КІБЕРНЕТИКА

Е.М. КИСЕЛЕВА, О.М. ПРИТОМАНОВА, С.А. УС

УДК 519.8

РЕШЕНИЕ ДВУХЭТАПНОЙ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ–РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ЗАДАННЫМ ПОЛОЖЕНИЕМ ЦЕНТРОВ ПОДМНОЖЕСТВ

Аннотация. Предложены метод и алгоритм решения двухэтапной непрерывно-дискретной задачи оптимального разбиения–распределения, являющейся обобщением, с одной стороны, классической транспортной задачи на случай, когда объемы производства (хранения, переработки) в заданных пунктах не известны заранее, а отыскиваются как решение соответствующей непрерывной задачи оптимального разбиения множества непрерывно распределенных потребителей (поставщиков) на сферы их обслуживания в этих пунктах, с другой стороны, дискретных двухэтапных производственно-транспортных задач на случай непрерывно распределенного потребителя. Работа предложенного алгоритма проиллюстрирована решением модельной задачи.

Ключевые слова: бесконечномерное математическое программирование, оптимальное разбиение–распределение, транспортная задача, недифференцируемая оптимизация.

ВВЕДЕНИЕ

Математическая теория оптимального разбиения множеств (ОРМ) из n-мерного евклидова пространства E_n является новым разделом бесконечномерного математического программирования с булевыми переменными. Основные результаты этой теории получены в течение последних 50-ти лет научной школой члена-корреспондента НАН Украины Е.М. Киселевой и представлены в более чем 400 научных работах, среди которых [1–8].

Необходимость в изучении непрерывных моделей ОРМ из E_n обусловлена тем, что к таким моделям сводятся в математической постановке совершенно различные оптимизационные теоретические и прикладные задачи.

Большой перечень таких теоретических и прикладных оптимизационных задач приведен в [1, 3–6]. Особое место среди них занимают актуальные задачи размещения и покрытия, которые также исследованы в [9–11].

Структура сформировавшейся к настоящему времени теории ОРМ представлена в [1, 2], наиболее изученные из них следующие:

— детерминированные линейные и нелинейные, однопродуктовые и многопродуктовые задачи ОРМ при ограничениях как с заданным положением центров подмножеств, так и с отысканием оптимального их размещения;

— динамические задачи оптимального разбиения с критерием оптимальности, зависящим от фазовых траекторий и управления некоторой заданной управляемой системы.

Менее изученными и активно развивающимися в настоящее время являются также классы непрерывных задач ОРМ, такие как задачи ОРМ в условиях неопределенности (стохастические, нечеткие). Требует дальнейшего развития направление [7], связанное с применением методов ОРМ к решению непрерывных задач шарового покрытия, а также многократного шарового покрытия [5].

Настоящая статья посвящена развитию теории ОРМ n-мерного евклидова пространства E_n на случай двухэтапной непрерывно-дискретной задачи оптимального разбиения–распределения при ограничениях в виде равенств с заданным положением центров подмножеств.

Рассматриваемая непрерывно-дискретная задача оптимального разбиения–распределения обобщает, с одной стороны, классическую конечномерную транспортную задачу [12] на случай, когда объемы производства (хранения, переработки) в заданных пунктах не известны заранее, а отыскиваются как решение соответствующей непрерывной задачи ОРМ потребителей (поставщиков непрерывно распределенного ресурса) на сферы их обслуживания в этих пунктах, с другой стороны, дискретные двухэтапные производственно-транспортные задачи [13] на случай непрерывно распределенного ресурса.

Прикладные задачи, сводящиеся к двухэтапным непрерывно-дискретным задачам оптимального разбиения–распределения, характеризуются наличием двух этапов и состоят в определении зон сбора непрерывного распределенного ресурса (сырья) предприятиями первого этапа и объемов перевозок переработанного продукта от этих предприятий к потребителям (пунктам второго этапа) в целях минимизации суммарных затрат на транспортировку ресурса от поставщиков через пункты переработки (сбора, хранения) к потребителям.

Заметим, что такие задачи часто встречаются на практике [8, 14–19]. К их числу относятся задачи, в которых непрерывно-распределенным ресурсом является, например, природное сырье (нефть, газ, руда) или урожай сельскохозяйственных культур; организация сбора древесных отходов для производства топлива с последующим распределением его между пунктами получения тепловой энергии в целях минимизации суммарных транспортных затрат; оптимизация депозитно-кредитной деятельности отделений банка для привлечения депозитов от физических лиц с последующим распределением этих средств между заемщиками и др.

Решение двухэтапной непрерывной дискретной задачи оптимального разбиения–распределения основано на едином подходе, разработанном в научной школе Е.М. Киселевой, состоящем в сведении исходных бесконечномерных задач оптимального разбиения–распределения к негладким, как правило, конечномерным задачам оптимизации, для численного решения которых применяются эффективные методы недифференцируемой оптимизации — различные варианты r-алгоритма, разработанные в Институте кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины под руководством Н.З. Шора [20].

Далее предложен метод решения рассматриваемой задачи, основанный на использовании методов теории ОРМ и метода потенциалов решения транспортной задачи. На основе данного метода сформулирован алгоритм решения, составной частью которого является одна из модификаций r-алгоритма Шора. Приведены результаты численной реализации разработанного алгоритма для решения одной модельной задачи.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть Ω — ограниченное, замкнутое, измеримое по Лебегу множество в n-мерном евклидовом пространстве E_n.

Совокупность измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ из $\Omega \subset \mathrm{E}_n$ будем называть возможным разбиением множества Ω на его непересекающиеся подмножества $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$, если

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega, \ \operatorname{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \ i \neq j, \ i, j = 1, \ldots, N,$$

где $\operatorname{mes}(\cdot)$ — мера Лебега.

Обозначим Σ_{Ω}^{N} класс всех возможных разбиений множества Ω на непересекающиеся подмножества $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$, т.е.

$$\Sigma_{\Omega}^{N} = \left\{ (\Omega_1, \ldots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega, \ \mathrm{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \ i \neq j, \ i, j = 1, \ldots, N \right\}.$$

Введем функционал

$$F(\{\Omega_1, \ldots, \Omega_i, \ldots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \ldots, v_{ij}, \ldots, v_{NM}\}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i^{\mathrm{I}}(x, \tau_i^{\mathrm{I}}) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_{ij}^{\mathrm{II}}(\tau_i^{\mathrm{I}}, \tau_j^{\mathrm{II}}) v_{ij}.$$

Тогда под двухэтапной непрерывно-дискретной линейной однопродуктовой задачей оптимального разбиения–распределения с заданным расположением центров подмножеств при ограничениях в виде равенств будем понимать следующую задачу.

Задача 1. Требуется найти такое разбиение множества Ω на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_{*1}, \ldots, \Omega_{*N}$ и такой неотрицательный вектор $v_* = (v_{*11}, \ldots, v_{*ij}, \ldots, v_{*NM}) \in E_{NM}$, которые обеспечивают

$$\min_{\{\Omega_1, \ldots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \ldots, v_{NM}\}} F(\{\Omega_1, \ldots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \ldots, v_{NM}\})$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{M} v_{ij} = \int_{\Omega_i} \rho(x) dx, \ i = 1, \ldots, N; \ \sum_{i=1}^{N} v_{ij} = b_j^{\mathrm{II}}, \ j = 1, \ldots, M;$$

$$\{\Omega_1, \ldots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^{N}; \ v_{ij} \geq 0, \ i = 1, \ldots, N, \ j = 1, \ldots, M;$$

$$x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) \in \Omega; \ \tau^{\mathrm{I}} = (\tau_1^{\mathrm{I}}, \ldots, \tau_N^{\mathrm{I}}) \in \underbrace{\Omega \times \ldots \times \Omega}_{N} = \Omega^N,$$

$$\tau^{\mathrm{II}} = (\tau_1^{\mathrm{II}}, \ldots, \tau_M^{\mathrm{II}}) \in \Omega^M.$$

Здесь $b_j^{\mathrm{II}}, \ j = 1, \ldots, M,$ — заданные неотрицательные числа, причем выполняются условия разрешимости задачи

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} v_{ij} = \sum_{j=1}^{M} b_j^{\mathrm{II}}, \ 0 \leq b_j^{\mathrm{II}} \leq S, \ j = 1, \ldots, M.$$

Заметим, что в терминах классической транспортной задачи вектор $v = (v_{11}, \ldots, v_{NM})$ — объем транспортировки продукции из пунктов первого этапа $\tau_i^{\mathrm{I}}, i = 1, \ldots, N$, в пункты второго этапа $\tau_j^{\mathrm{II}}, j = 1, \ldots, M$, т.е. конечного потребления.

Функции $c_i^{\mathrm{I}}(x, \tau_i^{\mathrm{I}})$ действительные, ограниченные, определенные на $\Omega \times \Omega$, измеримые по аргументу $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ при любом фиксированном $\tau_i^{\mathrm{I}} = (\tau_i^{\mathrm{I}(1)}, \ldots, \tau_i^{\mathrm{I}(n)})$ из Ω для всех $i = 1, \ldots, N$; функция $\rho(x)$ действительная, ограниченная, измеримая, неотрицательная на Ω; $\tau_i^{\mathrm{I}} = (\tau_i^{\mathrm{I}(1)}, \ldots, \tau_i^{\mathrm{I}(n)}), \ i = 1, \ldots, N,$ — некоторая заданная эталонная точка для подмножества Ω_i, называемая центром этого подмножества; $\tau_j^{\mathrm{II}} = (\tau_j^{\mathrm{II}(1)}, \ldots, \tau_j^{\mathrm{II}(n)}), \ j = 1, \ldots, M,$ — некоторая заданная точка множества Ω; $c_{ij}^{\mathrm{II}}(\tau_i^{\mathrm{I}}, \tau_j^{\mathrm{II}}), \ i = 1, \ldots, N, \ j = 1, \ldots, M,$ — заданная ограниченная, определенная на $\Omega \times \Omega$ функция, являющаяся функцией расстояния в соответствующей метрике между точками τ_i^{I} и τ_j^{II}.

Здесь и в дальнейшем интегралы понимаются в смысле Лебега. Будем считать, что мера множества граничных точек подмножеств Ω_i, $i=1,\ldots,N$, равна нулю.

Пару $(\{\Omega_{*1},\ldots,\Omega_{*N}\},\{v_{*11},\ldots,v_{*NM}\})$, являющуюся решением задачи 1, назовем оптимальной.

Введем характеристическую функцию

$$\lambda_i(x)=\begin{cases}1, & x\in\Omega_i,\\ 0, & x\in\Omega\setminus\Omega_i\end{cases}$$

подмножества Ω_i, $i=1,\ldots,N$.

Рассмотрим функционал

$$I(\lambda(\cdot),v)=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}c_i^{\mathrm{I}}(x,\tau_i^{\mathrm{I}})\rho(x)\lambda_i(x)dx+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}c_{ij}^{\mathrm{II}}(\tau_i^{\mathrm{I}},\tau_j^{\mathrm{II}})v_{ij}, \tag{1}$$

где вектор-функция $\lambda(x)=(\lambda_1(x),\ldots,\lambda_i(x),\ldots,\lambda_N(x))$, а вектор $v=(v_{11},\ldots$ $\ldots,v_{ij},\ldots,v_{NM})$. Очевидно, $I(\lambda(\cdot),v)=F(\{\Omega_1,\ldots,\Omega_N\},\{v_{11},\ldots,v_{NM}\})$.

Запишем задачу 1 в терминах характеристических функций $\lambda_i(x)$ подмножеств Ω_i, $i=1,\ldots,N$, в следующем виде.

Задача 2. Найти $\min\limits_{(\lambda(\cdot),v)} I(\lambda(\cdot),v)$ при условиях

$$\sum_{j=1}^{M}v_{ij}=\int_{\Omega}\rho(x)\lambda_i(x)dx,\ i=1,\ldots,N;\ \sum_{i=1}^{N}v_{ij}=b_j^{\mathrm{II}},\ j=1,\ldots,M;$$

$\lambda_i(x)=0\vee 1$ почти всюду (п.в.) для $x\in\Omega$, $i=1,\ldots,N$; $\sum\limits_{i=1}^{N}\lambda_i(x)=1$ п.в. для $x\in\Omega$; $v_{ij}\ge 0$, $i=1,\ldots,N$, $j=1,\ldots,M$.

От бесконечномерной задачи 2 с булевыми значениями переменных $\lambda_i(\cdot)$, $i=1,\ldots,N$, перейдем к соответствующей задаче со значениями $\lambda_i(\cdot)$ из отрезка $[0,1]$.

Задача 3. Найти $\min\limits_{(\lambda(\cdot),v)\in\Gamma_1\times Q} I(\lambda(\cdot),v)$, где

$$\Gamma_1=\Bigg\{\lambda(x)=(\lambda_1(x),\ldots,\lambda_N(x))\in\Gamma \text{ п.в. для } x\in\Omega;$$

$$\sum_{j=1}^{M}v_{ij}=\int_{\Omega}\rho(x)\lambda_i(x)dx,\ i=1,\ldots,N;\ \sum_{i=1}^{N}v_{ij}=b_j^{\mathrm{II}},\ j=1,\ldots,M\Bigg\};$$

$$\Gamma=\left\{\lambda(x):0\le\lambda_i(x)\le 1,\ x\in\Omega,\ i=1,\ldots,N;\ \sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x)=1 \text{ п.в. для } x\in\Omega\right\};$$

$$Q=\{v=(v_{11},\ldots,v_{ij},\ldots,v_{NM}):v_{ij}\ge 0,\ i=1,\ldots,N,\ j=1,\ldots,M\}.$$

При каждом фиксированном $v\in Q$ задача 3, как доказано в [3], имеет решение.

Действительно, так как Γ_1 — ограниченное, замкнутое, выпуклое множество гильбертова пространства $L_2^N(\Omega)$, а функционал $I(\lambda(\cdot),v)$ при каждом фиксированном $v\in Q$ линейный (а значит, выпуклый) и непрерывный относительно $\lambda(\cdot)$ на Γ_1, то в силу обобщенной теоремы Вейерштрасса [3] выпуклый непрерывный функционал $I(\lambda(\cdot),v)$ при фиксированном $v\in Q$ на замкнутом, ограниченном, выпуклом множестве Γ_1 гильбертова пространства $L_2^N(\Omega)$ достигает своей нижней грани.

Утверждение 1. При каждом фиксированном $v \in Q$ ограниченное, замкнутое, выпуклое множество Γ_1 гильбертова пространства $L_2^N(\Omega)$ слабо компактно и (согласно теореме Крейна–Мильмана [3]) содержит, по крайней мере, одну крайнюю точку.

Утверждение 2. Среди множества точек Γ_1^*, в которых линейный относительно $\lambda(\cdot)$ функционал $I(\lambda(\cdot), v)$ достигает при каждом фиксированном $v \in Q$ минимального по $\lambda(\cdot)$ значения на множестве Γ_1, найдется хотя бы одна крайняя точка множества Γ_1.

Утверждение 3. Крайние точки множества Γ_1 — характеристические функции некоторых подмножеств Ω_i, образующих разбиение множества Ω при каждом фиксированном $v \in Q$.

Из утверждений 1–3 следует, что при каждом фиксированном $v \in Q$ во множестве оптимальных решений задачи 3 содержатся оптимальные решения задачи 2, что позволяет в дальнейшем перейти к рассмотрению задачи 3.

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Введем функционал Лагранжа для задачи 3 следующим образом:

$$L(\{\lambda(\cdot), v\}\Psi) = I(\lambda(\cdot), v) +$$

$$+\sum_{i=1}^{N} \psi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - \sum_{j=1}^{M} v_{ij} \right) + \sum_{j=1}^{M} \eta_j \left(b_j^{\mathrm{II}} - \sum_{i=1}^{N} v_{ij} \right), \qquad (2)$$

где $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_i, \ldots, \psi_N; \eta_1, \ldots, \eta_j, \ldots, \eta_M)$ — $(N+M)$-мерный вектор вещественных чисел произвольного знака; $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \ldots, \lambda_N(x)) \in \Gamma$ п.в. для $x \in \Omega$; $v = (v_{11}, \ldots, v_{ij}, \ldots, v_{NM})$ — $(N \times M)$-мерный вектор вещественных неотрицательных чисел.

Пару элементов $(\{\lambda_*(\cdot), v_*\}, \Psi^*)$ назовем седловой точкой функционала (2) на множестве $\{\Gamma \times Q\} \times \Lambda$, где

$$Q = \{v = (v_{11}, \ldots, v_{ij}, \ldots, v_{NM}) : v_{ij} \ge 0, \ i = 1, \ldots, N, \ j = 1, \ldots, M\},$$

$$\Lambda = \{\Psi = (\psi; \eta) \in E_{N+M} : \psi = (\psi_1, \ldots, \psi_N) \in E_N, \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_M) \in E_M\},$$

если

$$L(\{\lambda_*(\cdot), v_*\}, \Psi) \le L(\{\lambda_*(\cdot), v_*\}, \Psi^*) \le L(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi^*)$$
$$\text{для } \lambda(\cdot) \in \Gamma, \ v \in Q, \ \Psi \in \Lambda,$$

или

$$L(\{\lambda_*(\cdot), v_*\}, \Psi^*) = \min_{\{\lambda(\cdot), v\} \in \Gamma \times Q} \max_{\Psi \in \Lambda} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi) =$$

$$= \max_{\Psi \in \Lambda} \min_{\{\lambda(\cdot), v\} \in \Gamma \times Q} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi).$$

Введем функционалы

$$X(\{\lambda(\cdot), v\}) = \max_{\Psi \in \Lambda} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi), \ \{\lambda(\cdot), v\} \in \Gamma \times Q,$$

$$G(\Psi) = \min_{\{\lambda(\cdot), v\} \in \Gamma \times Q} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi), \ \Psi \in \Lambda.$$

Рассмотрим задачи

$$X(\{\lambda(\cdot), v\}) \to \min, \ \{\lambda(\cdot), v\} \in \Gamma \times Q, \qquad (3)$$

$$G(\Psi) \to \max, \ \Psi \in \Lambda. \qquad (4)$$

Задачу (3) назовем прямой, задачу (4) — двойственной к задаче (3).

Нетрудно показать (по аналогии с [3]), что задачи (3), (4) связаны соотношением двойственности $X_* = G^*$ и решение пары двойственных задач (3) и (4) (каждая из которых имеет решение) эквивалентно отысканию седловой точки функционала Лагранжа (2) на множестве $\{\Gamma \times Q\} \times \Lambda$.

Для отыскания седловой точки функционала Лагранжа (2) конкретизируем двойственную задачу (4). Для этого от задачи отыскания $\min\limits_{\lambda(\cdot)\in\Gamma, v\in Q} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi)$ перейдем согласно [4] к следующей задаче:

$$\min_{v\ge 0} \min_{\lambda(\cdot)\in\Gamma} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi).$$

Обозначим

$$G_1(\Psi) = G_1(\psi, \eta) = \min_{\lambda(\cdot)\in\Gamma} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi). \tag{5}$$

Подставляя в (5) выражение для $L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi)$ из (2), учитывая (1), а также тот факт, что функционал (2) является линейным сепарабельным относительно λ (при каждом фиксированном $v \ge 0$) на множестве Γ [4], получаем

$$G_1(\psi, \eta) = \sum_{j=1}^{M} \eta_j b_j^{\mathrm{II}} + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} \min_{\substack{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1, \\ 0 \le \lambda_i \le 1, \\ i=1,\ldots,N}} \{(c_i^{\mathrm{I}}(x, \tau_i^{\mathrm{I}}) + \psi_i)\rho(x)\lambda_i(x)\} dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (c_{ij}^{\mathrm{II}}(\tau_i^{\mathrm{I}}, \tau_j^{\mathrm{II}}) - \psi_i - \eta_j) v_{ij}. \tag{6}$$

Легко видеть [3], что в (6) минимальное значение *i*-го, $i = 1, \ldots, N$, выражения в фигурных скобках для каждого $\Psi = (\psi, \eta) \in \Lambda$ достигается при $\lambda_i(x) = \lambda_{*i}(x)$, где

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, \ c_i^{\mathrm{I}}(x, \tau_i^{\mathrm{I}}) + \psi_i \le c_k^{\mathrm{I}}(x, \tau_k^{\mathrm{I}}) + \psi_k, \ i \ne k, \ \text{п. в. для } x \in \Omega, \ k = 1, \ldots, N, \\ 0 \ \text{в остальных случаях}, \end{cases} \tag{7}$$

и функционал $G(\Psi)$ принимает вид

$$G(\Psi) = G(\psi, \eta) = \min_{v \ge 0} G_1(\psi, \eta) = \int_{\Omega} \min_{k=\overline{1,N}} (c_k^{\mathrm{I}}(x, \tau_k^{\mathrm{I}}) + \psi_k)\rho(x)\, dx +$$

$$+ \sum_{j=1}^{M} \eta_j b_j^{\mathrm{II}} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \min_{v_{ij} \ge 0} (c_{ij}^{\mathrm{II}}(\tau_i^{\mathrm{I}}, \tau_j^{\mathrm{II}}) - \psi_i - \eta_j) v_{ij}. \tag{8}$$

Очевидно, что для $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, M$ и всех $\Psi = (\psi, \eta) \in \Lambda$ имеет место

$$\min_{v_{ij} \ge 0} (c_{ij}^{\mathrm{II}}(\tau_i^{\mathrm{I}}, \tau_j^{\mathrm{II}}) - \psi_i - \eta_j) v_{ij} = \begin{cases} 0, & c_{ij}^{\mathrm{II}}(\tau_i^{\mathrm{I}}, \tau_j^{\mathrm{II}}) - \psi_i - \eta_j \ge 0, \\ -\infty, & c_{ij}^{\mathrm{II}}(\tau_i^{\mathrm{I}}, \tau_j^{\mathrm{II}}) - \psi_i - \eta_j < 0. \end{cases}$$

Поскольку двойственная задача (4) состоит в максимизации функционала $G(\Psi)$ (8) на множестве Λ, его максимум имеет смысл искать на множестве лишь тех (ψ, η) из Λ, для которых $c_{ij}^{\mathrm{II}}(\tau_i^{\mathrm{I}}, \tau_j^{\mathrm{II}}) - \psi_i - \eta_j \ge 0$. Поэтому двойственную задачу (4) с учетом выполненных преобразований можно сформулировать следующим образом:

$$G(\Psi) = G(\psi, \eta) = \int_{\Omega} \min_{k=1,\ldots,N} (c_k^{\mathrm{I}}(x, \tau_k^{\mathrm{I}}) + \psi_k)\rho(x) dx + \sum_{j=1}^{M} \eta_j b_j^{\mathrm{II}} \to \max_{\Psi} \tag{9}$$

при условиях

$$\eta_j \le c_{ij}^{\mathrm{II}}(\tau_i^{\mathrm{I}}, \tau_j^{\mathrm{II}}) - \psi_i, \ i = 1, \ldots, N, \ j = 1, \ldots, M; \quad \psi \in E_N, \ \eta \in E_M. \tag{10}$$

Запишем неравенства из условия (10) в виде

$$\eta_j = \min_{1\le k\le N}(c_{kj}^{\mathrm{II}}(\tau_k^{\mathrm{I}}, \tau_j^{\mathrm{II}}) - \psi_k), \ j=1,\ldots,M. \tag{11}$$

Подставляя выражение (11) в (9) и тем самым исключая переменную η из функционала $G(\Psi)$, получаем двойственную задачу (4) в виде

$$G(\Psi) = G_2(\psi) = \int_\Omega \min_{k=1,\ldots,N}(c_k^{\mathrm{I}}(x, \tau_k^{\mathrm{I}}) + \psi_k)\rho(x)dx +$$

$$+\sum_{j=1}^{M} b_j^{\mathrm{II}} \min_{k=1,\ldots,N}(c_{kj}^{\mathrm{II}}(\tau_k^{\mathrm{I}}, \tau_j^{\mathrm{II}}) - \psi_k) \to \max_{\psi}, \tag{12}$$

$$\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_N) \in E_N. \tag{13}$$

Таким образом, переходя от исходной задачи 3 (через функционал Лагранжа (2)) к двойственной задаче, приведенной к виду (12), (13), получаем выражение для первой компоненты $\lambda_*(\cdot)$ оптимального решения задачи 3 в виде (7), где в качестве $\psi^* = (\psi_1^*, \ldots, \psi_N^*)$ выбирается оптимальное решение двойственной задачи (12), (13).

Далее, подставляя в целевой функционал (1) исходной задачи 3 найденное выражение для $\lambda_*(\cdot)$ из (7) при $\psi = \psi^*$, переходим к задаче 4 — отыскание второй компоненты $v = (v_{11}, \ldots, v_{ij}, \ldots, v_{NM})$ оптимального решения исходной задачи 3.

Задача 4. Найти

$$I(\lambda_*(\cdot), v) = \mathrm{const} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_{ij}^{\mathrm{II}}(\tau_{*i}^{\mathrm{I}}, \tau_j^{\mathrm{II}}) v_{ij} \to \min_{v}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{M} v_{ij} = \int_\Omega \rho(x)\lambda_{*i}(x)dx, \ i=1,\ldots,N;$$

$$\sum_{i=1}^{N} v_{ij} = b_j^{\mathrm{II}}, \ j=1,\ldots,M; \ v_{ij} \ge 0, \ i=1,\ldots,N, \ j=1,\ldots,M,$$

где значение $\mathrm{const} = \int_\Omega \min_{k=1,\ldots,N}(c_k^{\mathrm{I}}(x, \tau_{*k}^{\mathrm{I}}) + \psi_k^*)\rho(x)\,dx$ не влияет на значение точки минимума функции $I(\lambda_*(\cdot), v)$.

Очевидно, что задача 4 — это классическая конечномерная транспортная задача, для которой выполняется условие баланса

$$\int_\Omega \rho(x)dx = \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i}\rho(x)dx = \sum_{j=1}^{M} b_j^{\mathrm{II}}.$$

Для решения задачи 4 можно применить известный метод потенциалов.

Сформулируем теорему, подводящую итог предыдущим рассуждениям.

Теорема 1. Первая компонента $\lambda_*(\cdot) = (\lambda_{*1}(\cdot), \ldots, \lambda_{*i}(\cdot), \ldots, \lambda_{*N}(\cdot))$ оптимального решения задачи 3 определяется для всех $i=1,\ldots,N$ и почти всех $x \in \Omega$ следующим образом:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c_i^{\mathrm{I}}(x, \tau_{*i}^{\mathrm{I}}) + \psi_i^* \le c_k^{\mathrm{I}}(x, \tau_{*k}^{\mathrm{I}}) + \psi_k^*, \ i \ne k, \ k=1,\ldots,N, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

в качестве $\psi_1^*, \ldots, \psi_N^*$ выбирается оптимальное решение двойственной задачи (4), приведенной к виду (12), (13).

Вторая компонента $v_* = (v_{*11}, \ldots, v_{*ij}, \ldots, v_{*NM})$ отыскивается как оптимальное решение следующей конечномерной транспортной задачи методом потенциалов [13]:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_{ij}^{\mathrm{II}}(\tau_{*i}^{\mathrm{I}}, \tau_j^{\mathrm{II}}) v_{ij} \to \min_{v} \tag{14}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{M} v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x)\lambda_{*i}(x)dx, \ i=1,\ldots,N, \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{N} v_{ij} = b_j^{\mathrm{II}}, \ j=1,\ldots,M, \tag{16}$$

$$v_{ij} \geq 0, \ i=1,\ldots,N, \ j=1,\ldots,M, \tag{17}$$

причем выполняется условие баланса

$$\int_{\Omega} \rho(x)dx = \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} \rho(x)dx = \sum_{j=1}^{M} b_j^{\mathrm{II}}. \tag{18}$$

Далее приведем алгоритм решения задачи 3, основанный на теореме 1, составными частями которого являются с учетом недифференцируемости функции $G_2(\psi)$ один из вариантов r-алгоритма Шора [20–22], применяемый для численного решения двойственной задачи (12), (13), и метод потенциалов [13], используемый для решения задачи (14)–(18) отыскания значения второй компоненты v_* оптимального решения задачи 3.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 3

Прежде чем сформулировать алгоритм решения задачи 3, основанный на теореме 1, определим i-ю, $i=1,\ldots,N$, компоненту вектора обобщенного градиента $g_{G_2}(\psi) = (g_{G_2}^{\psi_1}(\psi), \ldots, g_{G_2}^{\psi_i}(\psi), \ldots, g_{G_2}^{\psi_N}(\psi))$ функции $G_2(\psi)$ задачи (12) в точке $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_N)$ следующим образом:

$$g_{G_2}^{\psi_i}(\psi) = \int_{\Omega} \rho(x)\lambda_i(x)dx + \sum_{j=1}^{M}(b_j^{\mathrm{II}} q_{ij}), \ i=1,\ldots,N, \tag{19}$$

где

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c^{\mathrm{I}}(x, \tau_i^{\mathrm{I}}) + \psi_i^* \leq c_k^{\mathrm{I}}(x, \tau_k^{\mathrm{I}}) + \psi_k, \ i \neq k, \text{ п.в. для } x \in \Omega, \ k=1,\ldots,N, \\ 0 & \text{в остальных случаях}; \end{cases} \tag{20}$$

$$q_{ij} = \begin{cases} -1, & c_{ij}^{\mathrm{II}}(\tau_i^{\mathrm{I}}, \tau_j^{\mathrm{II}}) - \psi_i = \min\limits_{k=1,\ldots,N}(c_{kj}(\tau_k^{\mathrm{I}}, \tau_j^{\mathrm{II}}) - \psi_k), \ i=1,\ldots,N, \ j=1,\ldots,M, \\ 0 & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Опишем алгоритм.

Предварительный этап. Область Ω заключаем в n-мерный параллелепипед П, стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, полагаем $\rho(x)=0$ при $x \in \Pi \setminus \Omega$. Параллелепипед покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение $\psi = \psi^{(0)}$. Вычисляем значение $\lambda^{(0)}(x)$ в узлах сетки по формулам (20) при $\psi = \psi^{(0)}$. Вычисляем значение вектора обобщенного градиента $g_{G_2}(\psi)$ в узлах сетки по формуле (19) при $\psi = \psi^{(0)}$, $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$.

Шаг 1. Вычисляем $\psi^{(1)} = \psi^{(0)} + h_0 g_{G_2}(\psi^{(0)})$, где h_0 — величина шага, определяемая из условия максимума функции $G_2(\psi)$ по направлению обобщенного градиента $g_{G_2}(\psi^{(0)})$.

Шаг 2. Пусть в результате вычислений после k, $k = 1, 2, \ldots$, шагов алгоритма получены значения $\psi^{(k)}$, $\lambda^{k-1}(x)$ в узлах сетки.

Шаг $(k+1)$-й:

1) вычисляем значения $\lambda^k(x)$ в узлах сетки по формулам (20) при $\psi = \psi^{(k)}$;

2) вычисляем значение вектора $g_{G_2}(\psi)$ в узлах сетки по формуле (19) при $\psi = \psi^{(k)}$, $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$;

3) проводим вычисления по итерационной формуле $\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} + h_k B_{k+1}^{\psi} \tilde{g}_{G_2}^{\psi}$, где B_{k+1}^{ψ} — оператор отображения преобразованного пространства в основное пространство E_N, причем $B_0^{\psi} = I_N$ (единичная матрица), $\tilde{g}_{G_2}^{\psi} = B_{k+1}^{*} g_{G_2}(\psi^{(k)})$, h_k — величина шага, определяемая из условия максимума функции $G_2(\psi)$ по направлению обобщенного градиента $g_{G_2}(\psi^{(k)})$ в преобразованном пространстве;

4) если условие

$$||\psi^{(k+1)} - \psi^{(k)}|| \le \varepsilon, \ \varepsilon > 0, \tag{21}$$

не выполняется, переходим к $(k+2)$-у шагу алгоритма, если выполняется, то к п. 5;

5) полагаем $\psi^* = \psi^l$, $\lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, где l — номер итерации, на которой выполнилось условие (21);

6) решая транспортную задачу методом потенциалов при $\lambda(x) = \lambda_*(x)$ и $\psi = \psi^*$, находим $v_* = (v_{*11}, \ldots, v_{*NM})$;

7) вычисляем оптимальное значение целевого функционала $G_2(\psi)$ двойственной задачи (12), (13) при $\psi = \psi^*$ и для правильности счета оптимальное значение целевого функционала (1) задачи 3 по формуле

$$I(\lambda_*(\cdot), v_*) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} c_i^{\mathrm{I}}(x, \tau_i^{\mathrm{I}}) \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_{ij}^{\mathrm{II}}(\tau_i^{\mathrm{I}}, \tau_j^{\mathrm{II}}) v_{*ij}. \tag{22}$$

Завершение работы алгоритма.

Приведенный алгоритм реализован для следующей модельной задачи.

Некоторый поставщик однородного ресурса (сырья), непрерывно распределенный с плотностью $\rho(x) = 1$ в области $\Omega = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}) : 0 \le x^{(1)} \le 1,$ $0 \le x^{(2)} \le 1\}$, поставляет его в пять пунктов (первого этапа) для первичной переработки (хранения). Заданы координаты $\tau_i^{\mathrm{I}} = (\tau_i^{\mathrm{I}(1)}, \tau_i^{\mathrm{I}(2)})$, $i = \overline{1,5}$, расположения этих пунктов: $\tau_1^{\mathrm{I}} = (0.2; 0.2)$; $\tau_2^{\mathrm{I}} = (0.3; 0.5)$; $\tau_3^{\mathrm{I}} = (0.8; 0.3)$; $\tau_4^{\mathrm{I}} = (0.6; 0.8)$; $\tau_5^{\mathrm{I}} = (0.6; 0.1)$.

Заданы также координаты $\tau_j^{\mathrm{II}} = (\tau_j^{\mathrm{II}(1)}, \tau_j^{\mathrm{II}(2)})$, $j = \overline{1,3}$, пунктов (второго этапа) потребления ресурса, переработанного (хранившегося) в пунктах первого этапа: $\tau_1^{\mathrm{II}} = (0.2; 0.8)$; $\tau_2^{\mathrm{II}} = (0.6; 0.4)$; $\tau_3^{\mathrm{II}} = (0.8; 0.7)$.

Стоимость транспортировки единицы ресурса от поставщика с координатами $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$ в пункт первого этапа с координатами $\tau_i^{\mathrm{I}} = (\tau_i^{\mathrm{I}(1)}, \tau_i^{\mathrm{I}(2)})$ задана в виде

$$c_i^{\mathrm{I}}(x^{(1)}, x^{(2)}, \tau_i^{\mathrm{I}}) = \sqrt{(x^{(1)} - \tau_i^{\mathrm{I}(1)})^2 + (x^{(2)} - \tau_i^{\mathrm{I}(2)})^2}, \ i = \overline{1,5}.$$

Затраты на транспортировку единицы продукции из i-го пункта первого этапа $\tau_i^{\mathrm{I}} = (\tau_i^{\mathrm{I}(1)}, \tau_i^{\mathrm{I}(2)})$ в пункт второго этапа $\tau_j^{\mathrm{II}} = (\tau_j^{\mathrm{II}(1)}, \tau_j^{\mathrm{II}(2)})$ заданы в виде

$$c_{ij}^{\mathrm{II}}(\tau_i^{\mathrm{I}}, \tau_j^{\mathrm{II}}) = \sqrt{(\tau_i^{\mathrm{I}(1)} - \tau_j^{\mathrm{II}(1)})^2 + (\tau_i^{\mathrm{I}(2)} - \tau_j^{\mathrm{II}(2)})^2}, \ i = \overline{1,5}, \ j = \overline{1,3}.$$

Задана величина спроса b_j^{II} на продукцию для j-го пункта потребления, $j=\overline{1,3}$. Кроме того, будем считать, что мощность i-го, $i=\overline{1,5}$, пункта первого этапа определяется суммарным запасом ресурса в сфере его обслуживания Ω_i и не должна превышать заданных объемов b_i^{I}: $\int\limits_{\Omega} \rho(x)dx \le b_i^{\text{I}}$, $i=\overline{1,5}$.

Множество Ω поставщиков ресурса можно разбивать на зоны Ω_i их обслуживания в i-м, $i=\overline{1,5}$, пункте первого этапа так, чтобы

$$\bigcup_{i=1}^{5}\Omega_i=\Omega,\ \ \text{mes}\,(\Omega_i \cap \Omega_j)=0,\ \ i\ne j,\ \ i=\overline{1,5},\ \ j=\overline{1,3}.$$

Требуется разбить множество Ω поставщиков ресурса на сферы их обслуживания в пяти пунктах первого этапа, т.е. на подмножества $\Omega_1,\ldots,\Omega_i,\ldots,\Omega_5$, и определить объемы перевозок $v_{ij} \ge 0$, $i=\overline{1,5}$, $j=\overline{1,3}$, от предприятий первого этапа τ_i^{I}, $i=\overline{1,5}$, в пункты потребления второго этапа τ_j^{II} так, чтобы минимизировать суммарную стоимость транспортировки ресурса от поставщиков в пункты первичной переработки (первого этапа) и доставки переработанного ресурса в пункты конечного потребления (второго этапа):

$$F(\{\Omega_1,\ldots,\Omega_5\},\{v_{11},\ldots,v_{ij},\ldots,v_{53}\})=$$

$$=\sum_{i=1}^{5}\int\limits_{\Omega_i} c_i^{\text{I}}(x,\tau_i^{\text{I}})\rho(x)dx+\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}^{\text{II}}(\tau_i^{\text{I}},\tau_j^{\text{II}})\to \min, \tag{23}$$

и при этом весь переработанный продукт из всех пунктов первого этапа необходимо вывезти в пункты второго этапа

$$\sum_{j=1}^{3} v_{ij}=\int\limits_{\Omega_i}\rho(x)dx,\ \ i=\overline{1,5}, \tag{24}$$

причем спрос всех пунктов второго этапа должен быть удовлетворен

$$\sum_{i=1}^{5} v_{ij}=b_j^{\text{II}},\ \ j=\overline{1,3}, \tag{25}$$

и должно выполняться условие баланса

$$\sum_{i=1}^{5}\int\limits_{\Omega}\rho(x)dx=\sum_{j=1}^{3} b_j^{\text{II}}. \tag{26}$$

Для решения сформулированной задачи (23)–(26) приведенным алгоритмом область Ω покрывалась прямоугольной сеткой размером 31×31.

В качестве начальных данных для переменных ψ двойственной задачи (12), (13) выбирались $\psi_i^{(0)}=0$, $i=\overline{1,5}$. Условием прекращения счета являлось выполнение неравенства $\|\psi^{(k+1)}-\psi^{(k)}\|\le 10^{-4}$, где $(k+1)$ — номер итерации, на которой произошел останов алгоритма. Двойные интегралы, встречающиеся при реализации алгоритма, вычислялись с помощью кубатурной формулы трапеций по узлам выбранной сетки. Исходный опорный план транспортной задачи (14)–(18) отыскивался методом северо-западного угла.

В результате работы алгоритма за 15 итераций получены следующие результаты:

— оптимальное разбиение множества Ω поставщиков однородного ресурса на подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_5$ с объемами производства 0.0736; 0.3008; 0.2242; 0.2986; 0.1028 соответственно (рис. 1). Оптимальные границы между подмножествами на рис. 1 указаны сплошными линиями;

— оптимальный план перевозок переработанного ресурса из i-го, $i = \overline{1,5}$, пункта первого этапа в j-й, $j = \overline{1,3}$, пункт второго этапа

$$v_* = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0736 & 0.0000 \\ 0.3000 & 0.0008 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.2228 & 0.0014 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.2986 \\ 0.3008 & 0.1028 & 0.0000 \end{pmatrix};$$

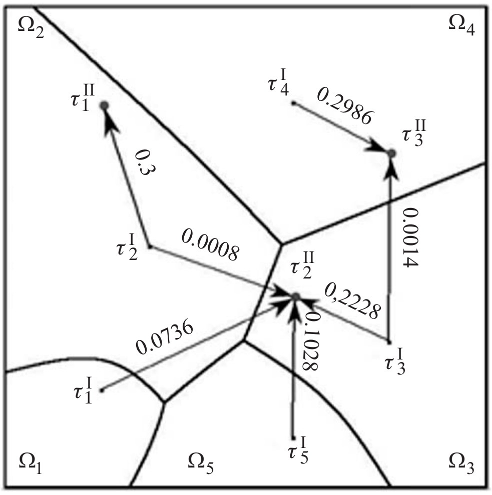

Рис. 1

— минимальное значение функционала (22) исходной задачи 3 $I(\lambda_*(\cdot), v_*) = 0.4805$;

— максимальное значение функционала двойственной задачи $G_2(\psi^*) \approx$ ≈ 0.4808.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая статья посвящена дальнейшему развитию теории ОРМ n-мерного евклидова пространства E_n на случай двухэтапной непрерывно-дискретной линейной задачи оптимального разбиения–распределения при ограничениях в форме равенств с заданным положением центров подмножеств.

Приведенная непрерывно-дискретная задача оптимального разбиения–распределения обобщает классическую конечномерную транспортную задачу на случай, когда объемы производства (хранения, переработки) в заданных пунктах не известны заранее, а отыскиваются как решение соответствующей непрерывной задачи ОРМ потребителей (поставщиков непрерывно распределенного ресурса) на сферы их обслуживания в этих пунктах, а также обобщает дискретные двухэтапные производственно-транспортные задачи на случай непрерывно распределенного ресурса.

Приведены примеры прикладных задач, сводящихся в математической постановке к сформулированной в статье задаче.

На основе предложенного авторами метода разработан и программно реализован алгоритм в среде Intel Visual Fortran Compiler 18.0 for Windows, работа которого проиллюстрирована решением модельной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кісельова О.М. Становлення та розвиток теорії оптимального розбиття множин. Теоретичні і практичні застосування. Дніпро: Ліра, 2018. 532 с.

2. Киселева Е.М. Становление и развитие теории оптимального разбиения множеств n-мерного евклидова пространства. Теоретические и практические приложения. *Проблемы управления и информатики.* 2018. № 5. С. 114–135.

3. Киселева Е.М., Шор Н.З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения. Киев: Наук. думка, 2005. 564 с.
4. Киселева Е.М., Коряшкина Л.С. Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные, динамические. Киев: Наук. думка, 2013. 606 с.
5. Киселева Е.М., Коряшкина Л.С. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств и *r*-алгоритмы. Киев: Наук. думка, 2015. 400 с.
6. Киселева Е.М., Коряшкина Л.С., Ус С.А. Теория оптимального разбиения множеств в задачах распознавания образов, анализа и идентификации систем. Днепропетровск: НГУ, 2015. 270 с.
7. Киселева Е.М., Лозовская Л.И., Тимошенко Е.В. Решение непрерывных задач оптимального покрытия шарами с использованием теории оптимального разбиения множеств. *Кибернетика и системный анализ*. 2009. Т. 45, № 3. С. 98–117.
8. Киселева Е. М., Ус С.А., Станина О.Д. О задачах оптимального разбиения множеств с дополнительными связями. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Дніпропетровськ: РВВ ДНУ, 2016. Вип. 16. С. 67–78.
9. Yakovlev S.V. On some classes of spatial configurations of geometric objects and their formalization. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. Vol. 50, N 9. P. 38–50.
10. Yakovlev S.V. Formalizing spatial configuration optimization problems with the use of a special function class. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, N 4. P. 581–589.
11. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V. Configuration space of geometric objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 5. P. 716–726.
12. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. Москва: Наука, Физматлит, 1969. 384 с.
13. Стецюк П.І., Ляшко В.І., Мазютинець Г.В. Двоетапна транспортна задача та її AMPL-реалізація. *Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки*. 2018. Т. 1. С. 14–20.
14. Михалевич В.С., Трубин В.А., Шор Н.З. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования: модели, методы, алгоритмы. Москва: Наука. 1986. 264 с.
15. Хачатуров В.Р., Злотов А.В. Соломатин А.Н. Математические методы, алгоритмы и программные средства для планирования и проектирования нефтегазодобывающих регионов и месторождений. *Экспозиция Нефть Газ*. 2012. № 5 (23). С. 100–106.
16. Русяк И.Г., Нефедов Д.Г. Решение задачи оптимизации схемы размещения производства древесных видов топлива по критерию себестоимости тепловой энергии. *Компьютерные исследования и моделирование*. 2012. Т. 4, № 3. С. 651–659.
17. Самойленко Н.И., Кобец А.А. Транспортные системы большой размерности. Харьков: НТМТ, 2010. 212 с.
18. Ус С.А., Станина О.Д. О математических моделях многоэтапных задач размещения предприятий. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Дніпропетровськ: РВВ ДНУ, 2014. С. 258–268.
19. Us S.A., Stanina O.D. On some mathematical models of facility location problems of mining and concentration industry. In: *New Developments in Mining Engineering 2015. Theoretical and Practical Solutions of Mineral Resources Mining*. London: CRC Press/Balkema Taylor & Francis Group, 2015. P. 419–424.
20. Шор Н. З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наук. думка, 1979. 200 с.
21. Стецюк П.И. Теория и программные реализации *r*-алгоритмов Шора. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 5. С. 43–57.
22. Stetsyuk P.I. Shor's r-algorithms: Theory and practice. In: *Optimization Methods and Applications: In Honor of the 80th Birthday of Ivan V. Sergienko*. Butenko S., Pardalos P.M, Shylo V. (Eds). Springer, 2017. P. 495–520.

Надійшла до редакції 28.03.2019

О.М. Кісельова, О.М. Притоманова, С.А. Ус

РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОЕТАПНОЇ НЕПЕРЕРВНО-ДИСКРЕТНОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ–РОЗПОДІЛУ ІЗ ЗАДАНИМ РОЗТАШУВАННЯМ ЦЕНТРІВ ПІДМНОЖИН

Анотація. Запропоновано метод і алгоритм розв'язання двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття–розподілу, яка є узагальненням, з одного боку, класичної транспортної задачі на випадок, коли обсяги виробництва (зберігання, переробки) в заданих пунктах не відомі заздалегідь, а відшукуються як розв'язок відповідної неперервної задачі оптимального розбиття множини неперервно розподілених споживачів (постачальників) на сфери їхнього обслуговування в цих пунктах, з іншого боку, дискретних двоетапних виробничо-транспортних задач на випадок неперервно розподіленого споживача. Роботу запропонованого алгоритму проілюстровано розв'язуванням модельної задачі.

Ключові слова: нескінченновимірне математичне програмування, оптимальне розбиття–розподілення, транспортна задача, недиференційовна оптимізація.

E.M. Kiseleva, O.M. Prytomanova, S.A. Us

SOLVING A TWO-STAGE CONTINUOUS-DISCRETE OPTIMAL PARTITIONING-ALLOCATION PROBLEM WITH A GIVEN POSITION OF THE SUBSETS CENTERS

Abstract. A method and algorithm of solving a two-stage continuous-discrete optimal partitioning-allocation problem are proposed. On the one hand, this problem is a generalization of the classical transportation problem to the case where production (storage, recycling) volumes at specified points are unknown in advance, and are sought as a solution of the corresponding continuous problem of optimal partitioning of a set of continuously distributed consumers (suppliers) into their service areas by these points. On the other hand, this problem generalizes discrete two-stage production-transportation problems in the case of a continuously distributed consumer. The operation of the proposed algorithm is demonstrated by solving a model problem.

Keywords: infinite-dimensional mathematical programming, optimal partitioning-allocation, transportation problem, non-differentiable optimization.

Киселева Елена Михайловна,
чл.-кор. НАН Украины, профессор, доктор физ.-мат. наук, декан Днипровского национального университета имени Олеся Гончара, e-mail: kiseleva47@ukr.net.

Притоманова Ольга Михайловна,
кандидат экон. наук, доцент кафедры Днипровского национального университета имени Олеся Гончара, e-mail: olgmp@ua.fm.

Ус Светлана Альбертовна,
кандидат физ.-мат. наук, профессор кафедры НТУ «Дніпровська політехніка», Днипро, e-mail: ussvetlanna@gmail.com.