УДК 517.988

Я.И. ВЕДЕЛЬ, Г.В. САНДРАКОВ, В.В. СЕМЕНОВ, Л.М. ЧАБАК

СХОДИМОСТЬ ДВУХЭТАПНОГО ПРОКСИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ В ПРОСТРАНСТВАХ АДАМАРА

Аннотация. Рассмотрен итерационный двухэтапный проксимальный алгоритм для приближенного решения задач о равновесии в пространствах Адамара. Данный алгоритм является аналогом ранее изученного двухэтапного алгоритма для задач о равновесии в гильбертовом пространстве. Для псевдомонотонных бифункций липшицевого типа доказана теорема о слабой сходимости порожденных алгоритмом последовательностей.

Ключевые слова: пространство Адамара, задача о равновесии, псевдомонотонность, двухэтапный алгоритм, сходимость.

ВВЕДЕНИЕ

Важным и весьма популярным направлением современного прикладного нелинейного анализа является исследование задач о равновесии (неравенств Ки Фаня, задач равновесного программирования) [1–12].

В настоящее время возник интерес к построению теории и алгоритмам решения задач математического программирования в метрических пространствах Адамара (также известных под названием $CAT(0)$-пространств), что обусловлено проблемами математической биологии и машинного обучения. Сильной мотивацией для изучения данных задач является также возможность записать некоторые невыпуклые задачи в виде выпуклых (точнее, геодезически выпуклых) в пространстве со специально подобранной римановой метрикой [8].

В настоящей статье в продолжение исследований, проведенных в [10], предлагается двухэтапный проксимальный алгоритм для приближенного решения задач о равновесии в пространствах Адамара. Алгоритм является аналогом ранее изученных в [9, 10] двухэтапных алгоритмов для вариационных неравенств и задач о равновесии в гильбертовом пространстве или в конечномерном линейном нормированном пространстве с дивергенцией Брэгмана. Для псевдомонотонных бифункций липшицевого типа доказана теорема о слабой сходимости (Δ-сходимости) порожденных алгоритмом последовательностей.

ОБЗОР ИЗВЕСТНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Классические задачи о равновесии имеют вид [3]:

$$\text{найти } x \in C: \quad F(x, y) \ge 0 \ \ \forall y \in C, \tag{1}$$

где C — непустое подмножество гильбертова пространства H; $F: C \times C \to \mathbb{R}$ — функция (бифункция) такая, что $F(x, x) = 0 \ \forall x \in C$. В виде (1) можно сформулировать задачи математического программирования, вариационные неравенства и многие игровые задачи. Рассмотрим три типичные формулировки.

1. Если $F(x, y) = \varphi(y) - \varphi(x)$, где φ: $C \to \mathbb{R}$, то (1) является задачей условной минимизации $\varphi \to \min\limits_C$.

2. Если $F(x, y) = (Ax, y - x)$, где $A: C \to H$, то задача (1) сводится к классическому вариационному неравенству

$$\text{найти } x \in C: \quad (Ax, y - x) \ge 0 \ \ \forall y \in C.$$

3. Для каждого $i \in I$, где I — конечное множество индексов, заданы множество C_i и функция $\varphi_i: C \to \mathbb{R}$, где $C = \prod_{i \in I} C_i$. Для $x = (x_i)_{i \in I} \in C$ обозначим $x^i = (x_j)_{j \in I \setminus \{i\}}$. Точка $\bar{x} = (\bar{x}_i)_{i \in I} \in C$ является равновесием Нэша, если для всех $i \in I$ выполняются неравенства $\varphi_i(\bar{x}) \le \varphi_i(\bar{x}_i, y_i)$ $\forall y_i \in C_i$. Определим функцию $F: C \times C \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$F(x, y) = \sum_{i \in I} (\varphi_i(x^i, y_i) - \varphi_i(x)).$$

Точка $\bar{x} \in C$ называется равновесием Нэша тогда и только тогда, когда она является решением задачи (1).

Алгоритмы решения равновесных и близких задач изложены во многих публикациях. Частным случаем задач о равновесии являются вариационные неравенства [13–15]. Для их решения в работе [16] предложен экстраградиентный метод. Сходимости аналогов экстраградиентного метода для задач о равновесии и близким вопросам посвящены работы [1, 4, 6, 7, 17–23].

В 1980 г. Л.Д. Попов [24] предложил для поиска седловых точек выпукло-вогнутых функций, определенных в конечномерном евклидовом пространстве, интересную модификацию метода Эрроу–Гурвица. В статье [9] был предложен двухэтапный проксимальный алгоритм для решения задач о равновесии в гильбертовом пространстве, являющийся адаптацией метода Л.Д. Попова к общим задачам равновесного программирования (см. также [10, 25, 26]).

В последнее десятилетие активно изучаются задачи математического программирования в метрических пространствах Адамара [27]. Одной из мотиваций является возможность записать некоторые невыпуклые задачи в виде геодезически выпуклых в пространстве со специально подобранной римановой метрикой [8, 27].

В работах [8, 11, 12] изучались задачи о равновесии в пространствах Адамара. В работе [8] получены теоремы существования для задач о равновесии на многообразиях Адамара, рассмотрены приложения к вариационным неравенствам и обоснован резольвентный метод для аппроксимации решений задач о равновесии и вариационных неравенств. Для более общих задач о равновесии с псевдомонотонными бифункциями в пространствах Адамара в работе [11] получены теоремы существования, предложен проксимальный алгоритм и доказана его сходимость. Более конструктивному подходу посвящена работа [12], авторы которой, основываясь на результатах статьи [4], предложили и обосновали для псевдомонотонных задач о равновесии в пространствах Адамара аналог экстраградиентного метода.

В настоящей статье предлагается новый двухэтапный проксимальный алгоритм для приближенного решения задач о равновесии в пространствах Адамара. Алгоритм является аналогом ранее изученных двухэтапных алгоритмов для вариационных неравенств и задач о равновесии в гильбертовом пространстве [9] или в конечномерном линейном нормированном пространстве с дивергенцией Брэгмана [10]. Для псевдомонотонных бифункций липшицевого типа доказана теорема о слабой сходимости алгоритма.

ПРОСТРАНСТВА АДАМАРА

Рассмотрим некоторые фундаментальные понятия и факты относительно пространств Адамара, используемые в настоящей работе (более детально изложено в [27–30]).

Пусть (X, d) — метрическое пространство и x, $y \in X$. Геодезическим путем, соединяющим точки x и y, называют изометрию $\gamma: [0, d(x, y)] \to X$ такую, что $\gamma(0) = x$, $\gamma(d(x, y)) = y$. Множество $\gamma([0, d(x, y)]) \subseteq X$ обозначают $[x, y]$ и называют геодезическим сегментом с концами x и y (или кратко — геодезической). Метрическое пространство (X, d) называют геодезическим пространством, если любые две точки X можно соединить геодезической, и однозначно геодезическим пространством, если для любых двух точек X существует в точности одна геодезическая, их соединяющая.

Геодезическое пространство (X, d) называют $CAT(0)$-пространством, если для любой тройки точек y_0, y_1, $y_2 \in X$ таких, что $d^2(y_1, y_0) = d^2(y_2, y_0) = = \frac{1}{2} d^2(y_1, y_2)$, выполняется неравенство

$$d^2(x, y_0) \le \frac{1}{2} d^2(x, y_1) + \frac{1}{2} d^2(x, y_2) - \frac{1}{4} d^2(y_1, y_2) \ \ \forall x \in X. \tag{2}$$

Неравенство (2) называют CN-неравенством [28] (в евклидовом пространстве неравенство (2) преобразуется в тождество), а точку y_0 — серединой между точками y_1 и y_2 (эта точка всегда существует в геодезическом пространстве). Известно, что $CAT(0)$-пространство является однозначно геодезическим [27].

Для двух точек x и y $CAT(0)$-пространства (X, d) и $t \in [0, 1]$ обозначим $tx \oplus (1-t)y$ такую единственную точку z сегмента $[x, y]$, что $d(z, x) = (1-t)d(x, y)$ и $d(z, y) = td(x, y)$. Множество $C \subseteq X$ называется выпуклым (геодезически выпуклым), если для всех x, $y \in C$ и $t \in [0,1]$ выполняется условие $tx \oplus (1-t)y \in C$.

Целесообразным инструментом для работы в $CAT(0)$-пространстве (X, d) является неравенство

$$d^2(tx \oplus (1-t)y, z) \le td^2(x, z) + (1-t)d^2(y, z) - t(1-t)d^2(x, y), \tag{3}$$

$$\{x, y, z\} \in X, \ \ t \in [0,1].$$

Важными примерами $CAT(0)$-пространств являются евклидовы пространства, $\mathbb{R}$-деревья, многообразия Адамара (полные связные римановы многообразия неположительной кривизны) и гильбертов шар с гиперболической метрикой [27–30]. Полное $CAT(0)$-пространство называют пространством Адамара.

Пусть (X, d) — метрическое пространство и (x_n) — ограниченная последовательность элементов X. Пусть также $r(x, (x_n)) = \overline{\lim_{n\to\infty}} d(x, x_n)$. Число $r((x_n)) = = \inf_{x\in X} r(x, (x_n))$ называют асимптотическим радиусом (x_n), а множество $A((x_n)) = \{x \in X : r(x, (x_n)) = r((x_n))\}$ — асимптотическим центром (x_n). Известно, что в пространстве Адамара множество $A((x_n))$ состоит из одной точки [27].

Последовательность (x_n) элементов пространства Адамара (X, d) слабо сходится (Δ-сходится [28]) к элементу $x \in X$, если $A((x_{n_k})) = \{x\}$ для любой подпоследовательности (x_{n_k}). Известно, что произвольная последовательность элементов ограниченного, замкнутого и выпуклого подмножества K пространства Адамара имеет подпоследовательность, слабо сходящуюся к элементу из K [27, 28].

При доказательстве слабой сходимости последовательностей элементов пространства Адамара используем известный аналог леммы Опяла [27, p. 60].

Лемма 1. Пусть последовательность (x_n) элементов пространства Адамара (X, d) слабо сходится к элементу $x \in X$. Тогда для всех $y \in X \setminus \{x\}$ имеем

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} d(x_n, x) < \underline{\lim}_{n\to\infty} d(x_n, y).$$

Пусть (X, d) — пространство Адамара. Функция $\varphi: X \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется выпуклой (геодезически выпуклой), если для всех x, $y \in X$ и $t \in [0,1]$ выполняется

$$\varphi(tx \oplus (1-t)y) \le t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y).$$

Например, в пространстве Адамара функции $y \mapsto d(y, x)$ выпуклы. Если существует такая константа $\mu > 0$, что для всех x, $y \in X$ и $t \in [0,1]$ выполняется неравенство

$$\varphi(tx \oplus (1-t)y) \le t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) - \mu t(1-t) d^2(x, y),$$

то функция φ называется сильно выпуклой. Известно, что для выпуклых функций полунепрерывность снизу и слабая полунепрерывность снизу эквивалентны [27, p. 64], а сильно выпуклая полунепрерывная снизу функция достигает минимума в единственной точке.

Многие важные для приложений конструкции в пространствах Адамара связаны с точками минимума выпуклых функций [27, 29]. Например, пусть даны набор точек $\{x_i\}_{i=\overline{1,m}}$ метрического пространства (X, d) и набор положительных чисел $\{\alpha_i\}_{i=\overline{1,m}}$. Барицентром (центром масс, средним Фреше) точек $\{x_i\}$ с весами $\{\alpha_i\}$ называется точка

$$z \in \arg\min_{y \in X} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i d^2(y, x_i).$$

В пространстве Адамара функции $y \mapsto d^2(y, x_i)$ сильно выпуклы (см. неравенство (3)), поэтому функция $y \mapsto \sum_{i=1}^{m} \alpha_i d^2(y, x_i)$ также сильно выпукла. Отсюда следует, что барицентр существует и единственен.

Для выпуклой, собственной и полунепрерывной снизу функции $\varphi: X \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ проксимальный оператор определяется следующим образом [27]:

$$\operatorname{prox}_{\varphi} x = \arg\min_{y \in X} \left(\varphi(y) + \frac{1}{2} d^2(y, x)\right).$$

Поскольку функции $\varphi + \frac{1}{2} d^2(\cdot, x)$ сильно выпуклы, то определение проксимального оператора корректно, т.е. для каждого $x \in X$ существует единственный элемент — $\operatorname{prox}_{\varphi} x \in X$.

ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ В ПРОСТРАНСТВЕ АДАМАРА

Пусть (X, d) — пространство Адамара. Для непустого выпуклого замкнутого множества $C \subseteq X$ и бифункции $F: C \times C \to \mathbb{R}$ рассмотрим задачу о равновесии:

$$\text{найти } x \in C: \quad F(x, y) \ge 0 \quad \forall y \in C. \tag{4}$$

Предположим, что выполнены условия:

1) $F(x, x) = 0$ для всех $x \in C$;

2) функции $F(x, \cdot): C \to \mathbb{R}$ выпуклы и полунепрерывны снизу для всех $x \in C$;

3) функции $F(\cdot, y): C \to \mathbb{R}$ слабо полунепрерывны сверху для всех $y \in C$;

4) бифункция $F: C \times C \to \mathbb{R}$ псевдомонотонна, т.е. для всех x, $y \in C$ из $F(x, y) \ge 0$ следует $F(y, x) \le 0$;

5) бифункция $F: C \times C \to \mathbb{R}$ липшицевого типа, т.е. существуют две константы $a > 0$, $b > 0$ такие, что

$$F(x, y) \le F(x, z) + F(z, y) + a d^2(x, z) + b d^2(z, y) \quad \forall x, y, z \in C.$$

Замечание 1. Условие 5 липшицевого типа в евклидовом пространстве введено G. Mastroeni [2].

Рассмотрим дуальную задачу о равновесии:

$$\text{найти } x \in C: \quad F(y, x) \le 0 \ \ \forall y \in C. \tag{5}$$

Множества решений задач (4) и (5) обозначим S и S^*. При выполнении условий 1–4 имеем $S = S^*$ [11]. Кроме того, множество S^* выпукло и замкнуто. Далее будем предполагать, что $S \ne \varnothing$.

ДВУХЭТАПНЫЙ ПРОКСИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Для приближенного решения задачи (4) рассмотрим следующий алгоритм.

Алгоритм 1. Для $x_1, \ y_0 \in C$ генерируем последовательность элементов $x_n, \ y_n \in C$ с помощью итерационной схемы

$$\begin{cases} y_n = \operatorname{prox}_{\lambda F(y_{n-1}, \cdot)} x_n = \arg\min_{y \in C} \left(F(y_{n-1}, y) + \dfrac{1}{2\lambda} d^2(y, x_n) \right), \\ x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda F(y_n, \cdot)} x_n = \arg\min_{y \in C} \left(F(y_n, y) + \dfrac{1}{2\lambda} d^2(y, x_n) \right), \end{cases}$$

где $\lambda > 0$.

На каждом шаге алгоритма 1 следует решить две задачи минимизации с сильно выпуклыми функциями. Будем предполагать возможность их эффективного решения.

Замечание 2. Алгоритм 1 для задач в гильбертовом пространстве был предложен в работе [9] (см. также [10, 25, 26]). Частный случай алгоритма 1 для поиска седловых точек выпукло-вогнутых функций, определенных в конечномерном евклидовом пространстве, предложен в [24]. Заметим, что в последнее время вариант алгоритма 1 для вариационных неравенств стал известен специалистам по машинному обучению под названием «Extrapolation from the Past» [31].

СХОДИМОСТЬ АЛГОРИТМА

Доказательству сходимости алгоритма 1 предшествует доказательство важного неравенства для порождаемых им последовательностей (x_n), (y_n).

Лемма 2. Для последовательностей (x_n), (y_n), порожденных алгоритмом 1, имеет место неравенство

$$\begin{aligned} d^2(x_{n+1}, z) \le d^2(x_n, z) - (1 - 2\lambda b) d^2(x_{n+1}, y_n) - \\ -(1 - 4\lambda a) d^2(y_n, x_n) + 4\lambda a d^2(x_n, y_{n-1}), \end{aligned} \tag{6}$$

где $z \in S$.

Доказательство. Из определения x_{n+1} следует

$$F(y_n, x_{n+1}) + \frac{1}{2\lambda} d^2(x_{n+1}, x_n) \le F(y_n, y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y, x_n) \ \ \forall y \in C. \tag{7}$$

Положив в (7) $y = t x_{n+1} \oplus (1-t) z$, $t \in (0,1)$, получим

$$F(y_n, x_{n+1}) + \frac{1}{2\lambda} d^2(x_{n+1}, x_n) \le$$

$$\le F(y_n, t x_{n+1} \oplus (1-t) z) + \frac{1}{2\lambda} d^2(t x_{n+1} \oplus (1-t) z, x_n) \le$$

$$\le t F(y_n, x_{n+1}) + (1-t) F(y_n, z) +$$

$$+ \frac{1}{2\lambda} \left(t d^2(x_{n+1}, x_n) + (1-t) d^2(z, x_n) - t(1-t) d^2(x_{n+1}, z) \right).$$

Из псевдомонотонности бифункции F следует, что

$$F(y_n, z) \le 0 .$$

Таким образом,

$$\begin{gathered}(1-t)F(y_n, x_{n+1}) \le \\ \le \frac{1}{2\lambda}(-(1-t)d^2(x_{n+1}, x_n) + (1-t)d^2(z, x_n) - t(1-t)d^2(x_{n+1}, z)) .\end{gathered} \tag{8}$$

Сократив в (8) $1-t$ и совершив предельный переход при $t \to 1$, получим

$$F(y_n, x_{n+1}) \le \frac{1}{2\lambda}(d^2(z, x_n) - d^2(x_{n+1}, x_n) - d^2(x_{n+1}, z)) . \tag{9}$$

Из определения y_n следует

$$F(y_{n-1}, y_n) + \frac{1}{2\lambda}d^2(y_n, x_n) \le F(y_{n-1}, y) + \frac{1}{2\lambda}d^2(y, x_n) \quad \forall y \in C. \tag{10}$$

Положив в (10) $y = tx_{n+1} \oplus (1-t)y_n$, $t \in (0,1)$, получим

$$\begin{gathered}F(y_{n-1}, y_n) + \frac{1}{2\lambda}d^2(y_n, x_n) \le \\ \le F(y_{n-1}, tx_{n+1} \oplus (1-t)y_n) + \frac{1}{2\lambda}d^2(tx_{n+1} \oplus (1-t)y_n, x_n) \le \\ \le tF(y_{n-1}, x_{n+1}) + (1-t)F(y_{n-1}, y_n) + \\ + \frac{1}{2\lambda}(td^2(x_{n+1}, x_n) + (1-t)d^2(y_n, x_n) - t(1-t)d^2(x_{n+1}, y_n)) .\end{gathered}$$

Таким образом,

$$\begin{gathered}tF(y_{n-1}, y_n) - tF(y_{n-1}, x_{n+1}) \le \\ \le \frac{1}{2\lambda}(td^2(x_{n+1}, x_n) - td^2(y_n, x_n) - t(1-t)d^2(x_{n+1}, y_n)) .\end{gathered} \tag{11}$$

Сократив в (11) t и совершив предельный переход при $t \to 0$, получим

$$\begin{gathered}F(y_{n-1}, y_n) - F(y_{n-1}, x_{n+1}) \le \\ \le \frac{1}{2\lambda}(d^2(x_{n+1}, x_n) - d^2(y_n, x_n) - d^2(x_{n+1}, y_n)) .\end{gathered} \tag{12}$$

Сложив неравенства (9) и (12), получим

$$\begin{gathered}F(y_n, x_{n+1}) + F(y_{n-1}, y_n) - F(y_{n-1}, x_{n+1}) \le \\ \le \frac{1}{2\lambda}(d^2(z, x_n) - d^2(x_{n+1}, z) - d^2(y_n, x_n) - d^2(x_{n+1}, y_n)) .\end{gathered} \tag{13}$$

Из условия липшицевого типа следует

$$F(y_n, x_{n+1}) + F(y_{n-1}, y_n) - F(y_{n-1}, x_{n+1}) \ge -bd^2(y_n, x_{n+1}) - ad^2(y_{n-1}, y_n) . \tag{14}$$

Комбинируя (13) и (14), получаем

$$\begin{gathered}d^2(x_{n+1}, z) \le \\ \le d^2(z, x_n) - d^2(y_n, x_n) - d^2(x_{n+1}, y_n) + 2\lambda ad^2(y_{n-1}, y_n) + 2\lambda bd^2(y_n, x_{n+1}) .\end{gathered}$$

Поскольку $d^2(y_{n-1}, y_n) \le 2d^2(y_{n-1}, x_n) + 2d^2(x_n, y_n)$, то

$$d^2(x_{n+1}, z) \le d^2(z, x_n) - d^2(y_n, x_n) - d^2(x_{n+1}, y_n) +$$

$$+4\lambda a d^2(y_{n-1}, x_n) + 4\lambda a d^2(x_n, y_n) + 2\lambda b d^2(y_n, x_{n+1}),$$

что и требовалось доказать. ■

Перейдем непосредственно к доказательству сходимости алгоритма 1. Заметим, что при выполнении для некоторого $n \in \mathbb{N}$ равенств

$$y_{n-1} = y_n = x_n \quad \text{или} \quad x_{n+1} = x_n = y_n \tag{15}$$

имеет место включение $y_n \in S$. Действительно, равенство

$$x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda F(y_n, \cdot)} x_n = \arg\min_{y \in C} \left(F(y_n, y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y, x_n) \right)$$

означает

$$F(y_n, x_{n+1}) - F(y_n, p) \le \frac{1}{2\lambda} (d^2(x_n, p) - d^2(x_{n+1}, x_n) - d^2(x_{n+1}, p)) \quad \forall p \in S.$$

Из второго равенства (15) следует $-F(y_n, p) \le 0 \ \forall p \in S$, т.е. $y_n \in S$.

Аналогично из неравенства

$$F(y_{n-1}, y_n) - F(y_{n-1}, p) \le \frac{1}{2\lambda} (d^2(p, x_n) - d^2(y_n, x_n) - d^2(p, y_n)) \quad \forall p \in S$$

при выполнении первого условия в (15) получаем $y_n \in S$.

Далее предположим, что для всех $n \in \mathbb{N}$ условие (15) не имеет места.

Пусть $z \in S$. Положим

$$a_n = d^2(x_n, z) + 4\lambda a d^2(x_n, y_{n-1}),$$

$$b_n = (1 - 4\lambda a) d^2(y_n, x_n) + (1 - 4\lambda a - 2\lambda b) d^2(x_{n+1}, y_n).$$

Тогда неравенство (6) принимает вид $a_{n+1} \le a_n - b_n$. Необходимо выполнение условия

$$0 < 2(2a + b)\lambda < 1.$$

Тогда существует предел

$$\lim_{n\to\infty} (d^2(x_n, z) + 4\lambda a d^2(x_n, y_{n-1}))$$

и выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} ((1 - 4\lambda a) d^2(y_n, x_n) + (1 - 4\lambda a - 2\lambda b) d^2(x_{n+1}, y_n)) = 0.$$

Отсюда получаем

$$\lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0 \tag{16}$$

и сходимость числовых последовательностей $(d(x_n, z))$, $(d(y_n, z))$ для всех $z \in S$. В частности, последовательности (x_n), (y_n) ограничены.

Из (9), (12), (14) и (16) следует

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} F(y_n, x_{n+1}) \le 0,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (F(y_{n-1}, y_n) - F(y_{n-1}, x_{n+1})) \le 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} (F(y_n, x_{n+1}) + F(y_{n-1}, y_n) - F(y_{n-1}, x_{n+1})) = 0,$$

откуда, в частности, получаем

$$\lim_{n\to\infty} F(y_n, x_{n+1}) = 0. \qquad (17)$$

Пусть $p \in C$. Положив в (7) $y = tx_{n+1} \oplus (1-t)p$, $t \in (0,1)$, получим

$$F(y_n, x_{n+1}) + \frac{1}{2\lambda} d^2(x_{n+1}, x_n) \le$$

$$\le F(y_n, tx_{n+1} \oplus (1-t)p) + \frac{1}{2\lambda} d^2(tx_{n+1} \oplus (1-t)p, x_n) \le$$

$$\le tF(y_n, x_{n+1}) + (1-t)F(y_n, p) +$$

$$+\frac{1}{2\lambda}(td^2(x_{n+1}, x_n) + (1-t)d^2(p, x_n) - t(1-t)d^2(x_{n+1}, p)).$$

Отсюда имеем

$$(1-t)F(y_n, x_{n+1}) - (1-t)F(y_n, p) \le$$

$$\le \frac{1}{2\lambda}(-(1-t)d^2(x_{n+1}, x_n) + (1-t)d^2(p, x_n) - t(1-t)d^2(x_{n+1}, p)). \qquad (18)$$

Сократив в (18) $1-t$ и совершив предельный переход при $t \to 1$, получим

$$F(y_n, x_{n+1}) - F(y_n, p) \le \frac{1}{2\lambda}(d^2(x_n, p) - d^2(x_{n+1}, x_n) - d^2(x_{n+1}, p)). \quad (19)$$

Рассмотрим подпоследовательность (x_{n_k}), слабо сходящуюся к некоторой точке $z \in C$. Тогда из (16) следует, что (y_{n_k}) слабо сходится к z. Покажем, что $z \in S$. Из (19) следует

$$F(y_{n_k}, p) \ge F(y_{n_k}, x_{n_k+1}) + \frac{1}{2\lambda}(d^2(x_{n_k+1}, x_{n_k}) + d^2(x_{n_k+1}, p) - d^2(x_{n_k}, p))$$
$$\forall p \in C. \qquad (20)$$

Совершив предельный переход в (20), получим

$$F(z, p) \ge \overline{\lim_{k\to\infty}} F(y_{n_k}, p) \ge$$

$$\ge \overline{\lim_{k\to\infty}}(F(y_{n_k}, x_{n_k+1}) + \frac{1}{2\lambda}(d^2(x_{n_k+1}, x_{n_k}) + d^2(x_{n_k+1}, p) - d^2(x_{n_k}, p))) = 0$$
$$\forall p \in C,$$

т.е. $z \in S$.

Применяя вариант леммы Опяла для пространств Адамара (лемма 1), получаем слабую сходимость последовательности (x_n) к точке $z \in S$. Действительно, рассуждаем от противного. Пусть существует подпоследовательность (x_{m_k}), слабо сходящаяся к некоторой точке $\bar{z} \in C$ и $\bar{z} \ne z$. Очевидно, что $\bar{z} \in S$. Далее, имеем

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, z) = \lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, z) < \lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, \bar{z}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, \bar{z}) = \lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, \bar{z}) <$$

$$< \lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, z) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, z),$$

что невозможно. Следовательно, (x_n) слабо сходится к $z \in S$.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть (X, d) — пространство Адамара, $C \subseteq X$ — непустое выпуклое замкнутое множество, для бифункции $F: C \times C \to \mathbb{R}$ выполнены условия 1–5 и $S \neq \varnothing$. Предположим, что $\lambda \in \left(0, \dfrac{1}{2(2a+b)}\right)$. Тогда порожденные алгоритмом 1 последовательности (x_n), (y_n) слабо сходятся к решению $z \in S$ задачи о равновесии (4), причем $\lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = 0$.

Замечание 3. Аналогичный теореме 1 результат имеет место и для нестационарной последовательности (λ_n) такой, что $\{\inf_n \lambda_n, \sup_n \lambda_n\} \subseteq \left(0, \dfrac{1}{2(2a+b)}\right)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены задачи о равновесии в метрических пространствах Адамара. Для приближенного решения задач предложен двухэтапный проксимальный алгоритм. Данный алгоритм является аналогом ранее изученного двухэтапного алгоритма для задач о равновесии в гильбертовом пространстве [9] и алгоритма с дивергенцией Брэгмана [10]. Для псевдомонотонных бифункций, удовлетворяющих условию липшицевого типа, доказана теорема о слабой сходимости (Δ-сходимости) порожденных алгоритмом последовательностей.

Планируется рассмотреть вариант двухэтапного проксимального алгоритма для вариационных неравенств и минимаксных задач на многообразиях Адамара (например, на многообразии симметричных положительно определенных матриц), а также предусматривается изучение построения адаптивных версий алгоритмов.

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН Украины (проект «Математичне моделювання та оптимізація динамічних систем для оборони, медицини та екології», номер госрегистрации 0219U008403) и НАН Украины (проект «Нові методи дослідження коректності та розв’язання задач дискретної оптимізації, варіаційних нерівностей та їх застосування», номер госрегистрации 0119U101608).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Antipin A.S. Equilibrium programming: Proximal methods. *Comput. Math. Math. Phys.* 1997. Vol. 37. P. 1285–1296. https://doi.org/10.1134/S0965542507120044.
2. Mastroeni G. On auxiliary principle for equilibrium problems. In: Daniele P. et al. (eds.). *Equilibrium Problems and Variational Models.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. P. 289–298. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0239-1.
3. Combettes P.L., Hirstoaga S.A. Equilibrium programming in Hilbert spaces. *J. Nonlinear Convex Anal.* 2005. Vol. 6. P. 117–136.
4. Quoc T.D., Muu L.D., Hien N.V. Extragradient algorithms extended to equilibrium problems. *Optimization*. 2008. Vol. 57. P. 749–776. https://doi.org/10.1080/02331930601122876.
5. Semenov V.V. On the parallel proximal decomposition method for solving the problems of convex optimization. *J. of Automation and Information Sciences.* 2010. Vol. 42, Iss. 4. P. 13–18. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v42.i4.20.
6. Lyashko S.I., Semenov V.V., Voitova T.A. Low-cost modification of Korpelevich’s methods for monotone equilibrium problems. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2011. Vol. 47, N 4. P. 631–639. https://doi.org/10.1007/s10559-011-9343-1.
7. Semenov V.V. Strongly convergent algorithms for variational inequality problem over the set of solutions the equilibrium problems. In: Zgurovsky M.Z. and Sadovnichiy V.A. (eds.) Continuous and Distributed Systems. *Solid Mechanics and Its Applications.* Vol. 211. Switzerland: Springer International Publishing, 2014. P. 131–146. https://doi.org/10.1007/978-3-319-03146-0_10.
8. Colao V., Lopez G., Marino G., Martin-Marquez V. Equilibrium problems in Hadamard manifolds. *J. of Mathematical Analysis and Applications.* 2012. Vol. 388. P. 61–77. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.11.001.

9. Lyashko S.I., Semenov V.V. A new two-step proximal algorithm of solving the problem of equilibrium programming. In: Goldengorin B. (ed.). Optimization and its applications in control and data sciences. *Springer Optimization and Its Applications.* Vol. 115. Cham: Springer, 2016. P. 315–325. https://doi.org/10.1007/978-3-319-42056-1_10.
10. Chabak L., Semenov V., Vedel Y. A new non-Euclidean proximal method for equilibrium problems. In: Chertov O., Mylovanov T., Kondratenko Y., Kacprzyk J., Kreinovich V., Stefanuk V. (eds.). Recent developments in data science and intelligent analysis of information. ICDSIAI 2018. *Advances in Intelligent Systems and Computing.* Vol. 836. Cham: Springer, 2019. P. 50–58. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97885-7_6.
11. Khatibzadeh H., Mohebbi V. Monotone and pseudo-monotone equilibrium problems in Hadamard spaces. *J. of the Australian Mathematical Society.* 2019. P. 1–23. https://doi.org/10.1017/S1446788719000041.
12. Khatibzadeh H., Mohebbi V. Approximating solutions of equilibrium problems in Hadamard spaces. *Miskolc Mathematical Notes*. 2019. Vol. 20, N 1. P. 281–297. https://doi.org/10.18514/MMN.2019.2361.
13. Kinderlehrer D. Stampacchia G. An introduction to variational inequalities and their applications. New York: Academic Press, 1980. Russian transl. Moscow: Mir, 1983. 256 p.
14. Sandrakov G.V. Homogenization of variational inequalities for problems with regular obstacles. *Doklady Akademii Nauk.* 2004. Vol. 397, Iss. 2. P. 170–173.
15. Sandrakov G.V. Homogenization of variational inequalities for non-linear diffusion problems in perforated domains. *Izvestiya Mathematics.* 2005. Vol. 69, Iss. 5. P. 1035–1059. http://dx.doi.org/10.1070/IM2005v069n05ABEH002287.
16. Korpelevich G.M. An extragradient method for finding saddle points and for other problems. *Matecon*. 1976. Vol. 12, N 4. P. 747–756.
17. Semenov V.V. A strongly convergent splitting method for systems of operator inclusions with monotone operators. *J. of Automation and Information Sciences*. 2014. Vol. 46, Iss. 5. P. 45–56. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v46.i5.40.
18. Semenov V.V. Hybrid splitting methods for the system of operator inclusions with monotone operators. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2014. Vol. 50, N 5. P. 741–749. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9664-y.
19. Denisov S.V., Semenov V.V., Chabak L.M. Convergence of the modified extragradient method for variational inequalities with non-Lipschitz operators. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2015. Vol. 51, N 5. P. 757–765. https://doi.org/10.1007/s10559-015-9768-z.
20. Verlan D.A., Semenov V.V., Chabak L.M. A strongly convergent modified extragradient method for variational inequalities with non-Lipschitz operators. *J. of Automation and Information Sciences*. 2015. Vol. 47, Iss. 7. P. 31–46. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i7.40.
21. Semenov V.V. Modified extragradient method with Bregman divergence for variational inequalities. *J. of Automation and Information Sciences.* 2018. Vol. 50, Iss. 8. P. 26–37. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i8.30.
22. Denisov S.V., Nomirovskii D.A., Rublyov B.V., Semenov V.V. Convergence of extragradient algorithm with monotone step size strategy for variational inequalities and operator equations. *J. of Automation and Information Sciences.* 2019. Vol. 51, Iss. 6. P. 12–24. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i6.20.
23. Denisov S.V., Semenov V.V., Stetsyuk P.I. Bregman extragradient method with monotone rule of step adjustment. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2019. Vol. 55, N 3. P. 377–383. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00144-5.
24. Popov L.D. A modification of the Arrow–Hurwicz method for search of saddle points. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR.* 1980. Vol. 28, Iss. 5. P. 845–848. https://doi.org/10.1007/BF01141092.
25. Semenov V.V. A version of the mirror descent method to solve variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2017. Vol. 53, N 2. P. 234–243. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9923-9.
26. Nomirovskii D.A., Rublyov B.V., Semenov V.V. Convergence of two-stage method with Bregman divergence for solving variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2019. Vol. 55, N 3. P. 359–368. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00142-7.
27. Bacak M. Convex analysis and optimization in Hadamard spaces. Berlin; Boston: De Gruyter, 2014. viii+185 p.

28. Kirk W., Shahzad N. Fixed point theory in distance spaces. Cham: Springer, 2014. xii+173 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-10927-5.

29. Burago D., Burago Yu., Ivanov S. A course in metric geometry. *Graduate Studies in Mathematics*. 2001. Vol. 33. Providence: AMS. xiv+415 p.

30. Бураго Ю.Д., Залгаллер В.А. Введение в риманову геометрию. Москва: ЛЕНАНД, 2019. 320 с.

31. Gidel G., Berard H., Vincent P., Lacoste-Julien S. A variational inequality perspective on generative adversarial networks. arXiv preprint arXiv:1802.10551. 2018.

Надійшла до редакції 15.11.2019

Я.І. Ведель, Г.В. Сандраков, В.В. Семенов, Л.М. Чабак

ЗБІЖНІСТЬ ДВОЕТАПНОГО ПРОКСИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМУ ДЛЯ ЗАДАЧІ ПРО РІВНОВАГУ В ПРОСТОРАХ АДАМАРА

Анотація. Запропоновано ітераційний двоетапний проксимальний алгоритм для наближеного розв'язання задач про рівновагу в просторах Адамара. Цей алгоритм є аналогом раніше дослідженого двоетапного алгоритму для задач про рівновагу в гільбертовому просторі. Для псевдомонотонних біфункцій ліпшицевого типу доведено теорему про слабку збіжність послідовностей, що породжені алгоритмом.

Ключові слова: простір Адамара, задача про рівновагу, псевдомонотонність, двоетапний алгоритм, збіжність.

Ya.I. Vedel, G.V. Sandrakov, V.V. Semenov, L.M. Chabak

CONVERGENCE OF A TWO-STAGE PROXIMAL ALGORITHM FOR EQUILIBRIUM PROBLEMS IN HADAMARD SPACES

Abstract. An iterative two-stage proximal algorithm for the approximate solution of equilibrium problems in Hadamard spaces is proposed. This algorithm is an analog of the previously studied two-stage algorithm for equilibrium problems in Hilbert space. For Lipschitz-type pseudo-monotone bifunctions, a theorem on the weak convergence of sequences generated by the algorithm is proved.

Keywords: Hadamard space, equilibrium problem, pseudo-monotonicity, two-stage algorithm, convergence.

Ведель Яна Игоревна,
аспирантка Киевского национального университета имени Тараса Шевченко,
e-mail: yana.vedel@gmail.com.

Сандраков Геннадий Викторович,
доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: sandrako@mail.ru.

Семенов Владимир Викторович,
доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: semenov.volodya@gmail.com.

Чабак Любовь Михайловна,
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры Государственного университета инфраструктуры и технологий, Киев, e-mail: chabaklm@ukr.net.