стремления к нулю решения $x(t)$ уравнений (3) или (1а). Использование только линейной части уравнения (3) редко результативно, а анализ этого уравнения с учетом нелинейных членов обычно проводится с помощью функций Ляпунова $V(x)$.

Если в качестве функции Ляпунова удается подобрать такую определенно-положительную квадратичную форму $V(x)$, что полная производная от нее по времени $\dot{V} = \left(\operatorname{grad} V(x)\, \frac{dx}{dt}\right) < 0$, примененная с учетом дифференциальных уравнений (3) возмущенного движения, оказывается определенно-отрицательной, то решение $z(t)$ уравнения (2) согласно основной теореме Ляпунова [1, с. 39] асимптотически устойчиво. Однако, как правило, поиск такой функции $V(x)$ трудоемок и не всегда эффективен, в связи с чем поиск асимптотической устойчивости, соответствующей паре ($V > 0,\ \dot{V} < 0$), заменяют поиском псевдоустойчивости, соответствующей паре ($V > 0,\ \dot{V} \equiv 0$) [1–4].

ОПИСАНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ МЕТОДИКИ

Рассмотрим отличный от классических методик [1–4] подход к проблеме исследования устойчивости динамических систем, основанный на использовании вариационного исчисления [5]. Пусть в евклидовом пространстве заданы метрика (для практических расчетов удобнее применять «полуметрику» $S = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k^2$) и некоторое малое число $\varepsilon > 0$. Проанализируем решения уравнений (3) или (1а) в малой окрестности нуля пространства X, т.е. в области

$$S = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 < \varepsilon. \tag{4}$$

Определение 1. Назовем некоторое решение уравнения (1) ε-устойчивым, если найдутся малое число $\varepsilon > 0$ и момент $0 < t_1 < \infty$ такие, что при всех $t > t_1$ траектория движения $x(t)$ не выйдет из области (4). Будем полагать, что движение монотонно асимптотически устойчиво, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ траектория $x(t)$ монотонно стремится к нулю в области (4) и достигает нуля при $t \le \infty$, а следовательно, траектория движения в пространстве X удовлетворяет условию

$$\dot{S} = (\operatorname{grad} S\, \dot{x}) \le 0.$$

Предположим, что в рассматриваемой задаче имеет место асимптотическая устойчивость. Как следует из определения 1, объект движется в пространстве X внутрь сферы (4), а значит, функция $\dot{S}$ неположительна в области (4) и ее максимум достигается (при $t > t_1$) в некоторой точке x этой области, в частности при $x = 0$. Очевидно, что глобальный максимум в данной области, если он существует, достигается в нуле пространства X, что и означает монотонную асимптотическую устойчивость, а любые локальные максимумы в области (4), достигаемые во внутренних точках этой области, за исключением точки $x = 0$, согласно определению 1 могут определять не более чем ε-устойчивость.

Это утверждение, по сути, является доказательством следующей теоремы.

Теорема 1. Чтобы некоторое решение динамической системы (1) было ε-устойчивым по отношению к малым возмущениям (4), необходимо, чтобы полная производная по времени $\dot{S}$, вычисленная с учетом дифференциальных уравнений возмущенного движения (1а) или (3), достигала максимума в области (4), а в случае монотонной асимптотической устойчивости максимум достигался в нуле пространства X.

Следствие 1. Чтобы в открытой области (4) имела место асимптотическая устойчивость нулевого решения уравнений (1а) или (3) относительно координат x_i, необходимо, чтобы в сколь угодно малой окрестности точки $x=0$ удовлетворялись следующие отношения [5, с. 35, 36]:

$$\frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial x_i^2} \le 0, \ \frac{\partial \dot{S}}{\partial x_i} = 0 \ \ (i=1,2,\dots,n).$$

Следствие 2. Чтобы в открытой области (4) имела место асимптотическая устойчивость нулевого решения уравнений (1а) или (3), необходимо, чтобы в сколь угодно малой окрестности точки $x=0$ удовлетворялись следующие отношения [5, с. 35, 36]:

$$\frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial x_i^2} \le 0, \ \frac{\partial \dot{S}}{\partial x_i} = 0, \ \ i=1,2,\dots,n.$$

Достаточность имеет место только в том случае, если функция S в конкретной задаче оказывается также функцией Ляпунова.

Теорему 1, позволяющую быстро и просто оценивать устойчивость сложных существенно нелинейных динамических систем, целесообразно использовать как предварительное средство оценки устойчивости, прежде чем переходить к сложным методикам Ляпунова [1–4].

Замечание 1. Если в задаче существует асимптотическая устойчивость, задаваемая определением 1 и теоремой 1, то выполняются необходимые условия следствий 1 и 2. Однако из их удовлетворения не обязательно вытекает, что имеет место асимптотическая устойчивость. Следовательно, необходимо какое-либо подтверждение полученного результата с помощью теории функций Ляпунова $V(x)$, дающей достаточные условия устойчивости. Такое подтверждение имеем, например, когда функция S оказывается в рассматриваемой задаче функцией Ляпунова. Предлагаемую методику вследствие ее простоты можно использовать для получения быстрой предварительной оценки устойчивости, причем из теоремы 1 не следует, что функция S должна быть функцией Ляпунова. Для рассмотренного далее примера 2 в работе [1] не удалось найти функцию Ляпунова, гарантирующую асимптотическую устойчивость по координатам (x_1, x_2), она была найдена только по переменным (x_1, x_2^2). С помощью теоремы 1 поиск полной области устойчивости по координатам (x_1, x_2) осуществить несложно.

Замечание 2. В классической теории [1–4] на основе различных функций Ляпунова, найденных для одной и той же конкретной задачи, как правило, получают разные условия устойчивости. Тогда перед исследователем (инженером) встает вопрос: какая из функций Ляпунова корректна? Если предположить, что все функции корректны, то сколько необходимо «придумать» функций, чтобы выявить все области устойчивости в рассматриваемой задаче, учитывая, что поиск даже одной подобной функции нередко оказывается безрезультатным? Таким образом, при оценке устойчивости существенно нелинейных динамических систем не следует основываться на методе функций Ляпунова. В то же время методика Ляпунова безупречна в отношении линейных систем и, вероятно, для них она незаменима.

Рассмотрим методику использования предлагаемого вариационного метода (основанного на необходимых условиях оптимальности) для исследования устойчивости существенно нелинейных динамических систем, простого и эффективного в сравнении с методами Ляпунова.

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ НОВОГО ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА

Пример 1 [1, с. 46]. Для оценки устойчивости существенно нелинейной динамической системы

$$\dot{x}_1 = -\frac{2x_1}{(1+x_1^2)} + 2x_2, \ \dot{x}_2 = -\frac{2x_1}{(1+x_1^2)} - \frac{2x_2}{(1+x_1^2)}$$

в [1, с. 46] найдена функция Ляпунова

$$V = \frac{x_1^2}{(1+x_1^2)} + x_2^2,$$

подтвердившая асимптотическую устойчивость данной динамической системы.

Отметим, что в этой задаче асимптотическая устойчивость с помощью предлагаемой методики определяется без каких-либо трудностей. Составляя функцию $\dot{S} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2$ и вычисляя от нее вторые частные производные, получаем

$$\frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial x_i^2} = -4 < 0, \quad i = 1, 2,$$

откуда согласно следствию 2 вытекает асимптотическая устойчивость. Заметим, что в данном случае функция S оказывается еще одной функцией Ляпунова.

Пример 2. Пусть нелинейные дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют следующий вид [1, с. 54, 55]:

$$\dot{x}_1 = ax_1 + bx_2^2, \quad \dot{x}_2 = cx_1x_2 + ex_2^3. \tag{5}$$

Требуется найти ограничения на параметры (a, b, c, e) рассматриваемой динамической системы, обеспечивающие ее асимптотическую устойчивость к малым возмущениям (x_1, x_2).

В работе [1, с. 54, 55] функция Ляпунова для системы (5) ищется в виде

$$V = \frac{1}{2}(\lambda x_1^2 + 2\mu x_1x_2 + x_2^2), \tag{6}$$

где λ и μ подбираются исходя из условия, что функция V положительно-определенная, а $\dot{V}$ отрицательно-определенная. Для положительности функции V согласно критерию Сильвестра [1, с. 32] необходимо и достаточно, чтобы главные диагональные миноры матрицы $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & 1 \end{pmatrix}$ были положительными, откуда следуют неравенства $\lambda > 0$ и $\lambda > \mu^2$. Функция $\dot{V}$ в силу уравнений (5) имеет вид

$$\dot{V} = \lambda a x_1^2 + (\lambda b + c)x_1x_2^2 + ex_2^4 + \mu(ax_1x_2 + bx_2^3 + cx_1^2x_2 + ex_1x_2^3).$$

При $\mu \neq 0$ данная функция оказывается знакопеременной (причем доказательство этого факта нетривиально). Полагая $\mu = 0$, получаем квадратичную форму $\dot{V}$ относительно переменных x_1 и $\bar{x}_2 = x_2^2$:

$$\dot{V} = \lambda a x_1^2 + (\lambda b + c)x_1x_2^2 + ex_2^4 = \lambda a x_1^2 + (\lambda b + c)x_1\bar{x}_2 + e\bar{x}_2^2,$$

для которой из критерия Сильвестра (только относительно переменных x_1 и x_2^2)

$$\begin{pmatrix} \lambda\alpha & \frac{1}{2}(\lambda b + c) \\ \frac{1}{2}(\lambda b + c) & e \end{pmatrix}$$

следуют неравенства

$$\lambda a < 0, \quad 4\lambda ae - (\lambda b + \mathrm{c})^2 > 0. \tag{7}$$

Отсюда с учетом вычисления корней квадратного уравнения

$$4\lambda ae - (\lambda b + \mathrm{c})^2 = 0$$

вытекает

$$a<0,\ e<0,\ bc<ae,\ \lambda_1<\lambda<\lambda_2, \tag{8}$$

где λ_1 и λ_2 — вещественные положительные корни трехчлена в (7).

При условиях (8) функция $V(x)$ становится определенно-положительной, функция $\dot{V}(x)$ — определенно-отрицательной, и согласно теореме Ляпунова имеет место асимптотическая устойчивость, но не относительно переменных x_1 и x_2, а только x_1 и $\bar{x}_2=x_2^2$.

Заметим, что если положить в (6) $\lambda=1$, $\mu=0$, то, как легко видеть, полученная функция (назовем ее S вместо V) остается положительно-определенной, а $\dot{S}$ — отрицательно-определенной. Но в этом случае, с учетом принимающих другой вид неравенств (7), оказывается, что асимптотическая устойчивость имеет место при других ограничениях на параметры уравнений возмущенного движения (5):

$$a<0,\ e<0,\ (b+c)^2<4ae. \tag{9}$$

Очевидно, что параметрические области асимптотической устойчивости (8) и (9) для двух разных функций Ляпунова существенно разные, причем найти функцию Ляпунова, обеспечивающую асимптотическую устойчивость по паре (x_1,x_2), в [1, с. 54, 55] не удалось, потому что ее для задачи (5) не существует, а функция S для этой пары координат, по сути, не является функцией Ляпунова (она такова только для пары (x_1,x_2^2)).

Найдем асимптотическую устойчивость по паре (x_1,x_2) с помощью вариационной методики. Вначале на основе метрики (4) определим функцию $\dot{S}$:

$$\dot{S}=x_1\dot{x}_1+x_2\dot{x}_2=ax_1^2+x_1x_2^2(b+c)+ex_2^4 \tag{10}$$

и подсчитаем первые частные производные от функции (10), определяющие экстремали

$$\frac{\partial\dot{S}}{\partial x_1}=2ax_1+(b+c)x_2^2=0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial\dot{S}}{\partial x_2}=2x_1x_2(b+c)=4ex_2^3=0. \tag{12}$$

Вследствие предположения о существовании максимума функции $\dot{S}$ вторые частные производные должны быть неположительными:

$$\frac{\partial^2\dot{S}}{\partial x_1^2}=2a\le 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2\dot{S}}{\partial x_2^2}=2[x_1(b+c)+6ex_2^2]\le 0. \tag{14}$$

Из (13) получаем $a\le 0$, а подстановка экстремали (11) в неравенство (14) указывает на то, что при любых сколь угодно малых x_1 и x_2 выполняются отношения

$$\frac{\partial^2\dot{S}}{\partial x_2^2}=x_2^2\left[6e-\frac{(b+c)^2}{2a}\right]\le 0, \tag{15}$$

откуда следует

$$12ae\ge(b+c)^2. \tag{16}$$

При подстановке экстремали (12) в (14) получаем $8ex_2^2\le 0$, откуда вытекает $e\le 0$. Заметим, что экстремали (11) и (12) совместимы, если $4ae=(b+c)^2$.

Таким образом, на основе вариационного подхода определяем, что асимптотическая устойчивость движения (относительно переменных (x_1,x_2)) в рассматриваемой задаче имеет место при условиях $12ae>(b+c)^2$, $a<0$, $e<0$.

Пример 3. В данном примере, так же как и в примере 2, в [1, с. 41] удалось найти асимптотическую устойчивость только по переменным x_1^2 и x_2. С помощью вариационного метода определим устойчивость следующих уравнений возмущенного движения по переменным x_1 и x_2:

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1 x_2 - x_1^3 - \frac{1}{2} x_1 x_2^2, \dot{x}_2 = -3x_2 + x_1 x_2 + x_1^2 x_2 - \frac{1}{2} x_1 x_2^2. \tag{17}$$

Полная производная от метрики (4) по времени в данном случае имеет вид

$$\dot{S} = -x_1 x_2 + x_1^2 x_2 - x_1^4 - \frac{1}{2} x_1^2 x_2^2 + 3x_2^2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2^2 - \frac{1}{2} x_1 x_2^2. \tag{18}$$

Если в задаче (17) имеет место асимптотическая устойчивость, то вторые частные производные от функции (18) должны быть неположительными:

$$\frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial x_1^2} = 2x_2 - 12x_1^2 + x_2^2 \le 0, \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial x_2^2} = x_1^2 - 6 + 2x_1 - 3x_1 x_2 \le 0. \tag{20}$$

Поскольку, как следует из (20), в любой малой окрестности нуля удовлетворяется неравенство $\frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial x_2^2} = -6 < 0$, имеет место асимптотическое стремление к нулю по координате x_2. Из неравенства (19) вытекает, что при сколь угодно малых $x_2 \to 0$ оно преобразуется в неравенство $\frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial x_1^2} = -12x_1^2 \le 0$, откуда следует асимптотическое стремление к нулю и по координате x_1.

Пример 4 [1, с. 45]. Рассмотрим дифференциальные уравнения возмущенного движения

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 3x_2^2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 x_2 - x_2^3. \tag{21}$$

Введем в рассмотрение функцию $\dot{S} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = -(x_1 - x_2^2)^2$ и найдем ее экстремали

$$\frac{\partial \dot{S}}{\partial x_1} = -2(x_1 - x_2^2) = 0, \quad \frac{\partial \dot{S}}{\partial x_2} = 4x_2 (x_1 - x_2^2) = 0.$$

В этой задаче имеется общая экстремаль

$$x_1 = x_2^2, \tag{22}$$

которая, как легко проверить, не является решением системы уравнений (21), а следовательно, любые траектории данной системы в области (4) пересекают эту экстремаль. Найдем вторые частные производные

$$\frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial x_1^2} = -2, \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial x_2^2} = 4(x_1 - x_2^2) - 8x_2^2. \tag{24}$$

Из равенства (23) следует асимптотическое стремление траектории к нулю по координате x_1. Поскольку любые траектории системы (21) пересекают экстремаль (22), подставляя ее в уравнение (24), получаем, что в любой сколь угодно малой окрестности нуля удовлетворяется неравенство $\frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial x_2^2} = -8x_2^2 < 0$, указывающее на асимптотическое стремление траектории к нулю и по второй координате x_2.

Пример 5 [1, с. 52]. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + 2x_2^5, \dot{x}_2 = x_1 x_2^2. \tag{25}$$

Для данной системы получаем

$$\dot{S} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1^3 + 2x_1 x x_2^5 + x_1 x_2^3.$$

Вычислив вторые производные, имеем

$$\frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial x_1^2} = 6x_1, \quad \frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial x_2^2} = 40 x_1 x_2^3 + 6 x_1 x_2.$$

Очевидно, что в любой окрестности (4) нуля эти частные производные могут быть любого знака, следовательно, система уравнений (25) неустойчива. Проблема устойчивости или неустойчивости системы (25) решается просто, без особых трудностей, с помощью предложенного вариационного метода. В то же время решение на основе теории функций Ляпунова, приведенное в [1, с. 52], оказалось непростой задачей, потребовавшей «придумать» подходящую функцию Ляпунова и использовать не только теоремы Ляпунова, но и достаточно сложную теорему Н.Н. Красовского [1, с. 51, 52].

Следующий пример интересен тем, что все известные теоремы не позволили сделать какого-либо однозначного заключения об устойчивости или неустойчивости движения.

Пример 6 [1, с. 10, 20, 21, 105]. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\dot{x}_1 = \alpha(-x_2 + x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}), \ \dot{x}_2 = \alpha(x_1 + x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}). \tag{26}$$

С учетом этих уравнений получаем функцию

$$\dot{S} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = \alpha(x_1^2 + x_2^2)\sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

экстремали которой имеют вид

$$\frac{\partial \dot{S}}{\partial x_1} = 3\alpha x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 0, \ \frac{\partial \dot{S}}{\partial x_2} = 3\alpha x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 0.$$

Отсюда, как легко видеть, получаем, что экстремали $x_1 = x_2 = 0$ удовлетворяют уравнениям возмущенного движения (26), что делает их, по сути, бесполезными для исследования устойчивости. В то же время обращаются в тождественный нуль и вторые частные производные от функции $\dot{S}$, что не позволяет сделать какого-либо однозначного заключения об устойчивости или неустойчивости системы (26).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренный вариационный метод исследования устойчивости сложных нелинейных динамических систем значительно отличается от методов Ляпунова из [1–4] и является простым в реализации. Он позволяет существенно упростить и во много раз ускорить поиск областей устойчивости движения, поскольку не возникает необходимости искать функции Ляпунова и использовать сложные и трудновычисляемые при больших размерностях критерии

Сильвестра, Гурвица, Рауса и др. На простых примерах показано, что вариационный метод целесообразно применять дая предварительного анализа устойчивости существенно нелинейных динамических смистем. С его помощью можно за несколько минут или часов найти асимптотическую устойчивость, если она имеет место в рассматриваемой задаче. В то же время этот метод не решает всех проблем устойчивости и, в частности, не может использоваться для оценки устойчивости линейных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. Москва: Наука, 1987. 304 с.
2. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. Москва: АН СССР, 1962. 176 с.
3. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Москва: Физматгиз, 1959. 211 с.
4. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. Москва: Наука, 1977. 350 с.
5. Блисс Г.А. Лекции по вариационному исчислению. Москва: ИЛ, 1950. 348 с.

Надійшла до редакції 13.08.2018

Е.Р. Смольяков

ЕФЕКТИВНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ІСТОТНО НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Анотація. Наведено простий і швидкий метод оцінювання асимптотичної стійкості істотно нелінійних динамічних систем, зокрема систем великої розмірності, для яких ряди Тейлора розвинення правих частин диференціальних рівнянь збігаються повільно і сума членів вище другого порядку малості може суттєво перевищувати величину будь-якого члена другого порядку. У такому випадку метод функцій Ляпунова не може гарантувати коректної оцінки стійкості. В основі запропонованого методу — процедура максимізації швидкості зміни метрики простору збуреного стану, яка лише в окремих випадках може бути одночасно і функцією Ляпунова. Описана методика не розрахована на оцінювання стійкості лінійних систем.

Ключові слова: стійкість руху, нелінійні динамічні системи.

E.R. Smol'yakov

AN EFFICIENT METHOD OF STABILITY ANALYSIS FOR HIGHLY NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS

Abstract. A simple and quick method is proposed for estimation of the asymptotic stability of highly nonlinear dynamic systems, in particular, of the high-dimensional systems for which Tailor series of the right-hand sides of the differential equations converge very slowly. In this case, the sum of terms of the order of smallness higher than two can substantially exceed the value of any term of second order. In this case, Lyapunov's method cannot guarantee correct stability estimate. The new method is based on the procedure of maximization of the velocity of variation in metrics of the perturbed state space. This metrics can at the same time also be a Lyapunov function. The proposed new method is not intended for the stability estimate of linear systems.

Keywords: motion stability, nonlinear dynamic systems.

Смольяков Эдуард Римович,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия,
e-mail: ser-math@rambler.ru.