

## НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ КОНСОЛИДАЦИОННОЙ ДИНАМИКИ В РАМКАХ БИПАРАБОЛИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ЕЕ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО АНАЛОГА

**Аннотация.** Рассмотрены вопросы математического моделирования динамических процессов фильтрационной консолидации насыщенных геопористых сред в рамках неклассических математических моделей, основу которых составляют бипараболическое эволюционное уравнение и его дробно-дифференциальный аналог. Выполнены постановки и найдены регуляризованные решения обратных ретроспективных задач теории консолидации согласно указанным моделям. Получены оценки сходимости регуляризованных решений и приведены результаты численных экспериментов.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, неклассические модели, фильтрационно-консолидационные процессы, динамика, обратные задачи, бипараболическое эволюционное уравнение, дробно-дифференциальный аналог.

### ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1], классическая математическая модель динамики процесса фильтрационной консолидации геопористых сред построена на уравнении параболического типа

$$\Delta u \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} - C_v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) = 0, \quad (1)$$

где  $u = p/\gamma$  — избыточный напор,  $p$  — поровое давление,  $\gamma$  — удельный вес жидкости,  $C_v$  — коэффициент консолидации.

Несмотря на то что уравнение (1) является основным модельным уравнением теории фильтрационной консолидации, в нем постулированы такие весьма жесткие ограничения, как бесконечная скорость распространения возмущений и линейная зависимость скорости от градиента давления. При нарушении этих условий указанное уравнение недостаточно корректно описывает процессы переноса и приводит к ряду известных парадоксов [2, 3]. Более общее уравнение, подходящее для описания процессов консолидации водонасыщенных геопористых массивов с учетом ползучести скелета, получено в работе [4] и имеет вид

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t} = C_v \left( \gamma + \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (2)$$

где  $a, b, \gamma, C_v$  — известные [4, 5] постоянные,  $f$  — заданная функция источника.

Отметим, что модельные уравнения вида (1), (2), применяемые для описания соответствующих процессов консолидации, трудно объяснить с теоретико-групповой точки зрения, поскольку они не имеют необходимых симметричных свойств [6]. В связи с этим в работе [7] для более корректного описания процессов переноса предложена математическая модель, основанная на бипараболическом эволюционном уравнении

$$\Delta u(x, t) + \tau_r \Lambda^2 u(x, t) = f(x, t), \quad (3)$$

где  $\tau_r$  — действительный параметр,  $\Lambda^2 = \Delta \Delta$ .

Данное уравнение, как отмечается в [7], инвариантно относительно группы Галилея  $G(1,3)$  и поэтому может быть использовано для описания тепловых и диффузионных процессов, не зависящих от того, в каких инерциальных системах они наблюдаются.

Бипараболическая математическая модель для описания динамики процессов фильтрационной консолидации водонасыщенных грунтовых массивов под действием приложенных внешних нагрузок введена в [8] и соответствует таким законам фильтрации и уплотнения:

$$\bar{v} = -\frac{k}{\gamma} \nabla(p + \tau_r \Lambda p), \quad \varepsilon = \varepsilon_0 - a(\sigma - p - \tau_r \Lambda p), \quad (4)$$

где  $k > 0$  — коэффициент фильтрации пористой среды,  $\bar{v}$  — скорость фильтрации,  $\varepsilon$  — коэффициент пористости ( $\varepsilon_0$  — начальный коэффициент пористости),  $a$  — коэффициент сжимаемости при компрессии,  $\sigma$  — внешняя нагрузка,  $\tau_r > 0$  — действительный параметр (параметр релаксации).

Из уравнения неразрывности жидкой фазы [1, 4, 5] с учетом первого из соотношений (4) получаем уравнение консолидации полностью водонасыщенного геопористого массива ( $\varepsilon_{cp}$  — среднее значение коэффициента пористости)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = k(1 + \varepsilon_{cp}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u + \tau_r \Lambda u)$$

или с учетом второго из условий (4) имеем бипараболическое консолидационное уравнение для функции избыточного напора  $u(x, t)$

$$(\Lambda + \tau_r \Lambda^2) u(x, t) = 0. \quad (5)$$

Модель консолидации, имеющую в основе уравнение вида (5), в дальнейшем будем называть бипараболической консолидационной моделью [8, 9]. В рамках этой модели рассмотрим задачу о консолидации геопористого массива мощности  $l$  (расположенного на проницаемом основании и имеющего проницаемую верхнюю грань) под действием мгновенно приложенной нагрузки постоянной интенсивности  $q$ . В математической постановке задача сводится [10] к определению функции избыточного напора  $u(x, t)$  из решения краевой задачи

$$(\Lambda + \tau_r \Lambda^2) u(x, t) = 0 \quad (0 < x < l, \quad 0 < t < T), \quad (6)$$

$$u(0, t) = u''_{xx}(0, t) = 0, \quad u(l, t) = u''_{xx}(l, t) = 0, \quad (7)$$

$$u(x, 0) = \frac{q}{\gamma} \equiv u_0, \quad u'_t(x, 0) = 0. \quad (8)$$

Вводя в рассмотрение безразмерные переменные и параметры соотношениями

$$x' = \frac{x}{l}, \quad t' = \frac{t}{T}, \quad \tau'_r = \frac{\tau_r}{T}, \quad C'_v = \frac{C_v T}{l^2}, \quad u' = \frac{u}{u_0}$$

и опуская в дальнейшем знак «штрих» над безразмерными величинами, записываем задачу (6)–(8) в виде

$$\tau_r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - C_v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( 1 + 2\tau_r \frac{\partial}{\partial t} \right) u + \tau_r C_v^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (0 < x < 1, \quad t > 0), \quad (9)$$

$$u(0, t) = u''_{xx}(0, t) = 0, \quad u(1, t) = u''_{xx}(1, t) = 0, \quad (10)$$

$$u(x, 0) = 1, \quad u'_t(x, 0) = 0. \quad (11)$$

Применяя к (9)–(11) оператор конечного синус-преобразования Фурье вида

$$\hat{u}_n(t) = \int_0^1 u(x, t) \sin(\lambda_n x) dx \quad (\lambda_n = \pi n, \quad n = 1, 2, \dots), \quad (12)$$

сводим рассматриваемую краевую задачу к построению ограниченного на  $[0, +\infty)$  решения задачи Коши

$$\tau_r \frac{d^2}{dt^2} \hat{u}_n(t) + \nu_n^{(1)} \frac{d}{dt} \hat{u}_n(t) + \nu_n^{(2)} \hat{u}_n(t) = 0, \quad (13)$$

$$\hat{u}_n(0) = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{\lambda_n}, \quad \frac{d}{dt} \hat{u}_n(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (14)$$

где

$$\nu_n^{(1)} = 1 + 2\tau_r C_v \lambda_n, \quad \nu_n^{(2)} = C_v \lambda_n (1 + \tau_r C_v \lambda_n). \quad (15)$$

Решение задачи (13)–(15) запишем в виде

$$\hat{u}_n(t) = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{\lambda_n} \left[ 1 + \tau_r C_v \lambda_n^2 \left( 1 - e^{-t/\tau_r} \right) \right] e^{-\lambda_n^2 C_v t}. \quad (16)$$

Тогда, возвращаясь в область оригиналов преобразования Фурье (12), получаем из (16) решение рассматриваемой задачи в виде [10]

$$u(x, t) = u_c(x, t) + 4\tau_r C_v \left( 1 - e^{-t/\tau_r} \right) \sum_{n=1,3,5,\dots} \lambda_n e^{-\lambda_n^2 C_v t} \sin(\lambda_n x),$$

где

$$u_c(x, t) = 4 \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{\lambda_n} e^{-\lambda_n^2 C_v t} \sin(\lambda_n x) \quad (\lambda_n = \pi n, \quad n \in N)$$

является решением соответствующей консолидационной задачи в рамках классической модели консолидации, основанной на уравнении (1).

Рассматривая далее случай массива, находящегося на непроницаемом основании, отметим, что соответствующие этому случаю граничные условия записываются в виде

$$u(0, t) = u''_{xx}(0, t) = 0, \quad u'_x(1, t) = u'''_{xxx}(1, t) = 0 \quad (17)$$

и решение краевой задачи (9), (17), (11) можно получить аналогично изложенному выше на основе конечного преобразования Фурье вида (12), где  $\lambda_n = \frac{\pi(2n-1)}{2}$ ,  $n \in N$ . Опуская промежуточные выкладки, окончательно получаем решение задачи в виде [10]

$$u(x, t) = u_{cn}(x, t) + 2\tau_r C_v \left( 1 - e^{-t/\tau_r} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n^2 C_v t} \sin(\lambda_n x),$$

где  $u_{cn}(x, t)$  — решение задачи консолидации массива, расположенного на непроницаемом основании, в рамках классической консолидационной модели

$$u_{cn}(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} e^{-\lambda_n^2 C_v t} \sin(\lambda_n x) \quad (\lambda_n = \frac{\pi(2n-1)}{2}, \quad n \in N).$$

На рис. 1 приведены кривые распределения избыточных напоров (в безразмерных переменных) в фиксированный момент времени для случая массива единичной мощности с проницаемой верхней гранью, расположенного на непрони-

цаемом основании. Эти кривые соответствуют следующим моделям консолидации: классической модели Терцаги (кривая 1), определяемой уравнением (1); модели Флорина с учетом ползучести скелета грунта (кривая 3), определяемой уравнением (2); бипараболической модели консолидации (кривая 2), определяемой уравнением (6). Результаты расчетов показывают, что бипараболическая консолидационная модель в некотором смысле является промежу-

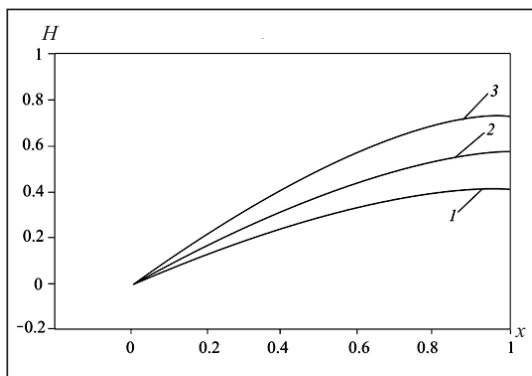


Рис. 1

точной между двумя другими моделями, поскольку обуславливает напоры, меньшие, чем в модели Флорина, но большие, чем в классической модели Терцаги.

В целях дальнейшего развития теории фильтрационной консолидации геопористых сред, базирующейся на бипараболической математической модели, актуально проведение исследований, в частности, в следующих направлениях:

- постановка и решение обратных задач теории фильтрационной консолидации в рамках бипараболической математической модели;
- обобщение бипараболической математической модели консолидации с учетом нелокальных во времени эффектов с помощью построения ее дробно-дифференциального аналога;
- постановка и решение обратных задач теории консолидации для дробно-дифференциального аналога бипараболической консолидационной модели.

Далее излагаются некоторые из полученных результатов.

#### ОБРАТНАЯ РЕТРОСПЕКТИВНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ БИПАРАБОЛИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ

Рассмотрим задачу восстановления начального распределения избыточного напора  $u(x,0)$  в уплотняющемся водонасыщенном геопористом массиве единичной мощности по заданному конечному значению напора  $u(x,T)$  при следующих условиях:

$$(\Lambda + \tau_r \Lambda^2)u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (18)$$

$$u(0, t) = u''_{xx}(0, t) = 0, \quad u(1, t) = u''_{xx}(1, t) = 0, \quad (19)$$

$$u(x, T) = g(x), \quad u'_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (20)$$

где  $\Lambda = \frac{\partial}{\partial t} - C_v \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ,  $\Lambda^2 = \Lambda \Lambda$ ,  $\Omega = (0,1)$ ,  $g(x)$  — заданная функция,  $g(x) \in L^2(\Omega)$ .

Применяя к (18)–(20) конечное интегральное преобразование Фурье по геометрической переменной  $x$  вида

$$u_n(t) = \int_0^1 u(x, t) \varphi_n(x) dx, \quad (21)$$

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin(\sqrt{\lambda_n} x), \quad \sqrt{\lambda_n} = n\pi, \quad n \in N, \quad (22)$$

а затем к полученной задаче — преобразование Лапласа по временной пере-

менной  $t$ , находим

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \varphi_n(x),$$

где

$$u_n(t) = g_n \mu_n(t) e^{-\lambda_n C_v (t-T)},$$

$$\mu_n(t) = \frac{v_n(t)}{v_n(T)}, \quad v_n(t) = 1 + \tau_r C_v \lambda_n \left( 1 - e^{-t/\tau_r} \right),$$

$$g_n = (g(x), \varphi_n(x)) = \int_0^1 g(x) \varphi_n(x) dx.$$

Отсюда, поскольку при условии  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = A \neq 0$  имеем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(0) = A \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{C_v \lambda_n T}}{1 + \tau_r C_v \lambda_n \left( 1 - e^{-(T/\tau_r)} \right)} = \infty,$$

следует, что задача отыскания  $u(x, 0)$  некорректна в смысле Адамара. Далее построим регуляризованное решение обратной ретроспективной задачи, базирываясь на методах регуляризации Тихонова [11, 12].

Применив модифицированную версию метода квазиграничных значений [13], вместо (18)–(20) рассмотрим регуляризованную задачу вида

$$(\Lambda + \tau_r \Lambda^2) u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (23)$$

$$u(0, t) = u''_{xx}(0, t) = 0, \quad u(1, t) = u''_{xx}(1, t) = 0, \quad (24)$$

$$u(x, T) - \beta u''_{xx}(x, 0) = g(x), \quad u'_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (25)$$

где  $\beta > 0$  — параметр регуляризации.

Аналогично изложенному выше из (23), (24) получаем

$$u_n(t) = c_n v_n(t) e^{-\lambda_n C_v t} \quad (c_n = \text{const}). \quad (26)$$

Поскольку из (26) имеем

$$u_n(0) = c_n, \quad u_n(T) = c_n v_n(T) e^{-\lambda_n C_v T}, \quad (27)$$

из (25) с учетом соотношений (27) получаем

$$c_n = \frac{g_n}{v_n(T) e^{-\lambda_n C_v T} + \beta \lambda_n}$$

и, следовательно,

$$u_n(t) = \frac{g_n v_n(t) e^{-\lambda_n C_v t}}{v_n(T) e^{-\lambda_n C_v T} + \beta \lambda_n}.$$

На основании данных соотношений решение рассматриваемой регуляризованной задачи запишем в виде

$$u_\beta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n v_n(t) e^{-\lambda_n C_v t}}{v_n(T) e^{-\lambda_n C_v T} + \beta \lambda_n} \varphi_n(x). \quad (28)$$

Остановимся на вопросе оценки сходимости метода при априорном правиле выбора параметра регуляризации. Рассмотрим пространство  $L^2(\Omega)$  со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$  и пространство Соболева  $H^\ell(\Omega)$  [13–15]. Пусть  $u_\beta^\delta(x, t)$  —

регуляризованное решение, соответствующее данным  $g^\delta(x)$ , причем  $\|g^\delta(x) - g(x)\| \leq \delta$ , где  $\|g\| := \|g\|_{L^2(\Omega)}$ ,  $\delta > 0$  — уровень шума.

Исходя из неравенства треугольника [15] в виде

$$\|u_\beta^\delta(x, 0) - u(x, 0)\| \leq \|u_\beta^\delta(x, 0) - u_\beta(x, 0)\| + \|u_\beta(x, 0) - u(x, 0)\|, \quad (29)$$

для первого слагаемого в правой части (29), с учетом соотношения (28) имеем

$$\begin{aligned} \|u_\beta^\delta(x, 0) - u_\beta(x, 0)\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n^\delta - g_n}{v_n(T)e^{-\lambda_n C_v T} + \beta \lambda_n} \varphi_n(x) \right\|^2 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(v_n(T)e^{-\lambda_n C_v T} + \beta \lambda_n)^2} (g_n^\delta - g_n)^2 \leq \delta^2 \left( \sup_{n \in N} G(n) \right)^2, \end{aligned} \quad (30)$$

где  $G(n) = \frac{1}{v_n(T)e^{-\lambda_n C_v T} + \beta \lambda_n}$ .

Поскольку

$$G(n) \leq \frac{1}{e^{-\lambda_n C_v T} + \beta \lambda_n} \leq \frac{C_v T}{\beta \left( 1 + \ln \left( \frac{C_v T}{\beta} \right) \right)},$$

из (30) получаем

$$\|u_\beta^\delta(x, 0) - u(x, 0)\| \leq C_v T \frac{\delta}{\beta \left( 1 + \ln \left( \frac{C_v T}{\beta} \right) \right)}. \quad (31)$$

Для второго слагаемого в правой части (29) имеем

$$\begin{aligned} \|u_\beta(x, 0) - u(x, 0)\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta \lambda_n}{v_n(T)e^{-\lambda_n C_v T} (v_n(T)e^{-\lambda_n C_v T} + \beta \lambda_n)} g_n \varphi_n(x) \right\|^2 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\beta}{v_n(T)e^{-\lambda_n C_v T} + \beta \lambda_n} \right)^2 \left( \frac{g_n \lambda_n}{v_n(T)e^{-\lambda_n C_v T}} \right)^2 \leq \\ &\leq \left( \sup_{n \in N} Q(n) \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{g_n}{v_n(T)e^{-\lambda_n C_v T}} \right)^2 \lambda_n^2 = \left( \sup_{n \in N} Q(n) \right)^2 \|u(x, 0)\|_{H^2(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (32)$$

где  $Q(n) = \frac{\beta}{v_n(T)e^{-\lambda_n C_v T} + \beta \lambda_n}$ .

Так как  $Q(n) \leq \frac{C_v T}{1 + \ln \left( \frac{C_v T}{\beta} \right)}$ , из (32) находим

$$\|u_\beta(x, 0) - u(x, 0)\| \leq \frac{C_v T}{1 + \ln \left( \frac{C_v T}{\beta} \right)} \|u(x, 0)\|_{H^2(\Omega)}. \quad (33)$$

Подставляя (31), (33) в соотношение (29), имеем оценку

$$\|u_\beta^\delta(x, 0) - u(x, 0)\| \leq \frac{C_v T}{1 + \ln \left( \frac{C_v T}{\beta} \right)} \left( \frac{\delta}{\beta} + \|u(x, 0)\|_{H^2(\Omega)} \right).$$

Отсюда при выполнении неравенства  $\|u(x, 0)\|_{H^2(\Omega)} \leq E$  ( $E = \text{const} > 0$ ) получаем

$$\|u_{\beta}^{\delta}(x, 0) - u(x, 0)\| \leq \frac{C_v T}{1 + \ln\left(\frac{C_v T}{\beta}\right)} \left(E + \frac{\delta}{\beta}\right). \quad (34)$$

Если, например, положить значение параметра регуляризации равным  $\beta = \sqrt{\delta/E}$ , то оценка (34) примет вид

$$\|u_{\beta}^{\delta}(x, 0) - u(x, 0)\| \leq \frac{C_v T}{1 + \ln\left(C_v T \sqrt{\frac{E}{\delta}}\right)} \sqrt{E} (\sqrt{E} + \sqrt{\delta}).$$

#### ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ОБОБЩЕНИЕ БИПАРАБОЛИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ

Известно, что эффективный подход в описании процессов переноса в системах, для которых важен учет нелокальных пространственно-временных свойств, связан с использованием формализма интегро-дифференцирования нецелого порядка [16–19]. Поскольку во многих случаях систем со сложной пространственно-временной структурой математические модели процессов переноса базируются на тех или иных дробно-дифференциальных уравнениях, они описывают процессы, являющиеся нелокальными во времени и (или) пространстве. К таким процессам, например, относятся некоторые процессы, имеющие место в высокоэнергетической плазме, процессы переноса во фрактальных средах и аморфных полупроводниках, полимерах, биологических системах, случайных и разреженных структурах и др. [20].

Проявляющиеся в сложных горно-геологических условиях эффекты нелокальности обусловлены рядом причин объективного характера (сложностью структуры среды, микронеоднородностью, кавернозностью среды). Попытки учета некоторых из аномальных эффектов в задачах математического моделирования фильтрационно-консолидационной динамики геомиграционных процессов привели к появлению новых (дробно-дифференциальных) математических моделей теории фильтрационной консолидации водонасыщенных геопористых сред, в частности в условиях сильной временной нелокальности [21, 22]. Далее кратко излагается построение нового (дробно-дифференциального [23]) обобщения известной [8] бипараболической математической модели процесса фильтрационной консолидации водонасыщенных геопористых сред, предназначенного для моделирования динамики более широкого класса консолидационных процессов под действием приложенных нагрузок, чем описание этой динамики согласно модели работ [8, 9].

Распространяя законы фильтрации и уплотнения (4) на случай учета временной нелокальности процесса, записываем определяющие соотношения модели в виде

$$\bar{v} = -\frac{k}{\gamma} \nabla(p + \tau_r \Lambda_C p), \quad \varepsilon = \varepsilon_0 - a(\sigma - p - \tau_r \Lambda_C p), \quad (35)$$

где  $\Lambda_C = D_t^{(\alpha)} - C_v \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ,  $D_t^{(\alpha)}$  — оператор дробной производной Капуто–Герасимова [18, 19] по переменной  $t$  порядка  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ), при этом сохранены введенные выше обозначения. Тогда из дробно-дифференциального аналога уравнения неразрывности

$$\frac{1}{1 + \varepsilon_{\text{ср}}} D_t^{(\alpha)} \varepsilon = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u + \tau_r \Lambda_C u)$$

с учетом второго из соотношений (35) получаем уравнение дробно-дифференциальной математической модели теории консолидации водонасыщенных геопористых сред в виде

$$(\Lambda_C + \tau_r \Lambda_C \Lambda_C)u(x, t) = 0, \quad (36)$$

где  $u = u(x, t)$  — избыточный (сверх гидростатического) напор. При этом из (36) для  $\alpha \rightarrow 1$  как частный случай получаем бипараболическое консолидационное уравнение (5).

Отметим, что некоторые краевые задачи, касающиеся моделирования консолидационной динамики массивов конечной мощности в рамках дробно-дифференциального аналога консолидационной модели, базирующейся на уравнении (36), поставлены и решены в [23]. Здесь рассмотрим (для указанной модели) пример постановки и изложим методику решения простейшей обратной консолидационной задачи.

#### ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОБОБЩЕНИЯ БИПАРАБОЛИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ

Для дробно-дифференциального обобщения бипараболической математической модели фильтрационной консолидации рассмотрим задачу восстановления начального распределения избыточного напора  $u(x, 0)$  по заданному конечному его распределению  $u(x, T)$  при уплотнении водонасыщенного геопористого массива единичной мощности с проницаемой верхней гранью, расположенного на непроницаемом основании (т.е. при сохранении принятых выше граничных условий (19)). Таким образом, имеем задачу

$$(\Lambda_C + \tau_r \Lambda_C \Lambda_C)u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (37)$$

$$u(0, t) = u''_{xx}(0, t) = 0, \quad u(1, t) = u''_{xx}(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (38)$$

$$u(x, T) = g(x), \quad D_t^{(\alpha)}u(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (39)$$

где  $g(x)$  — заданная функция ( $g(x) \in L^2(\Omega)$ ).

Заменив первое из условий (39) соотношением  $u(x, 0) = \rho(x)$  и применив к краевой задаче конечное интегральное преобразование Фурье по геометрической переменной вида (21), (22), получим

$$\tau_r D_t^{(\alpha)} D_t^{(\alpha)} u_n(t) + (1 + 2\tau_r C_v \lambda_n) D_t^{(\alpha)} u_n(t) + C_v \lambda_n (1 + \tau_r C_v \lambda_n) u_n(t) = 0, \quad (40)$$

$$u_n(0) = \rho_n, \quad D_t^{(\alpha)} u_n(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (41)$$

где  $\rho_n = (\rho, \varphi_n)$ .

Решая задачу (40), (41), получаем [23]

$$u_n(t) = \rho_n \left\{ (1 + \tau_r C_v \lambda_n) E_\alpha(-C_v \lambda_n t^\alpha) - \tau_r C_v \lambda_n E_\alpha \left[ - \left( \frac{1}{\tau_r} + C_v \lambda_n \right) t^\alpha \right] \right\},$$

где  $E_\alpha(z)$  — однопараметрическая функция Миттаг-Леффлера [24]. На основании первого из условий (39) находим

$$\rho_n = \frac{(g, \varphi_n)}{(1 + \tau_r C_v \lambda_n) E_\alpha(-C_v \lambda_n T^\alpha) - \tau_r C_v \lambda_n E_\alpha \left[ - \left( \frac{1}{\tau_r} + C_v \lambda_n \right) T^\alpha \right]}.$$



С учетом последнего соотношения решение задачи (37)–(39) в образах Фурье принимает вид

$$u_n(t) = g_n \eta_n(t) \frac{E_\alpha(-\lambda_n C_v t^\alpha)}{E_\alpha(-\lambda_n C_v T^\alpha)}, \quad (42)$$

где

$$g_n = (g, \varphi_n), \quad \eta_n(t) = \frac{s_n(t)}{s_n(T)}, \quad s_n(t) = 1 + \tau_r C_v \lambda_n \left\{ 1 - \frac{E_\alpha \left[ - \left( \frac{1}{\tau_r} + C_v \lambda_n \right) t^\alpha \right]}{E_\alpha(-C_v \lambda_n t^\alpha)} \right\}. \quad (43)$$

Переходя в область оригиналов преобразования Фурье, с учетом соотношений (42), (43) окончательно получаем решение рассматриваемой задачи в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (g, \varphi_n) \eta_n(t) \frac{E_\alpha(-\lambda_n C_v t^\alpha)}{E_\alpha(-\lambda_n C_v T^\alpha)} \varphi_n(x). \quad (44)$$

Следовательно, из (44) имеем

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \varphi_n(x),$$

$$u_n(0) = \frac{g_n \eta_n(0)}{E_\alpha(-\lambda_n C_v T^\alpha)} = \frac{g_n}{s_n(T) E_\alpha(-\lambda_n C_v T^\alpha)} \quad (n \in N). \quad (45)$$

Отметим, что поскольку из (45) вытекает соотношение

$$g_n = s_n(T) E_\alpha(-\lambda_n C_v T^\alpha) (f, \varphi_n) \quad (n \in N),$$

задача определения  $f(x) := u(x, 0)$  при заданном  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \varphi_n(x)$  сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода

$$(Kf)(x) = \int_0^1 f(\xi) k(x, \xi) d\xi = g(x), \quad x \in \Omega,$$

где

$$k(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) E_\alpha(-\lambda_n C_v T^\alpha) \varphi_n(\xi) \varphi_n(x).$$

Основываясь на методах регуляризации Тихонова [11, 12] с использованием подхода квазиграничных значений [13], рассмотрим краевую задачу

$$(\Lambda_C + \tau_r \Lambda_C \Lambda_C) u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (46)$$

$$u(0, t) = u''_{xx}(0, t) = 0, \quad u(1, t) = u''_{xx}(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (47)$$

$$u(x, T) - \beta u''_{xx}(x, 0) = g(x), \quad D_1^{(\alpha)} u(x, 0) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad (48)$$

где  $\beta > 0$  — параметр регуляризации.

Аналогично изложенному выше можно показать, что решение регуляризованной задачи (46)–(48) имеет вид

$$u_\beta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n s_n(t) E_\alpha(-\lambda_n C_v t^\alpha)}{s_n(T) E_\alpha(-\lambda_n C_v T^\alpha) + \beta \lambda_n} \varphi_n(x). \quad (49)$$

Соотношение (49) позволяет определить функцию начального напора в виде

$$u_\beta(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{s_n(T) E_\alpha(-\lambda_n C_v T^\alpha) + \beta \lambda_n} \varphi_n(x). \quad (50)$$

Получим соответствующие оценки сходимости при выборе параметра регуляризации  $\alpha$  priori. Пусть имеют место соотношения  $\|u(x,0)\|_{H^2(\Omega)} \leq E$ ,  $\|g^\delta(x) - g(x)\| \leq \delta$  ( $E, \delta = \text{const} > 0$ ). Тогда с учетом (45), (50) имеем

$$\begin{aligned} & \|u_\beta(x,0) - u(x,0)\|^2 = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\beta}{s_n(T)E_\alpha(-\lambda_n C_v T^\alpha) + \beta\lambda_n} \right)^2 \left( \frac{g_n}{s_n(T)E_\alpha(-\lambda_n C_v T^\alpha)} \right)^2 \lambda_n^2 \leq \\ & \leq \left( \sup_{n \in N} \Phi(n) \right)^2 \|u(x,0)\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \left( \sup_{n \in N} \Phi(n) \right)^2 E^2, \end{aligned} \quad (51)$$

где

$$\Phi(n) = \frac{\beta}{s_n(T)E_\alpha(-\lambda_n C_v T^\alpha) + \beta\lambda_n}.$$

На основании известных [18, 24] оценок для функции Миттаг-Леффлера имеем

$$\Phi(n) < \frac{\beta}{E_\alpha(-\lambda_n C_v T^\alpha) + \beta\lambda_n} \leq \frac{\beta\lambda_n}{\underline{c} + \beta\lambda_n^2} \leq C_1(\underline{c})\sqrt{\beta},$$

где  $\underline{c}, C_1(\underline{c}) = \text{const} > 0$ .

С учетом последнего неравенства из (51) находим

$$\|u_\beta(x,0) - u(x,0)\| \leq C_1(\underline{c})E\sqrt{\beta}. \quad (52)$$

Обозначив  $u_\beta^\delta(x,t)$  регуляризованное решение, соответствующее значению  $g^\delta(x)$ , получим

$$\begin{aligned} \|u_\beta^\delta(x,0) - u_\beta(x,0)\|^2 & = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{g_n^\delta - g_n}{s_n(T)E_\alpha(-\lambda_n C_v T^\alpha) + \beta\lambda_n} \right)^2 \leq \\ & \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{g_n^\delta - g_n}{E_\alpha(-\lambda_n C_v T^\alpha) + \beta\lambda_n} \right)^2 \leq \delta^2 \left( \sup_{n \in N} \Psi(n) \right)^2, \end{aligned} \quad (53)$$

где

$$\Psi(n) = \frac{1}{E_\alpha(-\lambda_n C_v T^\alpha) + \beta\lambda_n} \leq \frac{1}{\frac{\underline{c}}{\lambda_n} + \beta\lambda_n} \leq \frac{1}{2\sqrt{\underline{c}\beta}}. \quad (54)$$

На основании соотношений (53), (54) имеем

$$\|u_\beta^\delta(x,0) - u_\beta(x,0)\| \leq \frac{\delta}{2\sqrt{\underline{c}\beta}}. \quad (55)$$

Из неравенства треугольника (29) с учетом соотношений (52), (55) находим

$$\|u_\beta^\delta(x,0) - u(x,0)\| \leq C_1 E \sqrt{\beta} + C_2 \frac{\delta}{\sqrt{\beta}}, \quad (56)$$

где  $C_1 = C_1(\underline{c})$ ,  $C_2 = C_2(\underline{c}) = (2\sqrt{\underline{c}})^{-1}$ .

Если в (56) положить, например,  $\beta = \frac{\delta}{E}$ , то окончательно будем иметь оценку сходимости регуляризованного решения в виде

$$\|u_\beta^\delta(x,0) - u(x,0)\| \leq (C_1 + C_2)\sqrt{\delta E}.$$

В целях получения оценки сходимости регуляризованного решения в условиях выбора параметра регуляризации а posteriori применим аналогично [13] подход, основанный на использовании принципа расходимости Морозова [12] в следующей форме:

$$\|Ku_{\beta}^{\delta}(x,0) - g^{\delta}(x)\| = \tau\delta \quad (\tau > 1). \quad (57)$$

На основании методики работ [12, 13] легко устанавливается существование и единственность (при определенных условиях) решения уравнения (57). Действительно, введем в рассмотрение функцию  $\rho(\beta)$ , определенную соотношением

$$\rho(\beta) = \|Ku_{\beta}^{\delta}(\cdot,0) - g^{\delta}(\cdot)\| = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\beta\lambda_n}{s_n(T)E_{\alpha}(-\lambda_n C_v T^{\alpha}) + \beta\lambda_n} \right)^2 (g_n^{\delta})^2 \right]^{1/2}. \quad (58)$$

Нетрудно показать, что функция (58) обладает следующими свойствами:

- 1)  $\rho(\beta)$  — непрерывная функция аргумента  $\beta$  ( $\beta \in (0, +\infty)$ );
- 2)  $\lim_{\beta \rightarrow 0} \rho(\beta) = 0$ ,  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \rho(\beta) = \|g^{\delta}\|$ ;
- 3)  $\rho(\beta)$  — строго возрастающая на промежутке  $(0, +\infty)$  функция.

Очевидно, что наличие указанных свойств функции  $\rho(\beta)$  непосредственно обуславливает существование и единственность решения уравнения (57) при  $\|g^{\delta}\| > \tau\delta > 0$ .

Соответствующую оценку сходимости регуляризованного решения получим на основе неравенства треугольника

$$\|u_{\beta}^{\delta}(\cdot,0) - u(\cdot,0)\| \leq \|u_{\beta}^{\delta}(\cdot,0) - u_{\beta}(\cdot,0)\| + \|u_{\beta}(\cdot,0) - u(\cdot,0)\| \quad (59)$$

при учете оценок слагаемых в правой части данного соотношения.

Принимая во внимание соотношения (45), (50), предварительно находим

$$\begin{aligned} \|u_{\beta}(\cdot,0) - u(\cdot,0)\|_{H^2(\Omega)}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\beta\lambda_n}{s_n(T)E_{\alpha}(-\lambda_n C_v T^{\alpha}) + \beta\lambda_n} \right)^2 \times \\ &\times \left( \frac{g_n}{s_n(T)E_{\alpha}(-\lambda_n C_v T^{\alpha})} \right)^2 \lambda_n^2 \leq \left( \sup_{n \in N} R(n) \right)^2 \|u(\cdot,0)\|_{H^2(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (60)$$

где

$$R(n) = \frac{\beta\lambda_n}{s_n(T)E_{\alpha}(-\lambda_n C_v T^{\alpha}) + \beta\lambda_n}.$$

Поскольку  $\forall n \in N$  имеем  $s_n(T) \geq 1$ ,  $E_{\alpha}(\cdot) > 0$ , справедливо следующее неравенство:  $R(n) \leq 1$  ( $n \in N$ ). Тогда из (60) получаем

$$\|u_{\beta}(\cdot,0) - u(\cdot,0)\|_{H^2(\Omega)} \leq \|u(\cdot,0)\|_{H^2(\Omega)} \leq E.$$

Отсюда на основании результатов работы [13] имеем

$$\|u_{\beta}(\cdot,0) - u(\cdot,0)\| \leq C_* \sqrt{E\|g\|} \leq C_* \sqrt{\delta E} \quad (C_* = C_*(\alpha, T, \lambda_1)). \quad (61)$$

С учетом соотношений (55) и (61) из (59) находим

$$\|u_{\beta}^{\delta}(\cdot,0) - u(\cdot,0)\| \leq C_* \sqrt{\delta E} + \frac{\delta}{2\sqrt{c\beta}}. \quad (62)$$

Далее из (57) получаем

$$\begin{aligned} \tau\delta &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta\lambda_n}{s_n(T)E_\alpha(-\lambda_n C_v T^\alpha) + \beta\lambda_n} g_n^\delta \varphi_n(x) \right\| \leq \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta\lambda_n}{s_n(T)E_\alpha(-\lambda_n C_v T^\alpha) + \beta\lambda_n} (g_n^\delta - g_n) \varphi_n(x) \right\| + \\ &+ \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta\lambda_n}{s_n(T)E_\alpha(-\lambda_n C_v T^\alpha) + \beta\lambda_n} g_n \varphi_n(x) \right\| \leq \delta + J, \end{aligned} \quad (63)$$

где

$$\begin{aligned} J &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta\lambda_n}{s_n(T)E_\alpha(-\lambda_n C_v T^\alpha) + \beta\lambda_n} g_n \varphi_n(x) \right\| = \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta s_n(T)E_\alpha(-\lambda_n C_v T^\alpha)}{s_n(T)E_\alpha(-\lambda_n C_v T^\alpha) + \beta\lambda_n} \cdot \frac{g_n}{s_n(T)E_\alpha(-\lambda_n C_v T^\alpha)} \lambda_n \varphi_n(x) \right\| \leq \\ &\leq \sup_{n \in N} S(n) \|u(\cdot, 0)\|_{H^2(\Omega)} \leq \sup_{n \in N} S(n) \cdot E, \end{aligned} \quad (64)$$

а величина  $S(n)$  определяется соотношением

$$S(n) = \frac{\beta s_n(T)E_\alpha(-\lambda_n C_v T^\alpha)}{s_n(T)E_\alpha(-\lambda_n C_v T^\alpha) + \beta\lambda_n} \quad (n \in N).$$

Поскольку  $\forall n \in N, \beta > 0$  справедливо неравенство  $S(n) \leq \beta$ , из (64) получаем  $J \leq \beta E$  и на основании (63) имеем  $\frac{1}{\beta} < \frac{E}{(\tau-1)\delta}$ . С учетом этого неравенства из (62)

находим искомую оценку сходимости регуляризованного решения в виде

$$\|u_\beta^\delta(\cdot, 0) - u(\cdot, 0)\| \leq \left( C_* + \frac{1}{2\sqrt{c}(\tau-1)} \right) \sqrt{\delta E}.$$

В заключение отметим, что в частном случае (при  $\tau_r = 0$ ) рассмотренная задача сводится к соответствующей ретроспективной обратной задаче для стандартного субдиффузионного уравнения  $\Lambda_C u(x, t) = 0$ , изученной в [13].

#### РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Кратко остановимся на результатах численной реализации регуляризованного решения обратной задачи для дробно-дифференциального аналога бипараболической математической модели фильтрационной консолидации при выборе параметра регуляризации  $\alpha$  priori.

Вычисления выполнялись для начальной функции распределения порового давления вида

$$u(x, 0) := f(x) = 5x(1-x)e^{-x} \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Конечное распределение порового давления  $u(x, T) = g(x)$ , определяемое суммой ряда

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)E_\alpha(-\lambda_n C_v T^\alpha) (f, \varphi_n) \varphi_n(x),$$

где  $(f, \varphi_n) = 5\sqrt{2} \int_0^1 x(1-x) e^{-x} \sin(n\pi x) dx$ , находилось (при значениях входных параметров  $T = 1.0$ ,  $\alpha = 0.8$ ,  $\tau_r = 0.1$ ,  $C_v = 0.3$ ) из решения прямой задачи с использованием вычислительной процедуры для функции Миттаг–Леффлера из [25]. Полагая, что искажение входных данных вызывается аддитивными случайными возмущениями

$$g^\delta = g + \varepsilon g(2 \text{rand}(\text{size}(g)) - 1),$$

имеем для вычисления уровня шума соотношение  $\delta = \varepsilon \|g\|$  [13, 14].

В результате проведенных вычислений найдено следующее а priori ограничение:  $E = 9$ . Параметр регуляризации, определяемый соотношением  $\beta = \varepsilon \frac{\|g\|}{E}$ , имеет для  $\varepsilon$ , равного 0.2, 0.1, 0.05, 0.01, соответственно значения  $\beta$ , равные  $1.8 \cdot 10^{-3}$ ,  $9 \cdot 10^{-4}$ ,  $4.5 \cdot 10^{-4}$ ,  $9 \cdot 10^{-5}$ . Соответствующее этим значениям параметра  $\beta$  регуляризованное решение вычисляется согласно соотношению (50).

На рис. 2 изображены расчетные кривые распределения по массиву  $0 \leq x \leq 1$  начального порового давления  $u(x, 0)$  (кривая 1), конечного порового давления  $u(x, T)$  (кривая 6) и кривые регуляризованного решения  $u_\beta(x, 0)$  для различных значений параметра регуляризации  $\beta$ :  $\beta = 9 \cdot 10^{-5}$  (кривая 2);  $\beta = 4.5 \cdot 10^{-4}$  (кривая 3);  $\beta = 9 \cdot 10^{-4}$  (кривая 4);  $\beta = 1.8 \cdot 10^{-3}$  (кривая 5).

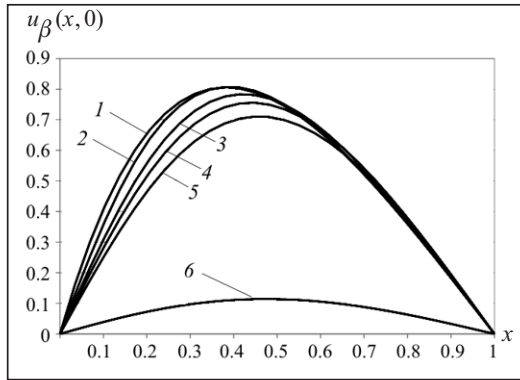


Рис. 2

Как видно из приведенного графика, регуляризованное решение обратной ретроспективной задачи для дробно-дифференциального аналога бипараболического консолидационного уравнения обладает свойством устойчивости и достаточно эффективно.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа посвящена решению некоторых задач теории фильтрационной консолидации насыщенных геопористых сред в рамках математических моделей, основанных на бипараболическом эволюционном уравнении и его дробно-дифференциальном аналоге, в частности:

- получено регуляризованное решение обратной ретроспективной задачи теории консолидации для бипараболической математической модели;
- предложено обобщение бипараболической математической модели консолидации (с учетом нелокальных во времени эффектов) построением ее дробно-дифференциального аналога;
- выполнена постановка и найдено регуляризованное решение обратной ретроспективной задачи теории консолидации для дробно-дифференциального аналога бипараболической консолидационной модели.

В работе также получены некоторые оценки сходимости указанных регуляризованных решений и приведены результаты численных экспериментов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширинкулов Т.Ш., Зарецкий Ю.К. Ползучесть и консолидация грунтов. Ташкент: Фан, 1986. 390 с.
2. Лыков А.В. Теплообмен. Москва: Энергия, 1978. 479 с.
3. Cattaneo G. Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée. *Compte Rendus*. 1958. Vol. 247, N 4. P. 431–433.
4. Флорин В.А. Основы механики грунтов. Т. 2. Москва: Госстройиздат, 1961. 544 с.
5. Иванов П.Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. Москва: Высш. шк., 1991. 447 с.
6. Фушич В.И. О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики. *Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики*. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. С. 4–22.
7. Фушич В.И., Галицын А.С., Полубинский А.С. О новой математической модели процессов теплопроводности. *Укр. мат. журн.* 1990. Т. 42, № 2. С. 237–245.
8. Булавацкий В.М. Біпараболічна математична модель процесу фільтраційної консолідації. *Допов. НАН України*. 1997. № 8. С. 13–17.
9. Скопецкий В.В., Булавацкий В.М. Математическое моделирование фильтрационной консолидации грунтов в условиях движения солевых растворов на основе бипараболической модели. *Проблемы управления и информатики*. 2003. № 4. С. 134–139.
10. Булавацкий В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецкий В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. Київ: Наук. думка, 2005. 283 с.
11. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1979. 288 с.
12. Kirsch A. An introduction to the mathematical theory of inverse problem. New York: Springer-Verlag, 1996. 307 p.
13. Wei T., Wang J.-G. A modified quasi-boundary value method for the backward time-fractional diffusion problem. *ESAIM: Mathematical modelling and numerical analysis*. 2014. Vol. 48, N 2. P. 603–621.
14. Sakamoto K., Yamamoto M. Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2011. Vol. 382, Iss. 1. P. 426–447.
15. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. Москва: Наука, 1979. 384 с.
16. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
17. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. London: Imperial College Press, 2010. 368 p.
18. Podlubny I. Fractional differential equations. New York: Academic Press, 1999. 341 p.
19. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
20. Мейланов М.М., Шибанова М.Р. Особенности решения уравнения теплопереноса в производных дробного порядка. *Журнал технической физики*. 2011. Т. 81, № 7. С. 1–6.
21. Bulavatsky V.M., Krivonos Yu.G. Mathematical modelling in the geoinformation problem of the dynamics of geomigration under space-time nonlocality. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2012. Vol. 48, N 4. P. 539–546.
22. Bulavatsky V.M. One generalization of the fractional differential geoinformation model of research of locally-nonequilibrium geomigration processes. *Journal of Automation and Information Science*. 2013. Vol. 45, N 1. P. 59–69.
23. Bulavatsky V.M. Fractional differential analog of bipolarabolic evolution equation and some its applications. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52, N 5. P. 737–747.
24. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. Mittag-Leffler functions, related topics and applications. Berlin: Springer-Verlag, 2014. 454 p.

25. Podlubny I. Mittag-Leffler function. 2020. URL: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/8738-mittag-leffler-function>.

*Надійшла до редакції 21.10.2019*

**В.М. Булавацький, В.О. Богаєнко**

**ДЕЯКІ ЗАДАЧІ КОНСОЛІДАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ В РАМКАХ БІПАРАБОЛІЧНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ТА ЇЇ ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІЙНОГО АНАЛОГУ**

**Анотація.** Розглянуто питання математичного моделювання динамічних процесів фільтраційної консолідації насичених геопористих середовищ у рамках неklasичних математичних моделей, основу яких складають біпараболічне еволюційне рівняння та його дробово-диференційний аналог. Виконано постановки і знайдено регуляризовані розв'язки обернених ретроспективних задач теорії консолідації відповідно до зазначених моделей. Отримано оцінки збіжності регуляризованих розв'язків та наведено результати чисельних експериментів.

**Ключові слова:** математичне моделювання, неklasичні моделі, фільтраційно-консолідаційні процеси, динаміка, обернені задачі, біпараболічне еволюційне рівняння, дробово-диференційний аналог.

**V.M. Bulavatsky, V.O. Bohaienko**

**SOME CONSOLIDATION DYNAMICS PROBLEMS WITHIN THE FRAMEWORK OF THE BIPARABOLIC MATHEMATICAL MODEL AND ITS FRACTIONAL-DIFFERENTIAL ANALOG**

**Abstract.** The paper deals with mathematical modeling of dynamic processes of filtration consolidation in saturated geoporous media within the framework of non-classical mathematical models based on biparabolic evolution equation and its fractional-differential analog. We state and obtain regularized solutions of inverse retrospective problems of consolidation theory according to the above-mentioned models; obtain the convergence estimates for the found regularized solutions; and present the results of numerical experiments.

**Keywords:** mathematical modeling, non-classical models, filtration-consolidation processes, dynamics, inverse problems, biparabolic evolution equation, fractional-differential analog.

**Булавацький Володимир Михайлович,**

доктор техн. наук, професор, ведучий научний співробітник Інститута кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: v\_bulav@ukr.net.

**Богаєнко Всеволод Александрович,**

кандидат техн. наук, старший научний співробітник Інститута кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: sevab@ukr.net.