УДК 519.87

И.В. КОЗИН, Н.К. МАКСИШКО, В.А. ПЕРЕПЕЛИЦА

ФРАГМЕНТАРНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ЗАДАЧИ ЗЕМЛЕПОЛЬЗОВАНИЯ НА ГИПЕРГРАФАХ

Аннотация. Рассмотрена математическая модель задачи землепользования на гиперграфах. Показано, что в рамках этой модели задачу можно сформулировать как задачу оптимизации на фрагментарной структуре. При этом сама задача поиска оптимального решения сводится к задаче безусловной комбинаторной оптимизации на множестве перестановок. Предложены варианты гибридного алгоритма поиска приближенных решений задачи на основе комбинации фрагментарного алгоритма и алгоритма муравьиной колонии.

Ключевые слова: задача землепользования, гиперграф, фрагментарная структура, комбинаторная оптимизация, алгоритм муравьиной колонии.

ВВЕДЕНИЕ

Задача землепользования относится к классу труднорешаемых оптимизационных задач. Исключения составляют некоторые однокритериальные случаи, например, целочисленная задача о назначениях [1, 2]. Цель математической постановки упомянутой задачи заключается в выборе такого распределения различных сельскохозяйственных культур по заданным угодьям, при котором достигается максимум выбранной целевой функции (или векторной целевой функции для многокритериальной постановки). При этом урожайность культуры на заданном участке зависит от ряда факторов: характеристик ранее произрастающих культур, объемов и качества внесенных удобрений, использования водных и других ресурсов.

Существует ряд постановок задачи землепользования. Так, в [3, 4] она рассмотрена как многокритериальная задача линейного целочисленного программирования, в [1] представлена постановка задачи с использованием аппарата теории графов. В [2, 5] вариант задачи землепользования (задача об оптимальном севообороте) рассмотрен как задача на гиперграфах определенного вида. В этих же работах исследованы простейшие частные случаи задачи землепользования, приведены некоторые приближенные алгоритмы, получен ряд оценок сложности алгоритмов. В общем случае, даже в однокритериальной постановке, задача землепользования труднорешаемая. Применение метаэвристик различного вида оправдано актуальностью и прикладным характером задачи для поиска приближенных решений.

В настоящей статье представлена постановка задачи землепользования с применением аппарата теории гиперграфов [2]. Показано, что задачу землепользования на гиперграфах можно сформулировать как задачу оптимизации на фрагментарной структуре. Для поиска субоптимальных решений этой задачи предложен ряд различных комбинированных алгоритмов с низкой вычислительной сложностью.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЗЕМЛЕПОЛЬЗОВАНИЯ НА ГИПЕРГРАФАХ

В работе [1] рассмотрена постановка математической модели задачи землепользования на двудольном графе. Вершинам первой доли соответствуют выращиваемые культуры, а второй доли — пахотные угодья (участки). Ребра графа задают отношения возможности посева определенной культуры на выбранном участке. Для каждого ребра задан вес — показатель урожайности сельскохозяйственной культуры на соответствующем участке. Для учета влияния различных факторов (удобрений, агротехнических мероприятий) модели на графах уже недостаточно. В [2, 5] предложена математическая модель задачи землепользования с применением аппарата теории гиперграфов, основные определения и результаты которой приведены далее.

Пусть V — конечное непустое множество, E — семейство непустых подмножеств множества V. Тогда пара (V, E) называется гиперграфом с множеством вершин V и множеством ребер E [6]. Каждое ребро гиперграфа является конечным подмножеством его вершин. Мощность этого подмножества будем называть степенью ребра.

Гиперграф называется r-однородным, если все его ребра $e \in E$, $e = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$, имеют одну и ту же степень $r > 0$.

Гиперграф называется t-дольным, если его множество вершин V разбито на доли (подмножества) V_s, $s = 1, \ldots, t$, так, что выполняются два условия: всякая пара различных вершин из одной доли является несмежной (не принадлежит ни одному из ребер гиперграфа); у всякого ребра $e \in E$ каждая пара вершин $v', v'' \in e$ принадлежит различным долям.

Рассмотрим t-дольный r-однородный гиперграф (V, E), $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_t$, $V_i = \{v_1^i, v_2^i, \ldots, v_{k_i}^i\}$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Вершинам первой доли поставим в соответствие номера выращиваемых сельскохозяйственных культур, второй доли — номера земельных участков, а третьей и последующих долей — номера частей очередного ресурса (например, удобрений, пестицидов и т.д.). Как правило, ввиду ограниченности ресурсов мощности множеств связаны неравенством $|V_i| \le |V_2|$, $i = 3, 4, \ldots, r$. Однако, не нарушая общности, можно полагать, что $|V_i| = |V_2|$, $i = 3, 4, \ldots, r$. Этого всегда можно добиться, добавив части размера 0 для соответствующего ресурса. Наличие ребра $e = (v_1, v_2, \ldots, v_r)$ в таком гиперграфе соответствует закреплению культуры v_1 за участком v_2 с использованием частей v_i, $i = 3, 4, \ldots, r$, соответствующего ресурса. Для каждого ребра $e \in E$ гиперграфа зададим вес $w(e)$ — показатель эффективности (экономический, экологический) ожидаемой урожайности культуры на участке при соответствующих затратах ресурсов. Весом частичного гиперграфа $Z = (V_z, E_z)$ будем называть сумму весов его ребер $w(Z) = \sum_{e \in E_z} w(e)$.

Звездой гиперграфа $G = (V, E)$ называется его связная часть $Z = (V_z, E_z)$, в которой всякая пара ребер $e', e'' \in E$ пересекается в одной и той же вершине $v_0 \in V_z$ и не пересекается ни в какой другой вершине $v \ne v_0$. Вершина v_0 называется центром звезды Z, а ребра из E_z — ее лучами.

Допустимым покрытием звездами t-дольного r-однородного гиперграфа будем называть совокупность непересекающихся в вершинах звезд этого гиперграфа с центрами в вершинах первой доли. Причем каждая вершина графа принадлежит одному ребру звезды, входящей в покрытие. Весом покрытия называется сумма весов всех ребер гиперграфа, входящих в это покрытие.

Пример трехдольного треходнородного гиперграфа и его допустимого покрытия звездами приведен на рис. 1.

Теперь постановку задачи землепользования на гиперграфе сформулируем следующим образом: среди допустимых покрытий гиперграфа звездами найти такое, вес которого максимален. Для случая $r = 2$ математическая модель задачи на гиперграфах сводится к задаче покрытия звездами двудольного графа (обык-

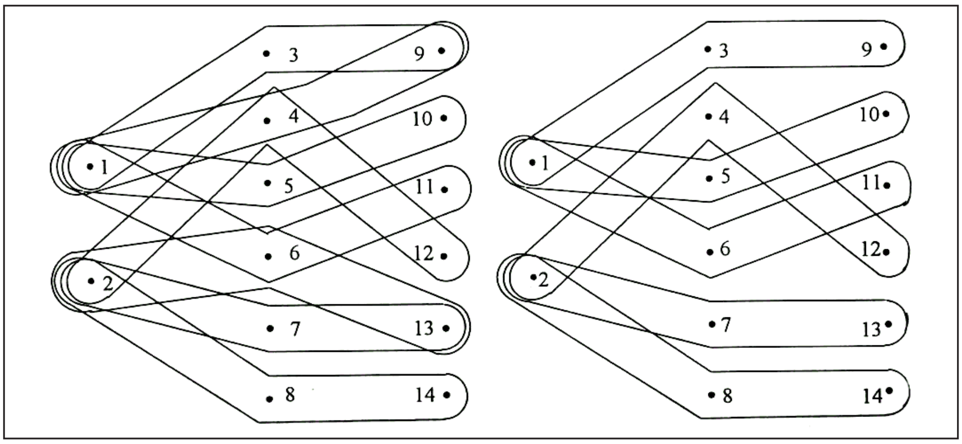

Рис. 1. Покрытие звездами трехдольного треходнородного гиперграфа с 14-ю вершинами

новенного), которая рассматривалась в [1]. Даже в этом простейшем случае для поиска оптимального решения задачи землепользования не известны точные алгоритмы полиномиальной трудоемкости.

Далее показано, что задачу землепользования на гиперграфах можно сформулировать как задачу оптимизации на фрагментарной структуре. Это, в свою очередь, позволяет построить ряд метаэвристик для поиска субоптимальных решений задачи.

ФРАГМЕНТАРНЫЕ СТРУКТУРЫ. СВОЙСТВА ФРАГМЕНТАРНЫХ СТРУКТУР

В соответствии с [7] фрагментарной структурой (X, E) на конечном множестве X будем называть семейство его подмножеств $E = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$, $E_i \subseteq X$, такое, что $\forall E_i \in E$, $E_i \neq \varnothing$ $\exists e \in E_i$, $E_i \setminus \{e\} \in E$.

Допустимыми фрагментами называются элементы из множества E. Допустимые фрагменты мощности 1 называются элементарными. Допустимый фрагмент будем называть максимальным, если он не является подмножеством никакого допустимого фрагмента. Очевидно, что пустое множество является допустимым фрагментом.

Максимальный фрагмент можно построить следующим фрагментарным алгоритмом:

— сначала выбирается некоторое линейное упорядочение множества X;

— на начальном шаге выбирается пустое множество $X_0 = \varnothing$;

— на шаге с номером $k+1$ выбирается первый по заданному порядку элемент $x \in X \setminus X_k$, удовлетворяющий условию присоединения $X_k \bigcup \{x\} \in E$;

— алгоритм завершает работу, если на очередном шаге не удалось найти элемент $x \in X \setminus X_k$ с требуемым свойством.

Заметим, что если $\forall A \in E$ и $\forall x \in X$ существует алгоритм полиномиальной трудоемкости по числу элементов множества X для проверки условия присоединения $A \bigcup \{x\} \in E$, то задача построения максимального фрагмента является полиномиально разрешимой.

Результат работы фрагментарного алгоритма (максимальный фрагмент) зависит от того, какие будут выбираться элементы на каждом шаге, т.е. от начального упорядочения множества X. Таким образом, возникает естественное отображение из множества всех перестановок S_n размерности $n = |X|$ во множество максимальных фрагментов фрагментарной структуры. Очевидно это отображение является сюръективным.

Пусть задана фрагментарная структура $E = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ на конечном множестве X. Пусть определена монотонная по включению функция-критерий

$f: E \to R^1$, которая каждому допустимому фрагменту ставит в соответствие некоторое вещественное число, т.е. $\forall E_i, E_j \in E$ из условия $E_i \subseteq E_j$ следует, что $f(E_i) \le f(E_j)$ или $f(E_i) \ge f(E_j)$.

Одним из способов задания подобной функции является аддитивный, а именно каждому элементу множества $x \in X$ ставится в соответствие неотрицательное число (вес) $w(x) \ge 0$. Функция $f(E)$ определяется соотношением $f(E) = \sum_{x \in E} w(x)$.

Задача оптимизации на фрагментарной структуре заключается в отыскании допустимого фрагмента с максимальным значением критерия. Очевидно, оптимальным решением этой задачи будет один из максимальных фрагментов. По крайней мере, максимальный фрагмент всегда имеется среди оптимальных решений. Отметим, что условие максимальности фрагмента может быть обязательным в задаче оптимизации и без дополнительных предположений о целевой функции.

Из приведенных результатов следует, что любую задачу оптимизации на фрагментарной структуре можно свести к комбинаторной задаче оптимизации на множестве перестановок размерности *n*.

ФРАГМЕНТАРНАЯ СТРУКТУРА ЗАДАЧИ ЗЕМЛЕПОЛЬЗОВАНИЯ НА ГИПЕРГРАФАХ

В [7] показано, что задачу землепользования в простейшей постановке на графах можно рассматривать как задачу оптимизации на фрагментарной структуре. Покажем теперь, что математическая модель задачи землепользования на гиперграфах также имеет фрагментарную структуру.

Пусть задан взвешенный *t*-дольный *r*-однородный гиперграф $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и множеством ребер $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, который является математической моделью задачи землепользования. В качестве элементарных фрагментов рассмотрим все одноэлементные множества вида $\{e\}$ ($e \in E$ — ребро гиперграфа *G*).

Допустимыми фрагментами являются любые допустимые покрытия звездами гиперграфа *G*, рассматриваемые как объединения ребер этого покрытия. Причем весом фрагмента будем считать сумму весов ребер покрытия.

Согласно свойствам фрагментарных структур оптимальное решение задачи землепользования достигается на максимальном фрагменте фрагментарной структуры. Если веса ребер гиперграфа положительны, $\forall e \in E \; w(e) > 0$, то любое оптимальное решение задачи можно получить, применив фрагментарный алгоритм к некоторой перестановке элементарных фрагментов.

Фрагментарный алгоритм в рассматриваемом случае строит допустимое покрытие гиперграфа звездами следующим образом:

— выбирается перестановка ребер гиперграфа $(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m})$, которая определяет их порядок;

— на начальном шаге выбирается пустое множество $Z_0 = \varnothing$;

— на шаге с номером $k+1$ выбирается первое по заданному порядку ребро $e \in E \setminus Z_k$, которое либо является лучем уже существующей звезды, либо множество вершин этого ребра не пересекается с множеством вершин выбранных ребер. Это ребро добавляется в имеющееся построенное покрытие $Z_{k+1} = Z_k \bigcup \{e\}$;

— алгоритм завершает работу, если на очередном шаге не удалось найти ребро $e \in E \setminus Z_k$ с требуемым свойством.

Очевидно вычислительная сложность такого алгоритма линейна по числу ребер гиперграфа *G*.

Наличие фрагментарной структуры в задаче землепользования на гиперграфах позволяет предложить ряд гибридных алгоритмов поиска ее приближенного решения. Каждый такой алгоритм является комбинацией одной из известных метаэвристик поиска оптимальной перестановки и фрагментарного алгоритма.

В качестве примера такой метаэвристики рассмотрим алгоритм муравьиной колонии на перестановках [8, 9].

Процедура вычисления будет состоять из ряда этапов расчета. Каждый путь муравья определяется перестановкой $s = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ номеров ребер гиперграфа. У каждого муравья формируется список уже посещенных позиций — список запретов. Обозначим $J_{i,k}^q$ список позиций, которые на этапе с номером q необходимо посетить k-му муравью, находящемуся в позиции i.

Муравьи обладают «обонянием» — они могут улавливать след феромона, подтверждающий желание муравья пройти из позиции i в позицию j на основании опыта других муравьев. Количество феромона на этапе с номером q при переходе из позиции i в позицию j определяется величиной $\tau_{ij}(q)$. На начальном этапе это количество можно задавать произвольно.

Вероятность перехода k-го муравья из позиции i в позицию j на этапе с номером q определяется соотношением

$$P_{ij,k}(q) = \begin{cases} \dfrac{[\tau_{ij}(q)]^\alpha}{\sum\limits_{l \in J_{i,k}^t} [\tau_{il}(q)]^\alpha}, & j \in J_{i,k}^q, \\ 0, & j \notin J_{i,k}^q, \end{cases}$$

где α — параметр, задающий вес следа феромона. Количество откладываемого феромона определяется по формуле

$$\Delta\tau_{ij,k}(q) = \begin{cases} \dfrac{Q}{L_k(q)}, & (i, j) \in T_k(q), \\ 0, & (i, j) \notin T_k(q), \end{cases}$$

где Q — положительный параметр, $L_k(q)$ — вес допустимого покрытия гиперграфа звездами, полученного на этапе с номером q. Это покрытие можно получить, применив фрагментарный алгоритм к перестановке ребер, соответствующей маршруту k-го муравья на этапе с номером q. Изменение количества феромона определяется выражением

$$\tau_{ij}(q+1) = (1-p) \cdot \tau_{ij}(q) + \sum_{k=1}^{m} \Delta\tau_{ij,k}(q),$$

где m — количество муравьев, p — коэффициент «испарения», $0 \le p \le 1$.

Алгоритм завершает работу, когда выполнено некоторое правило остановки, например, пройдено заданное число этапов. Минимальная по значению функции $L_k(q)$ перестановка, найденная на последнем этапе, преобразуется в решение задачи землепользования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что задача землепользования, рассматриваемая как задача оптимизации на гиперграфах, является задачей оптимизации на фрагментарной структуре. Фактически задача сводится к задаче комбинаторной оптимизации на перестановках с определенным видом целевой функции. Таким образом, к задаче землепользования на гиперграфах можно применить весь арсенал гибридных метаэвристик, которые исследовались в [7], в частности, локальный алгоритм, эволюционный алгоритм на перестановках, алгоритм муравьиной колонии и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Максишко Н.К., Перепелица В.А, Заховалко Т.В. Теоретико-графовая эколого-экономическая модель задачи землепользования. *Вісн. Східноукраїнського національного ун-ту ім. В. Даля*. 2002. № 2 (48). С. 92–100.
2. Максишко Н.К., Заховалко Т.В. Моделі та методи розв'язання прикладних задач покриття на графах та гіперграфах. Запорожье: Полиграф, 2009. 244 с.
3. Перепелица В.А., Сергиенко И.В. Исследование одного класса целочисленных многокритериальных задач. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1988. 28(3). С. 63–75.
4. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. Киев: Наук. думка, 1988. 472 с.
5. Заховалко Т.В., Максишко Н.К., Перепелица В.А. Моделирование задачи землепользования на гиперграфах. *Систем. дослідж. та інформ. технології*. 2006. № 3. С. 99–109.
6. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. Москва: Наука, 1990. 384 с.
7. Kozin I.V., Maksyshko N.K., Perepelitsa V.A. Fragmentary structures in discrete optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 6. P. 931–936. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9995-6.
8. Dorigo M. Optimization, learning, and natural algorithms. PhD Thesis, Dipartimento di Elettronica, Politechnico Di Milano, 1992. 140 p.
9. Штовба С.Д. Муравьиные алгоритмы: теория и применение. *Программирование*. 2005. № 4. С. 1–16.

Надійшла до редакції 09.12.2019

І.В. Козін, Н.К. Максишко, В.О. Перепелиця

ФРАГМЕНТАРНА МОДЕЛЬ ДЛЯ ЗАДАЧІ ЗЕМЛЕКОРИСТУВАННЯ НА ГІПЕРГРАФАХ

Анотація. Розглянуто математичну модель задачі землекористування на гіперграфах. Показано, що в межах цієї моделі задачу можна сформулювати як задачу оптимізації на фрагментарній структурі. До того ж сама задача пошуку оптимального розв'язку зводиться до задачі безумовної комбінаторної оптимізації на множині переставлень. Запропоновано варіант гібридного алгоритму пошуку наближених розв'язків задачі на основі комбінації фрагментарного алгоритму та алгоритму мурашиної колонії.

Ключові слова: задача землекористування, гіперграф, фрагментарна структура, комбінаторна оптимізація, алгоритм мурашиної колонії.

I.V. Kozin, N.K. Maksyshko, V.A. Perepelitsa

A FRAGMENTED MODEL FOR THE PROBLEM OF LAND USE ON HYPERGRAPHS

Abstract. The paper considers a mathematical model of the land use problem on hypergraphs. It is shown that, within the framework of this model, the problem can be formulated as an optimization problem on a fragmented structure. Moreover, the problem of finding the optimal solution itself reduces to the problem of unconditional combinatorial optimization on a set of permutations. A variant of a hybrid algorithm for finding approximate solutions to the problem based on a combination of a fragmented algorithm and an ant colony algorithm is proposed.

Keywords: land use problem, hypergraph, fragmentary structure, combinatorial optimization, evolutionary algorithm, ant colony algorithm.

Козин Игорь Викторович,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры Запорожского национального университета,
e-mail: ainc00@gmail.com.

Максишко Наталия Константиновна,
доктор эконом. наук, профессор, заведующая кафедрой Запорожского национального университета,
e-mail: maxishko@ukr.net.

Перепелица Виталий Афанасьевич,
доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры Запорожского национального университета,
e-mail: perepel2@yandex.ru.