УДК 514.01

Ю.Г. ГРИГОРЬЯН

АКСИОМЫ НЕОДНОРОДНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Аннотация. Работа основана на гипотезе Лобачевского, что пространство на различных участках удовлетворяет различным геометриям: евклидовой, неевклидовой, проективной. На базе теории арифметических графов построены три системы алгебраических уравнений, вложенных в дискретное метрическое пространство, в котором точка — целое число, позволяющее определить прямую, плоскость и другие элементы, исключением является 0.

Ключевые слова: неклассическая геометрия, модель, геометрия, простанство.

Основы теории арифметических графов, построенной на базе вполне определенного целочисленного кодирования неориентированных графов [1–6], обусловили ряд проблем геометрического и арифметического характера [5, 6]. Одна из них — проблема аксиоматического описания геометрии арифметических графов в специально построенном метрическом пространстве [5]. Примеры арифметических графов (многогранников), допускающих геометрическую реализацию в этом пространстве в виде конкретных евклидовых объектов, приведены в [5]. Однако в этом же пространстве построен пример арифметического графа, не предусматривающий возможности такой реализации.

Указанные примеры обусловили идею существования некой другой геометрии, аксиомы которой основаны на арифметическом кодировании графов и свойствах метрического пространства, построенного в [5].

Настоящая работа посвящена получению и обоснованию неоднородной системы аксиом, описывающей новую неевклидову плоскость в метрическом пространстве арифметических графов.

Приведем некоторые понятия и соотношения из евклидовой геометрии для решения следующей задачи: по заданным скалярным произведениям

$$A=(\overline{A_1B_1}\cdot\overline{A_1C_1}),\ B=(\overline{B_1A_1}\cdot\overline{B_1C_1}),\ C=(\overline{C_1A_1}\cdot\overline{C_1B_1}) \tag{1}$$

треугольника $A_1B_1C_1$ найти длины его сторон $|A_1B_1|$, $|A_1C_1|$, $|B_1C_1|$.

Легко показать, что для скалярных квадратов сторон $\Delta A_1B_1C_1$ имеют место тождества

$$\left.\begin{aligned}(\overline{A_1B_1})^2&\equiv(\overline{A_1B_1}\cdot\overline{A_1C_1})+(\overline{B_1A_1}\cdot\overline{B_1C_1})\\(\overline{A_1C_1})^2&\equiv(\overline{A_1C_1}\cdot\overline{A_1B_1})+(\overline{C_1A_1}\cdot\overline{C_1B_1})\\(\overline{B_1C_1})^2&\equiv(\overline{B_1C_1}\cdot\overline{B_1A_1})+(\overline{C_1A_1}\cdot\overline{C_1B_1})\end{aligned}\right\}$$

или в силу (1) имеем

$$\left.\begin{aligned}|\overline{A_1B_1}|^2&\equiv A+B\\|\overline{A_1C_1}|^2&\equiv A+C\\|\overline{B_1C_1}|^2&\equiv B+C\end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

где A, B, C — некоторые действительные числа.

Из системы (2) получаем требуемое

$$|A_1B_1|=\sqrt{A+B},\ |A_1C_1|=\sqrt{A+C},\ |B_1C_1|=\sqrt{B+C}.$$

Система (2) позволяет решить и обратную задачу: по заданным сторонам $|A_1B_1|$, $|A_1C_1|$, $|B_1C_1|$ треугольника $A_1B_1C_1$ найти скалярные величины A, B, C (1), а именно:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{|\overline{A_1B_1}|^2 + |\overline{A_1C_1}|^2 - |\overline{B_1C_1}|^2}{2} \\ B &= \frac{|\overline{A_1B_1}|^2 + |\overline{B_1C_1}|^2 - |\overline{A_1C_1}|^2}{2} \\ C &= \frac{|\overline{A_1C_1}|^2 + |\overline{B_1C_1}|^2 - |\overline{A_1B_1}|^2}{2} \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Очевидно, что (3) является иной записью теоремы косинусов. Изложенное можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Каждому евклидовому $\Delta A_1B_1C_1$ с заданными скалярными произведениями $A = (\overline{A_1B_1} \cdot \overline{A_1C_1})$, $B = (\overline{B_1A_1} \cdot \overline{B_1C_1})$, $C = (\overline{C_1A_1} \cdot \overline{C_1B_1})$ можно поставить в соответствие равный ему ΔABC со сторонами

$$|AB| = |A_1B_1| = \sqrt{A+B}, \; |AC| = |A_1C_1| = \sqrt{A+C}, \; |BC| = |B_1C_1| = \sqrt{B+C} \tag{4}$$

и вершинами A, B, C, выраженными действительными числами.

Естественно возникает обратная задача, какой тройке скалярных величин (A, B, C) можно поставить в соответствие евклидовый треугольник (включая вырожденный). Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Тройке скалярных величин (A, B, C) соответствует евклидовый ΔABC со сторонами

$$|AB| = \sqrt{A+B}, \; |AC| = \sqrt{A+C}, \; |BC| = \sqrt{B+C}$$

и вершинами A, B, C тогда и только тогда, когда выполняются два условия:

1) $A+B > 0$, $A+C > 0$, $B+C > 0$;

2) $AB + AC + BC \geq 0$.

Первое условие обеспечивает необходимость существования ΔABC, при котором величины $|AB| = \sqrt{A+B}$, $|AC| = \sqrt{A+C}$, $|BC| = \sqrt{B+C}$ являются действительными числами.

Второе условие обеспечивает достаточность существования евклидового ΔABC, основанную на формуле Герона, в котором при

$$\begin{gathered} a = |BC| = |B_1C_1| = \sqrt{B+C}, \; b = |AC| = |A_1C_1| = \sqrt{A+C}, \\ c = |AB| = |A_1B_1| = \sqrt{A+B} \end{gathered} \tag{5}$$

площадь S треугольника ABC принимает вид

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2}\sqrt{AB + AC + BC} \geq 0. \tag{6}$$

При таком представлении заданного евклидового $\Delta A_1B_1C_1$ равным ему ΔABC со сторонами (4) и вершинами A, B, C (3) площадь S согласно (6) и основные тригонометрические функции можно записать в виде:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{AB + AC + BC}, \tag{7}$$

$$\cos \angle BAC = \frac{A}{\sqrt{(A+B) \cdot (A+C)}}, \tag{8}$$

$$\cos\angle ABC = \frac{B}{\sqrt{(A+B)\cdot(B+C)}}, \tag{9}$$

$$\cos\angle ACB = \frac{C}{\sqrt{(A+C)\cdot(B+C)}}, \tag{10}$$

$$\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{\sqrt{AB+AC+BC}}{A} = \frac{2S}{A}, \tag{11}$$

$$\operatorname{tg}\angle ABC = \frac{\sqrt{AB+AC+BC}}{B} = \frac{2S}{B}, \tag{12}$$

$$\operatorname{tg}\angle ACB = \frac{\sqrt{AB+AC+BC}}{C} = \frac{2S}{C}. \tag{13}$$

Формулы (5)–(13) проще своих классических аналогов и, главное, создают соответствующие предпосылки для решения поставленной геометрической проблемы. Так как в дальнейшем рассматриваются только целочисленные тройки чисел (A, B, C), введем следующее определение.

Определение 1. Множество $\aleph$ целых чисел без нуля называется арифметическим множеством, если оно удовлетворяет двум условиям:

а) для любой пары различных $A, B \in \aleph$ справедливо $A + B > 0$;

б) для любой тройки различных $A, B, C \in \aleph$ справедливо $AB + AC + BC \ge 0$.

Зафиксируем целое $D \le -2$ и рассмотрим бесконечное параметрическое множество целых чисел

$$\aleph(D) = \{D, -D+1\} \cup \{D^2 - D + i\},\ i = 0, 1, 2 \ldots \tag{14}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Параметрическое множество целых чисел $\aleph(D)$ (14) при любом $D \le -2$ является арифметическим множеством.

Доказательство. Проверим условие а) определения 1.

Действительно,

$$D + (-D+1) = 1 > 0,$$

$$D + (D^2 - D + i) = D^2 + i > 0,\ \ i = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$(-D+1) + (D^2 - D + i) = (D-1)^2 + i > 0,\ \ i = 0, 1, 2, \ldots$$

Условие б) определения 1 докажем для двух случаев:

1) для троек $\{D, (-D+1), (D^2 - D + i)\} \subset \aleph(D)$, $D \le -2$, $i = 0, 1, 2, \ldots$;

2) для троек $\{D, (D^2 - D + i), (D^2 - D + j)\} \subset \aleph(D)$, $D \le -2$, $i < j$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 0, 1, 2, \ldots$

Для остальных случаев, очевидно, условие б) выполняется.

В случае 1 условие б) определения 1 принимает вид

$$D(-D+1) + D(D^2 - D + i) + (-D+1)(D^2 - D + 1) = i \ge 0,\ \ i = 0, 1, 2 \ldots$$

В случае 2 условие б) имеет вид

$$D(D^2 - D + i) + D(D^2 - D + j) + (D^2 - D + i)(D^2 - D + j) =$$

$$= D^2(D-1) + Di + D^2(D-1) + Dj + D^2(D-1)^2 + D(D-1)j + D(D-1)i + ij =$$

$$= D^2(D^2 - 1) + (i+j)D^2 + ij > 0,\ \ i = 0, 1, 2 \ldots,\ \ j = 1, 2, \ldots,\ \ i < j.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. Арифметическое множество $\aleph(D)$ для каждого фиксированного $D \le -2$ образует метрическое пространство с метрикой

$$r(A, B) = \begin{cases} \sqrt{A+B}, & A \ne B, \\ 0, & A = B \end{cases} \qquad (15)$$

(метрика (15) впервые введена автором в [5]).

Доказательство. Так как согласно теореме 3 $\aleph(D)$ является арифметическим множеством, то в силу условия а) определения 1 и метрики (15) $r(A, B) \ge 0$.

Имеют место следующие аксиомы метрического пространства: $r(A, B) = 0$, тогда и только тогда, когда $A = B$; $r(A, B) = r(B, A)$ (аксиомы симметрии).

Покажем, что для арифметического множества $\aleph(D)$ имеет место аксиома треугольника. Рассмотрим множество $\aleph(D)$, которому при фиксированном D принадлежит единственный отрицательный элемент $D \le -2$. В силу условия б) определения 1 и положительности остальных элементов из множества $\aleph(D)$ для любых $A, B, C \in \aleph$ проведем последовательность преобразований:

$$\begin{gathered} AB + AD + BD \ge 0, \\ AB + AD + BD + D^2 \ge D^2, \\ \sqrt{(A+D)(B+D)} \ge |D|, \\ \sqrt{(A+D)(B+D)} \ge -D, \\ 2\sqrt{(A+D)(B+D)} \ge -2D, \\ 2\sqrt{(A+D)(B+D)} + A + D + B + D \ge A + B, \\ 2\sqrt{(A+D)(B+D)} + (\sqrt{A+D})^2 + (\sqrt{B+D})^2 \ge (\sqrt{A+B})^2, \\ (\sqrt{A+D} + (\sqrt{B+D}))^2 \ge (\sqrt{A+B})^2, \\ \sqrt{A+B} \le \sqrt{A+D} + \sqrt{B+D}, \\ r(A, B) \le r(A, D) + r(B, D), \end{gathered} \qquad (16)$$

что и доказывает аксиому треугольника для $\aleph(D)$.

Таким образом, арифметическое пространство $\aleph(D)$ (14) является метрическим пространством с метрикой (15). В дальнейшем полученное метрическое пространство обозначается так же, как и арифметическое множество — $\aleph(D)$, и называется арифметическим метрическим пространством $\aleph(D)$. Легко заметить, что в пространстве $\aleph(D)$ прямоугольные треугольники не существуют, так как $0 \notin \aleph(D)$.

В дальнейшем под помеченным графом будем понимать граф, вершины которого отличаются одна от другой какими-либо метками.

Так, арифметический граф $G(N, M)$ [2] является частным случаем помеченного графа, при котором всякий неориентированный граф представляется в специальной целочисленной системе кодирования.

Согласно теореме 1 каждому евклидовому $\Delta\, A_1 B_1 C_1$ можно поставить в соответствие помеченный $\Delta\, ABC$, равный исходному, в котором метками вершин являются скалярные величины A, B, C, определяемые по формулам (3). Однако теорема 2 показывает, что арифметическому метрическому пространству $\aleph(D)$ принадлежит множество всевозможных помеченных целыми числами евклидовых треугольников ABC $(A, B, C \in (\aleph(D))$, длины сторон которых $|AB|$, $|AC|$,

$|BC|$ совпадают с метрикой пространства $\aleph(D)$, т.е.

$$|AB| = r(A,B) = \sqrt{A+B},\ |AC| = r(A,C) = \sqrt{A+C},\ |BC| = r(B,C) = \sqrt{B+C}.$$

В дальнейшем при целочисленном кодировании вершин геометрических фигур (графов) коды вершин представляются неравными один другому целыми числами из $\aleph(D)$.

Определение 2. Точкой арифметического метрического пространства $\aleph(D_0)$ (14) при фиксированном $D_0 \le -2$ называется любое целое число $X \in \aleph(D_0)$.

Определение 3. При фиксированном $D_0 \le -2$ пара точек (X, Y), $X, Y \in \aleph(D_0)$, называется арифметической прямой, если $\sqrt{X+Y}$ — целое число и существует такая точка $Z \in \aleph(D_0)$, что $XY + YZ + XY = 0$.

Определение 4. При фиксированном $D_0 \le -2$ пара точек (U,V), $U, V \in \aleph(D_0)$, называется псевдопрямой, если $\sqrt{U+V}$ — целое число и существует такая точка $T \in \aleph(D_0)$, что $UT + VT - UV = 0$.

Определение 5. При фиксированном $D_0 \le -2$ арифметическая прямая (K, D_0), $K, D_0 \in \aleph(D_0)$, называется базисной арифметической прямой, если

$$K + D_0 = 1 \tag{17}$$

и существует такая точка $C \in \aleph(D_0)$, что

$$KD_0 + CD_0 + CK = 0. \tag{18}$$

Из системы уравнений (17), (18) имеем

$$K = 1 - D_0 > 0,\ K \ge 3,\ C = D_0(D_0 - 1),\ C \ge 6.$$

Следовательно, $K, C \in \aleph(D_0)$ и поэтому пара (K, D_0) является базисной арифметической прямой.

Определение 6. При фиксированном $D_0 \le -2$ арифметическая псевдопрямая (A, B), $A, B \in \aleph(D_0)$, называется базисной арифметической псевдопрямой, если выполняются условия

$$A + B = (1 - 2D_0)^2, \tag{19}$$

$$A - B = 1 - 2D_0. \tag{20}$$

Из системы уравнений (19), (20) имеем

$$A = (2D_0 - 1)(D_0 - 1),\ B = (2D_0 - 1)D_0,\ A, B \in \aleph(D_0). \tag{21}$$

На основании (21) легко проверить, что $AC + BC - AB = 0$, где $C = D_0(D_0 - 1)$ и $C \in \aleph(D_0)$. Поэтому согласно определениям 4 и 6 пара точек (A, B) является арифметической базисной псевдопрямой.

Определение 7. При фиксированном $D_0 \le -2$ базисные арифметическая прямая (K, D_0) и арифметическая псевдопрямая (A, B), удовлетворяющие системе уравнений

$$\left.\begin{array}{l} CD_0 + CK + KD_0 = 0 \\ K + D_0 = 1 \\ A + B = (1 - 2D_0)^2 \\ A - B = 1 - 2D_0 \end{array}\right\}, \tag{22}$$

называются арифметической неоднородной плоскостью $\Re(D_0)$.

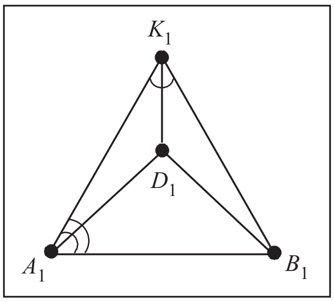

Рис. 1

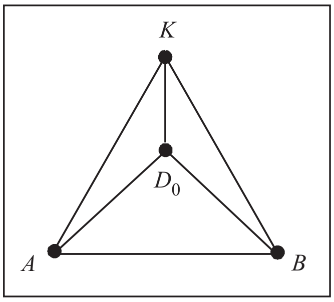

Рис. 2

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. При фиксированном $D_0 \le -2$ система уравнений (22) эквивалентна системе уравнений

$$\left.\begin{array}{l} CD_0 + CK + KD_0 = 0 \\ K + D_0 = 1 \\ A + D_0 = B + K \\ AD_0 + BK = 0 \end{array}\right\}.$$

Рассмотрим плоскую евклидову фигуру $\Delta_n \{A_1, B_1, K_1, D_1\}$ (рис. 1) со структурой, изоморфной полному графу с четырьмя вершинами.

Определение 8. Плоская евклидова фигура $\Delta_n \{A_1, B_1, K_1, D_1\}$ (см. рис. 1), в которой D_1 — ортоцентр $\Delta A_1B_1K_1$ со стороной $|A_1B_1| = n$, углами $\angle A_1K_1B_1 = \operatorname{arctg} n$, $\angle B_1A_1K_1 = \pi/4$, где $n \ge 5$ — нечетное число, называется базисной евклидовой фигурой (БЕФ).

На основании определения 8 с помощью известных формул геометрии и тригонометрии находятся шесть сторон и 12 углов БЕФ Δ_n (см. рис. 1), а именно:

$$|K_1D_1| = 1,\ |A_1K_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}(n+1),\ |B_1K_1| = |A_1D_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{n^2+1},$$

$$|B_1D_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}(n-1), \quad |A_1B_1| = n, \tag{23}$$

$$\angle A_1B_1D_1 = \angle B_1A_1K_1 = \angle A_1K_1D_1 = \frac{\pi}{4},\ \angle B_1D_1K_1 = \frac{3\pi}{4},$$

$$\angle B_1K_1D_1 = \angle B_1A_1D_1 = \operatorname{arctg}\frac{n-1}{n+1},\ \angle D_1A_1K_1 = \angle D_1B_1K_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{n},$$

$$\angle A_1K_1B_1 = \operatorname{arctg} n, \quad \angle A_1B_1K_1 = \operatorname{arctg}\frac{n+1}{n-1},\ \angle A_1D_1B_1 = \operatorname{arctg}(-n),$$

$$\angle A_1D_1K_1 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{n+1}{n-1}\right).$$

Построим в арифметическом метрическом пространстве $\aleph(D)$ аналог БЕФ Δ_n (см. рис. 1).

Определение 9. При фиксированном $D_0 \le -2$ помеченный граф $\Phi_n\{A, B, K, D_0\}$ (рис. 2), где $A, B, K, D_0 \in \aleph(D_0)$, называется базисной арифметической фигурой (БАФ), если выполняются три условия:

$$\left.\begin{array}{l} K + D_0 = 1 \\ A + D_0 = B + K \\ AD_0 + BK = 0 \end{array}\right\}. \tag{24}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 6. При фиксированном $D_0 \le -2$ базисная арифметическая фигура $\Phi_n\{A, B, K, D_0\}$ (см. рис. 2), где $A, B, K, D_0 \in \aleph(D_0)$, равна базисной евклидовой фигуре $\Delta_n\{A_1, B_1, K_1, D_1\}$ (см. рис. 1), ($\Phi_n = \Delta_n$), $n \ge 5$, — нечетный параметр $(n = 1 - 2D_0)$.

Доказательство построено на вычислении длин сторон БЕФ Δ_n с помощью обычных формул геометрии и их сравнении с соответствующими сторонами БАФ Φ_n, найденных на основе решения системы (24) с применением метрики (15) арифметического метрического пространства $\aleph(D_0)$. Переход от целого параметра $D_0 \le -2$ к нечетному параметру $n \ge 5$ проводится с помощью подстановки $n = 1 - 2D_0$.

В результате решение системы (24) (A, B, K, D_0) при нечетном параметре $n \ge 5$ принимает вид

$$A = \frac{n(n+1)}{2},\ B\ \frac{n(n-1)}{2}, K = \frac{n+1}{2},\ D_0 = -\frac{n-1}{2}. \tag{25}$$

На основе (23) и метрики (15) окончательно имеем

$$\begin{gathered}
|K_1D_1| = r(K, D_0) = \sqrt{K + D_0} = 1,\ |A_1D_1| = r(A, D_0) = \sqrt{A + D_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{n^2+1}, \\
|A_1K_1| = r(A, K,) = \sqrt{A+K} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{n+1}, \\
|B_1D_1| = r(B, D_0) = \sqrt{B + D_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}(n-1), \\
|B_1K_1| = r(B, K) = \sqrt{B+K} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{n^2+1},\ \ |A_1B_1| = r(A, B) = \sqrt{A+B} = n.
\end{gathered} \tag{26}$$

Таким образом, на основании (26) следует, что $\Delta_n = \Phi_n$. Из равенства указанных дискретных объектов Δ_n и Φ_n следует, что арифметическое метрическое пространство $\aleph(D_0)$ сохраняет евклидовость не только треугольников, но и определенных плоских фигур со структурой, изоморфной полному графу с четырьмя вершинами.

Согласно изложенному на основании определения 9 и теоремы 5 можно дать другое понятие арифметической неоднородной плоскости $\Re(D_0)$, эквивалентное определению 7.

Определение 10. При фиксированном $D_0 \le -2$ помеченный граф $\overline{\Phi}_n\{A, B, D, K, D_0, C\}$ (рис. 3), являющийся объединением базисной арифметической фигуры $\Phi_n\{A, B, K, D_0\}$ (см. рис. 2) и некоторой точки $C \in \aleph(D_0)$, называется арифметической неоднородной плоскостью $\Re(D_0)$, если выполняются четыре условия:

$$\left.\begin{aligned}
&CD_0 + CK + KD_0 = 0 \\
&K + D_0 = 1 \\
&A + D_0 = B + K \\
&AD_0 + BK = 0
\end{aligned}\right\}. \tag{27}$$

Так как последние три уравнения системы (27) совпадают с системой (24), то легко убедиться, что система (27) при $n \ge 5$ имеет решение

$$A = \frac{n(n+1)}{2}, B = \frac{n(n-1)}{2},\ K = \frac{n+1}{2},\ D_0 = -\frac{n-1}{2},\ C = \frac{n^2-1}{4}. \tag{28}$$

Докажем основную теорему.

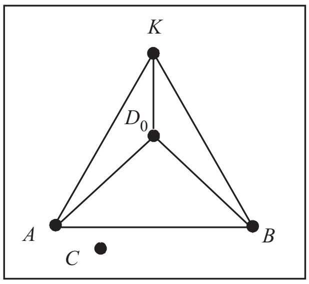

Рис. 3

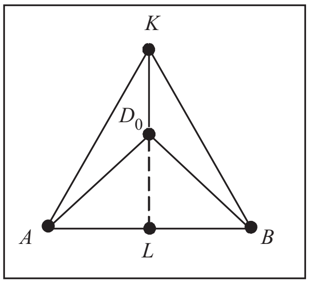

Рис. 4

Теорема 7. При фиксированном $D_0 \leq -2$ арифметическая неоднородная плоскость $\Re(D_0)$ является неевклидовой плоскостью.

Доказательство. Допустим противное, что $\Re(D_0)$ является евклидовой плоскостью. Тогда фигура $\Phi_n\{A, B, K, D_0\} \subset \overline{\Phi}_n\{A, B, K, D_0, C\}$ (см. рис. 3) согласно теореме 6 является плоской евклидовой фигурой, равной Δ_n (см. рис. 1). Поэтому точка D_0 — ортоцентр евклидового $\Delta\, ABK$. Продолжив перпендикуляр KD_0 до пересечения со стороной AB, получим точку L (рис. 4). Согласно (25) $|AK| = \frac{\sqrt{2}}{2}(n+1)$ и так как $\angle BAK = \pi/4$, то $\Delta\, AKL$ прямоугольный, равнобедренный, т.е.

$$|AL| = |KL| = \frac{n+1}{2},\ |LD_0| = |KL| = |KD_0| = \frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}. \tag{29}$$

На основании формул (3), (29) и равенства $|KL| = |KD_0| + |D_0L|$ найдем K, L, D_0:

$$K = \frac{n+1}{2},\ D_0 = -\frac{n-1}{2},\ L = \frac{n^2-1}{4}. \tag{30}$$

Сравнивая C в (28) и L в (30), получаем (см. рис. 4)

$$L = C. \tag{31}$$

Рассуждая аналогично относительно стороны AB в $\Delta\, ABK$ (см. рис. 4) при условии, что $\angle ABD_0 = \frac{\pi}{4}$ (см. (23)), имеем

$$|AB| = |AL| + |LB|,\ |AB| = n,\ |AL| = |KL| = \frac{n+1}{2},\ |LB| = |LD| = \frac{n-1}{2}. \tag{32}$$

На основании формул (3) и (32) получим

$$A = \frac{n(n+1)}{2},\ B = \frac{n(n-1)}{2},\ L = -\frac{n(n^2-1)}{2}. \tag{33}$$

Сравнивая C в (28) и L в (33), получаем

$$L = -C. \tag{34}$$

Сравнивая (31) и (34), имеем $C = -C \Rightarrow C = 0$. Однако $C = 0$ невозможно, так как $0 \notin \aleph(D_0)$ (14).

Полученное противоречие доказывает теорему.

Таким образом, на основе арифметического кодирования дискретных объектов построена неевклидовая геометрия, отличающаяся от геометрии Лобачевского и Римана свойствами постоянства суммы углов треугольника и неоднородностью, порождаемой условием масштабирования $(K + D = 1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьян Ю.Г. Вариационная задача функций алгебры логики и метод ее реализации на ЭВМ. *Кибернетика*. 1967. № 1. С. 26–30.
2. Григорьян Ю.Г., Маноян Г.К. Некоторые вопросы арифметической интерпретации неориентированных графов. *Кибернетика*. 1977. № 3. С. 129–131.
3. Григорьян Ю.Г. Классификация и статистические свойства арифметических графов. *Кибернетика*. 1979. № 6. С. 9–12.
4. Григорьян Ю.Г. Задача существования и вопросы представления натуральных арифметических графов. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1984. Т. 24, № 11. С. 1751–1756.
5. Григорьян Ю.Г. Геометрия арифметических графов. *Кибернетика*. 1982. № 4. С. 1–4.
6. Григорьян Ю.Г. Группы арифметических автоморфизмов простых циклов. *Кибернетика*. 1990. № 4. С. 9–15.

Надійшла до редакції 03.12.2018

Ю.Г. Григор'ян

АКСІОМИ НЕОДНОРІДНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Анотація. Робота ґрунтується на гіпотезі Лобачевського, що простір на різних ділянках задовольняє різній геометрії: евклідовій, неевклідовій, проективній. На базі теорії арифметичних графів побудовано три системи алгебраїчних рівнянь, укладених у дискретний метричний простір, в якому точка — це ціле число, що дозволяє визначити пряму, площину та інші елементи, винятком є 0.

Ключові слова: некласична геометрія, модель, геометрія, простір.

Yu. Grigoryan

AXIOMS OF HETEROGENEOUS GEOMETRY

Abstract. The study is based on Lobachevski's hypothesis that the space at different areas satisfies various geometries: Euclidean, non-Euclidean, projective. On the basis of the arithmetic graph theory, three systems of algebraic equations were constructed. The systems are embedded in a discrete metric space in which point is an integer that allows defining a straight line, a plane, and other elements, except for 0.

Keywords: nonclassical geometry, model, geometry, space.

Григорьян Юрий Георгиевич,
доктор физ.-мат. наук, профессор Европейского университета, Ереван, Республика Армения,
e-mail: grigrubi@yahoo.com.