УДК 517.977

И.С. РАППОПОРТ

ПРОБЛЕМА СБЛИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ С ТЕРМИНАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПЛАТЫ

Аннотация. Предложен метод решения проблемы сближения управляемых объектов в игровых задачах динамики с терминальной функцией платы, который заключается в систематическом использовании идей Фенхеля–Моро применительно к общей схеме метода разрешающих функций. Суть предлагаемого метода заключается в том, что разрешающую функцию удается выразить через сопряженную к функции платы и, используя инволютивность оператора сопряжения для выпуклой замкнутой функции, получить гарантированную оценку терминального значения функции платы, которая представляется через значение платы в начальный момент и интеграл от разрешающей функции. Введены понятия верхней и нижней разрешающих функций двух типов и получены достаточные условия гарантированного результата в дифференциальной игре с терминальной функцией платы в случае, когда условие Понтрягина не имеет места. Рассмотрены две схемы метода разрешающих функций, построены соответствующие стратегии управления и дано сравнение гарантированных времен. Результаты иллюстрируются на модельном примере.

Ключевые слова: терминальная функция платы, квазилинейная дифференциальная игра, многозначное отображение, измеримый селектор, стробоскопическая стратегия, разрешающая функция.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье рассматривается проблема сближения управляемых объектов в игровых задачах динамики с терминальной функцией платы на основе метода разрешающих функций [1]. Введены понятия верхней и нижней разрешающих функций двух типов и получены достаточные условия гарантированного результата в дифференциальной игре с терминальной функцией платы в случае, когда условие Понтрягина не имеет места. Предложены две схемы метода разрешающих функций, построены соответствующие стратегии управления и дано сравнение гарантированных времен. Результаты иллюстрируются на модельном примере.

Работа продолжает исследования, проведенные в [1, 2], примыкает к публикациям [3–22], расширяет класс игровых задач сближения управляемых объектов, которые имеют решения, и раскрывает новые возможности приложения выпуклого анализа к теории конфликтно-управляемых процессов.

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА. РАЗРЕШАЮЩИЕ ФУНКЦИИ ПЕРВОГО ТИПА

Рассмотрим конфликтно-управляемый процесс, эволюция которого описывается равенством

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t,\tau)\varphi(u(\tau), v(\tau))\, d\tau, \quad t \ge 0. \qquad (1)$$

Здесь $z(t) \in R^n$, функция $g(t)$, $g: R_+ \to R^n$, измерима по Лебегу [8] и ограничена при $t > 0$, матричная функция $\Omega(t,\tau)$, $t \ge \tau \ge 0$, измерима по t, а также суммируема по τ для каждого $t \in R_+$. Блок управления задается функцией $\varphi(u, v)$, $\varphi: U \times V \to R^n$, которая считается непрерывной по совокупности переменных на прямом произведении непустых компактов U и V; m, l, n — натуральные числа.

Управления игроков $u(\tau)$, $u: R_+ \to U$, и $\upsilon(\tau)$, $\upsilon: R_+ \to V$, являются измеримыми функциями времени. Кроме процесса (1) задана собственная выпуклая замкнутая ограниченная снизу по z функция $\sigma(z)$, $\sigma: R^n \to R^1$, значения которой на траекториях процесса (1) определяют момент окончания игры. Если $z(t)$, $t \ge 0$, — траектория системы (1), то игра считается законченной в момент $t_1 > 0$, если

$$\sigma(z(t_1)) \le 0. \tag{2}$$

Цели первого игрока u и второго игрока υ противоположны. Первый (назовем его преследователем) пытается выполнить неравенство (2) на соответствующей траектории процесса (1) за кратчайшее время, а второй игрок пытается максимально оттянуть момент выполнения этого неравенства или избежать его выполнение.

Примем сторону первого игрока и будем ориентироваться на выбор противником в качестве управления произвольной измеримой функции, которая принимает значения из V. При этом будем считать, что если игра (1), (2) продолжается на интервале $[0, T]$, то управление первого игрока в момент t будем выбирать на основе информации о $g(T)$ и $\upsilon_t(\cdot)$, т.е. в виде измеримой функции

$$u(t) = u(g(T), \upsilon_t(\cdot)),\ t \in [0, T],\ u(t) \in U, \tag{3}$$

где $\upsilon_t(\cdot) = \{\upsilon(s) : s \in [0, t]\}$ — предыстория управления второго игрока к моменту t, или в виде контруправления

$$u(t) = u(g(T), \upsilon(\cdot)),\ t \in [0, T],\ u(t) \in U. \tag{4}$$

Если, в частности, $g(t) = e^{At} z_0$, $\Omega(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$, $z(0) = z_0$, а e^{At} — матричная экспонента, то считают, что управление $u(t) = u(z_0, \upsilon_t(\cdot))$ реализует квазистратегию [6], а контруправление [3] $u(t) = u(z_0, \upsilon(\cdot))$ является проявлением стробоскопической стратегии Хайека [7].

Согласно определению сопряженной функции и с учетом теоремы Фенхеля–Моро [9] имеем

$$\sigma(z) = \sup_{\psi \in R^n} [(\psi, z) - \sigma^*(\psi)],$$

где

$$\sigma^*(\psi) = \sup_{z \in R^n} [(\psi, z) - \sigma(z)]. \tag{5}$$

Функция $\sigma^*(\psi)$ — собственная, замкнутая и выпуклая [9]. Эффективное множество функции $\sigma^*(\psi)$ имеет вид $\operatorname{dom} \sigma^* = \{\psi \in R^n : \sigma^*(\psi) < +\infty\}$. В силу ограниченности снизу собственной функции $\sigma(z)$ и соотношения (5) получим $\sigma^*(0) = -\inf_{z \in R^n} \sigma(z)$, а значит, $0 \in \operatorname{dom} \sigma^*$.

Пусть L — линейная оболочка множества $\operatorname{dom} \sigma^*$ (пересечение всех линейных подпространств, которые содержат множество $\operatorname{dom} \sigma^*$). Тогда она является линейным подпространством. Обозначим π оператор ортогонального проектирования из R^n на L. Справедливо соотношение

$$\sigma(z) = \sigma(\pi z),\ z \in R^n.$$

Обозначим $\varphi(U, \upsilon) = \{\varphi(u, \upsilon) : u \in U\}$ и рассмотрим на множестве $\Delta \times V$ многозначное отображение

$$W(t, \tau, \upsilon) = \operatorname{co} \pi \Omega(t, \tau) \varphi(U, \upsilon).$$

Здесь $\operatorname{co} A$ – овыпуклениe множества A [9], $\Delta = \{(t, \tau) : 0 \le \tau \le t < \infty\}$.

Предположим, что отображение $\pi \Omega(t, \tau) \varphi(U, \upsilon)$ имеет замкнутые значения, а границы множеств $W(t, \tau, \upsilon)$ и $\pi \Omega(t, \tau) \varphi(U, \upsilon)$ совпадают на множестве $\Delta \times V$.

С учетом предположений о матричной функции $\Omega(t, \tau)$ можно сделать вывод, что при любом фиксированном $t > 0$ вектор-функция $\pi\Omega(t, \tau)\varphi(u, \upsilon)$ будет $\mathrm{L} \otimes \mathrm{B}$-измеримой по $(\tau, \upsilon) \in [0, t] \times V$ и непрерывной по $u \in U$. Поэтому при любом фиксированном $t > 0$ многозначные отображения $\pi\Omega(t, \tau)\varphi(U, \upsilon)$ и $W(t, \tau, \upsilon)$ имеют замкнутые значения и являются $\mathrm{L} \otimes \mathrm{B}$-измеримыми по $(\tau, \upsilon) \in [0, t] \times V$ [8].

Условие 1 (условие Понтрягина). Многозначное отображение $\bigcap_{\upsilon \in V} \pi\Omega(t, \tau)\varphi(U, \upsilon)$ принимает непустые значения на множестве Δ, где $\Delta = \{(t, \tau): 0 \le \tau \le t < \infty\}$.

В выпуклом анализе [9] при описании множеств ключевую роль играют опорные функции $C^*(X, \psi) = \sup_{x \in X} (\psi, x)$ и $C_*(X, \psi) = \inf_{x \in X} (\psi, x)$, где множество X является элементом пространства R^n. Назовем функции $C^*(X, \psi) = \sup_{x \in X} (\psi, x)$ верхними, а функции $C_*(X, \psi) = \inf_{x \in X} (\psi, x)$ нижними опорными функциями.

Если множество X выпукло и замкнуто, то между ним и его верхней и нижней опорными функциями существует взаимно однозначное соответствие [9], причем

$$X = \{x : (x, \psi) \le C^*(X, \psi) \ \ \forall \psi \in R^n\} = \{x : (x, \psi) \ge C_*(X, \psi) \ \ \forall \psi \in R^n\}.$$

Замечание 1. В работе [23] введено понятие лексикографического минимума по ортогональому базису $e_1, \ldots, e_n$ от компакта $A \in K(R^n)$ по формуле

$$\operatorname*{lex\,min}_{e_1, \ldots, e_n} A = \bigcap_{k=0}^{n} A_k,$$

где $A_0 = A$, $A_k = \{x \in A_{k-1} : (x, e_k) = C_*(A_{k-1}, \psi)\}$, $C_*(A_{k-1}, \psi)$ — нижняя опорная функция множества A_{k-1}, $k = 1, \ldots, n$ [24]. Множество $\operatorname*{lex\,min}_{e_1, \ldots, e_n} A$ состоит из одной точки, принадлежащей множеству крайних точек выпуклой оболочки множества A [24]. При этом если взять компактнозначное $\mathrm{L} \otimes \mathrm{B}$-измеримое многозначное отображение $U(\tau, \upsilon)$ и ортогональный базис такой, что $e_1 = \psi$, $\psi \in R^m$, $\psi \ne 0$, то [24] выполняется равенство

$$\left(\operatorname*{lex\,min}_{e_1, \ldots, e_n} U(\tau, \upsilon), \psi \right) = C_*(U(\tau, \upsilon), \psi), \ \tau \in [0, t], \ \upsilon \in V, \ t > 0.$$

Лемма 1 [24]. Пусть многозначное отображение $U(\tau, \upsilon)$ компактнозначно, $\mathrm{L} \otimes \mathrm{B}$-измеримо и $\psi \in R^m$, $\psi \ne 0$. Тогда существует $\mathrm{L} \otimes \mathrm{B}$-измеримый селектор $u(\tau, \upsilon)$ многозначного отображения $U(\tau, \upsilon)$ такой, что $(u(\tau, \upsilon), \psi) = C_*(U(\tau, \upsilon), \psi)$, и который является суперпозиционно измеримой функцией [1], $\tau \in [0, t]$, $t > 0$, $\upsilon \in V$.

Пусть $\gamma(t, \tau)$, $\gamma : \Delta \to L$, $\Delta = \{(t, \tau)$: $0 \le \tau \le t < \infty\}$, — некоторая почти везде ограниченная измеримая по t и суммируемая по τ, $\tau \in [0, T]$, для каждого $t > 0$ функция, которую, следуя [1], будем называть функцией сдвига.

Условие 2. Для некоторой функции сдвига $\gamma(t, \tau)$, $\gamma : \Delta \to L$, на множестве $\Delta \times V$ имеет место неравенство $\max_{\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*} C_*(W(t, \tau, \upsilon) - \gamma(t, \tau), \psi) \le 0$.

Замечание 2. Условие 2 эквивалентно включению $0 \in \operatorname{co}[W(t, \tau, \upsilon) - \gamma(t, \tau)]$ для всех $\tau \in [0, t]$, $\upsilon \in V$, которое не гарантирует выполнения условия 1. При этом если $W(t, \tau, \upsilon) = \pi\Omega(t, \tau)\varphi(U, \upsilon)$, то условие 2 гарантирует справедливость условия 1.

Зафиксируем некоторую функцию сдвига $\gamma(t, \tau)$ и положим

$$\xi(t) = \xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) = \pi g(t) + \int_0^t \gamma(t, \tau) d\tau.$$

Рассмотрим множество

$$\mathrm{P}(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \{t \geq 0 : \sigma(\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) \leq 0\}.$$

Если неравенство в фигурных скобках не выполняется ни для каких $t \geq 0$, то положим $\mathrm{P}(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \varnothing$.

Теорема 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по z функцией, выполнено условие 2 и для соответствующей функции сдвига $\gamma(t, \tau)$ множество $\mathrm{P}(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не пусто и $\mathrm{P} \in \mathrm{P}(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент P с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau \in [0, \mathrm{P}]$. Зададим способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим многозначное отображение $W(\mathrm{P}, \tau, v) - \gamma(\mathrm{P}, \tau)$ для $\tau \in [0, \mathrm{P}]$, $v \in V$. В силу леммы 1 и условия 2 существует $\mathrm{L} \otimes \mathrm{B}$-измеримый селектор $u_0(\tau, v)$ многозначного отображения $W(\mathrm{P}, \tau, v) - \gamma(\mathrm{P}, \tau)$ такой, что для $\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*$, $\psi \neq 0$, справедливо неравенство

$$(u_0(\tau, v) - \gamma(\mathrm{P}, \tau), \psi) = C_*(W(\mathrm{P}, \tau, v) - \gamma(\mathrm{P}, \tau), \psi) \leq 0. \tag{6}$$

Отметим, что селектор $u_0(\tau, v)$ является суперпозиционно измеримой функцией [1], $\tau \in [0, \mathrm{P}]$, $v \in V$. Положим управление первого игрока $u_0(\tau) = u_0(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0, \mathrm{P}]$.

С учетом равенства $\sigma(z(\mathrm{P})) = \sigma(\pi z(\mathrm{P}))$, формулы (1) и определения сопряженной функции получим

$$\sigma(z(\mathrm{P})) =$$

$$= \max_{\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*} \left[(\psi, \xi(\mathrm{P}) + \int_0^{\mathrm{P}} (\psi, \pi\Omega(\mathrm{P}, \tau)\varphi(u_0(\tau), v(\tau)) - \gamma(\mathrm{P}, \tau)) d\tau - \sigma^*(\psi) \right]. \tag{7}$$

Тогда (6) и (7) определяют соотношение

$$\sigma(z(\mathrm{P})) \leq \sigma(\xi(\mathrm{P}, g(\mathrm{P}), \gamma(\mathrm{P}, \cdot))) \leq 0,$$

откуда следует неравенство (2) в момент P.

Замечание 3. Из условия 1 следует, что существует измеримый селектор $\gamma(t, \tau)$, $\gamma(t, \tau) \in W(t, \tau)$, для которого выполняется условие 2 и справедлива теорема 1.

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathrm{A}(t, \tau, v) = \left\{ \alpha \geq 0 \colon \sup_{\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*} [C_*(W(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau), \psi) + \alpha[(\psi, \xi(t) - \sigma^*(\psi)]] \leq 0 \right\}.$$

Условие 3. На множестве Δ справедливо неравенство

$$\sup_{v \in V} \sup_{\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*} [C_*(W(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau), \psi) + \mathrm{A}(t, \tau, v)[(\psi, \xi(t) - \sigma^*(\psi)]] \leq 0.$$

Если условия 3 выполнено, то многозначное отображение $\mathrm{A}(t, \tau, v)$ не пусто на множестве $\Delta \times V$ и порождает верхнюю и нижнюю скалярные разрешающие функции первого типа

$$\alpha^*(t, \tau, v) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathrm{A}(t, \tau, v)\}, \ \alpha^*(t, \tau, v) = \inf\{\alpha : \alpha \in \mathrm{A}(\mathrm{t}, \tau, v)\},$$

$$\tau \in [0, t], \ v \in V.$$

В работе [1] показано, что многозначное отображение $\mathrm{A}(t, \tau, v)$ является замкнутозначным, $\mathrm{L} \otimes \mathrm{B}$-измеримым по совокупности (τ, v), $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, а верхняя и нижняя разрешающие функции, являясь соответственно верхней и нижней опорными функциями многозначного отображения $A(t, \tau, v)$ в направлении $+1$, $L \otimes B$-измеримы по совокупности (τ, v), $\tau \in [0, t]$, $v \in V$. Поэтому они суперпозиционно измеримы [1], т.е. $\alpha^*(t, \tau, v(\tau))$ и $\alpha_*(t, \tau, v(\tau))$ измеримы по τ, $\tau \in [0, t]$, при любой измеримой функции $v(\cdot) \in V(\cdot)$, где $V(\cdot)$ — совокупность измеримых функций $v(\tau)$, $\tau \in [0, +\infty]$, со значениями из V. Отметим также, что верхняя разрешающая функция полунепрерывна сверху, а нижняя — полунепрерывна снизу по переменной v и функции $\inf_{v \in V} \alpha^*(t, \tau, v)$ и $\sup_{v \in V} \alpha_*(t, \tau, v)$ измеримы по τ, $\tau \in [0, t]$.

Рассмотрим множество

$$\mathrm{P}_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \left\{ t \geq 0 : \sigma(\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot))) \leq 0, \ \int_0^t \sup_{v \in V} \alpha_*(t, \tau, v) d\tau < 1 \right\}.$$

Если неравенства в фигурных скобках не выполняются ни для каких $t \geq 0$, то положим $\mathrm{P}_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \varnothing$.

Теорема 2. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по z функцией, выполнено условие 3 и для соответствующей функции сдвига $\gamma(t, \tau)$ множество $\mathrm{P}_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не пусто и $\mathrm{P}_*^1 \in \mathrm{P}_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент P_*^1 с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^1]$. Зададим способ выбора управления преследователем.

В силу условия 3 и леммы 1 существует $L \otimes B$-измеримый селектор $u_*^1(\tau, v)$ многозначного отображения $W(\mathrm{P}_*^1, \tau, v) - \gamma(\mathrm{P}_*^1, \tau)$ такой, что для $\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*$, $\psi \neq 0$, $v \in V$, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^1]$ справедливы соотношения

$$(u_*^1(\tau, v) - \gamma(\mathrm{P}_*^1, \tau), \psi) = C_*(W(\mathrm{P}_*^1, \tau, v) - \gamma(\mathrm{P}_*^1, \tau), \psi),$$

$$\sup_{\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*} [(u_*^1(\tau, v) - \gamma(\mathrm{P}_*^1, \tau), \psi) + \alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, v)[(\psi, \xi(\mathrm{P}_*^1) - \sigma^*(\psi)]] \leq 0. \quad (8)$$

Пусть управление первого игрока имеет вид $u_*^1(\tau) = u_*^1(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^1]$. Прибавляя и вычитая в квадратных скобках выражения (7) величину $[(\psi, \xi(\mathrm{P}_*^1)) - \sigma^*(\psi)] \int_0^{\mathrm{P}_*^1} \alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, v(\tau)) d\tau$, получаем

$$\sigma(z(\mathrm{P}_*^1)) = \max_{\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*} \left\{ [(\psi, \xi(\mathrm{P}_*^1)) - \sigma^*(\psi)] \left(1 - \int_0^{\mathrm{P}_*^1} \alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, v(\tau)) d\tau \right) + \right.$$
$$+ \int_0^{\mathrm{P}_*^1} [(\psi, \pi\Omega(\mathrm{P}_*^1, \tau)\varphi(u_*^1(\tau), v(\tau)) - \gamma(\mathrm{P}_*^1, \tau)) d\tau +$$
$$\left. + \alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, v(\tau))[(\psi, \xi(\mathrm{P}_*^1)) - \sigma^*(\psi)]] d\tau \right\}. \quad (9)$$

Ввиду соотношений (8), (9) преследователь может гарантировать в момент P_*^1 выполнение неравенства

$$\sigma(z(\mathrm{P}_*^1)) \leq \sigma(\xi(\mathrm{P}_*^1, g(\mathrm{P}_*^1), \gamma(\mathrm{P}_*^1, \cdot))) \left(1 - \int_0^{\mathrm{P}_*^1} \alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, v(\tau)) d\tau \right).$$

При этом по определению P_*^1 имеем $\sigma(\xi(\mathrm{P}_*^1, g(\mathrm{P}_*^1), \gamma(\mathrm{P}_*^1, \cdot))) \le 0$, а

$$1 - \int_0^{\mathrm{P}_*^1} \alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, \upsilon(\tau)) d\tau \ge 1 - \int_0^{\mathrm{P}_*^1} \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, \upsilon) d\tau > 0 .$$

Поэтому имеем

$$\sigma(z(\mathrm{P}_*^1)) \le \sigma(\xi(\mathrm{P}_*^1, g(\mathrm{P}_*^1), \gamma(\mathrm{P}_*^1, \cdot))) \left(1 - \int_0^{\mathrm{P}_*^1} \alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, \upsilon(\tau)) d\tau \right) \le 0 ,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Замечание 4. Если для некоторой функции сдвига $\gamma(t, \tau)$, $\gamma : \Delta \to L$, на множестве $\Delta \times V$ выполнено условие 2, то $0 \in \mathrm{A}(t, \tau, \upsilon)$, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^1]$, $\upsilon \in V$. Поэтому справедливо условие 3 и $\alpha_*(t, \tau, \upsilon) = \inf \{\alpha : \alpha \in \mathrm{A}(t, \tau, \upsilon)\} = 0$ на множестве $\Delta \times V$.

Условие 4. На множестве Δ выполнено условие 3 и справедливо неравенство

$$\sup_{\upsilon \in V} \sup_{\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*} [C_*(W(t, \tau, \upsilon) - \gamma(t, \tau), \psi) + \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(t, \tau, \upsilon)[(\psi, \xi(t) - \sigma^*(\psi)]] \le 0 .$$

Замечание 5. Если для некоторой функции сдвига $\gamma(t, \tau)$, $\gamma : \Delta \to L$, на множестве $\Delta \times V$ выполнено условие 2, то справедливо условие 4 и $\sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(t, \tau, \upsilon) = 0$ на множестве Δ.

Рассмотрим множество

$$T(g(t), \gamma(\cdot, \cdot)) = \left\{ t \ge 0 : \int_0^t \inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(t, \tau, \upsilon)\, d\tau \ge 1, \int_0^t \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(t, \tau, \upsilon) d\tau < 1 \right\}. \qquad (10)$$

Если при некотором $t > 0$ $\alpha^*(t, \tau, \upsilon) \equiv +\infty$ для $\tau \in [0, t]$, $\upsilon \in V$, то значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (10) естественно положить равным $+\infty$, и $t \in T(g(t), \gamma(\cdot, \cdot))$, если для этого t справедливо второе неравенство в фигурных скобках соотношения (10). В случае, когда оба неравенства в соотношении (10) не выполняются при всех $t > 0$, положим $T(g(t), \gamma(\cdot, \cdot)) = \varnothing$.

Теорема 3. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по z функцией, выполнено условие 4 и для соответствующей функции сдвига $\gamma(\cdot, \cdot)$ множество $T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не пусто, а $T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент T с использованием управления вида (3).

Доказательство. Пусть $\upsilon(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau \in [0, T]$.

Рассмотрим вначале случай $\sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) > 0$ и введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau)) d\tau - \int_t^T \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T, \tau, \upsilon) d\tau, \quad t \in [0, T] .$$

По определению T имеем

$$h(0) = 1 - \int_0^T \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T, \tau, \upsilon)\, d\tau > 0 ,$$

$$h(T) = 1 - \int_0^T \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau))\, d\tau \le 1 - \int_0^T \inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(t, \tau, \upsilon) d\tau \le 0 .$$

Поэтому ввиду непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_* \in (0, T]$, что $h(t_*) = 0$. Отметим, что момент переключения t_* зависит от предыстории управления второго игрока $\upsilon_{t_*}(\cdot) = \{\upsilon(s): s \in [0, t_*]\}$.

Промежутки времени $[0, t_*)$, $[t_*, T]$ назовем активным и пассивным соответственно. Опишем способ управления для первого игрока на каждом промежутке.

В силу условия 3 и леммы 1 существует $L \otimes B$-измеримый селектор $u_1^*(\tau, \upsilon)$ многозначного отображения $W(T, \tau, \upsilon) - \gamma(T, \tau)$ такой, что для $\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*$, $\psi \neq 0$, $\upsilon \in V$, $\tau \in [0, t_*)$ справедливы соотношения

$$(u_1^*(\tau, \upsilon) - \gamma(T, \tau), \psi) = C_*(W(T, \tau, \upsilon) - \gamma(T, \tau), \psi),$$

$$\sup_{\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*} [(u_1^*(\tau, \upsilon) - \gamma(T, \tau), \psi) + \alpha^*(T, \tau, \upsilon)[(\psi, \xi(T) - \sigma^*(\psi)]] \leq 0. \qquad (11)$$

Примем управление первого игрока на активном промежутке времени $u_1^*(\tau) = u_1^*(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [0, t_*)$.

Ввиду условия 4 и леммы 1 существует $L \otimes B$-измеримый селектор $u_*^1(\tau, \upsilon)$ многозначного отображения $W(T, \tau, \upsilon) - \gamma(T, \tau)$ такой, что для $\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*$, $\psi \neq 0$, $\upsilon \in V$, $\tau \in [t_*, T]$ справедливы соотношения

$$(u_*^1(\tau, \upsilon) - \gamma(T, \tau), \psi) = C_*(W(T, \tau, \upsilon) - \gamma(T, \tau), \psi),$$

$$\sup_{\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*} [(u_*^1(\tau, \upsilon) - \gamma(T, \tau), \psi) + \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T, \tau, \upsilon)[(\psi, \xi(t) - \sigma^*(\psi)]] \leq 0. \qquad (12)$$

Пусть управление первого игрока на пассивном промежутке времени имеет вид $u_*^1(\tau) = u_*^1(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [t_*, T]$.

Принимая во внимание равенство $\sigma(z(T)) = \sigma(\pi z(T))$, формулу (1) и определение сопряженной функции, получаем

$$\sigma(z(T)) = \max_{\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*} \left[(\psi, \xi(T)) + \int_0^{t_*} (\psi, \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u_1^*(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(T, \tau)) d\tau + \right.$$
$$\left. + \int_{t_*}^{T} (\psi, \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u_*^1(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(T, \tau)) d\tau - \sigma^*(\psi) \right]. \qquad (13)$$

Прибавим и вычтем в квадратных скобках выражения (13) величину

$$[(\psi, \xi(T)) - \sigma^*(\psi)] \left[\int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau))\, d\tau + \int_{t_*}^{T} \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T, \tau, \upsilon)\, d\tau \right].$$

Тогда получим

$$\sigma(z(T)) = \max_{\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*} \left\{ [(\psi, \xi(T)) - \sigma^*(\psi)]\, h(t_*) + \right.$$
$$+ \int_0^{t_*} [(\psi, \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u_1^*(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(T, \tau)) + \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau))[(\psi, \xi(T)) - \sigma^*(\psi)]] d\tau +$$
$$\left. + \int_{t_*}^{T} [(\psi, \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u_*^1(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(T, \tau)) + \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T, \tau, \upsilon)[(\psi, \xi(T)) - \sigma^*(\psi)]] d\tau \right\}.$$

Отсюда с учетом соотношений (11), (12) вытекает, что преследователь может гарантировать в момент T выполнение неравенства

$$\sigma(z(T)) \le \sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)))h(t_*) = 0\,.$$

Для случая $\sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) \le 0$ достаточно применить теорему 2 и этим завершить доказательство теоремы.

Условие 5. На множестве Δ выполнено условие 3 и справедливо неравенство

$$\sup_{v\in V} \sup_{\psi\in\mathrm{dom}\sigma^*} [C_*(W(t,\tau,v) - \gamma(t,\tau), \psi) + \inf_{v\in V} \alpha^*(t,\tau,v)[(\psi, \xi(t) - \sigma^*(\psi)]] \le 0\,.$$

Теорема 4. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по z функцией, выполнены условия 4, 5 и для соответствующей функции сдвига $\gamma(\cdot,\cdot)$ множество $T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто, а $T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент T с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau \in [0, T]$.

Рассмотрим вначале случай $\sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) > 0$ и введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \int_0^t \inf_{v\in V} \alpha^*(T,\tau,v)d\tau - \int_t^T \sup_{v\in V} \alpha_*(T,\tau,v)d\tau,\ \ t \in [0, T]\,.$$

По определению T имеем

$$h(0) = 1 - \int_0^T \sup_{v\in V} \alpha_*(T,\tau,v)\,d\tau > 0\,,\ \ h(T) = 1 - \int_0^T \inf_{v\in V} \alpha^*(T,\tau,v)\,d\tau \le 0\,.$$

Ввиду непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_* \in (0, T]$, что $h(t_*) = 0$. Отметим, что момент переключения t_* не зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot) = \{v(s): s \in [0, t_*]\}$.

Промежутки времени $[0, t_*)$, $[t_*, T]$ назовем активным и пассивным соответственно. Опишем способ управления для первого игрока на каждом промежутке времени.

В силу условия 5 и леммы 1 существует $L \otimes B$-измеримый селектор $\tilde{u}_1^*(\tau, v)$ многозначного отображения $W(T,\tau,v) - \gamma(T,\tau)$ такой, что для $\psi \in \mathrm{dom}\,\sigma^*$, $\psi \ne 0$, $v \in V$, $\tau \in [0, t_*)$ справедливы соотношения

$$(\tilde{u}_1^*(\tau,v) - \gamma(T,\tau), \psi) = C_*(W(T,\tau,v) - \gamma(T,\tau), \psi)\,,$$

$$\sup_{\psi\in\mathrm{dom}\ \sigma^*} [(\tilde{u}_1^*(\tau,v) - \gamma(T,\tau), \psi) + \inf_{v\in V} \alpha^*(T,\tau,v)[(\psi, \xi(T) - \sigma^*(\psi)]] \le 0\,. \quad (14)$$

Пусть управление первого игрока на активном промежутке времени $\tilde{u}_1^*(\tau) = \tilde{u}_1^*(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0, t_*)$.

Ввиду условия 4 и леммы 1 существует $L \otimes B$-измеримый селектор $\tilde{u}_*^1(\tau, v)$ многозначного отображения $W(T,\tau,v) - \gamma(T,\tau)$ такой, что для $\psi \in \mathrm{dom}\,\sigma^*$, $\psi \ne 0$, $v \in V$, $\tau \in [t_*, T]$ справедливы соотношения

$$(\widetilde{u}_*^1(\tau, \upsilon) - \gamma(T, \tau), \psi) = C_*(W(T, \tau, \upsilon) - \gamma(T, \tau), \psi),$$

$$\sup_{\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*} [(\widetilde{u}_*^1(\tau, \upsilon) - \gamma(T, \tau), \psi) + \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T, \tau, \upsilon)[(\psi, \xi(T) - \sigma^*(\psi)]] \le 0. \quad (15)$$

Положим управление первого игрока на пассивном промежутке времени $\widetilde{u}_*^1(\tau) = \widetilde{u}_*^1(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [t_*, T]$.

Принимая во внимание равенство $\sigma(z(T)) = \sigma(\pi z(T))$, формулу (1) и определение сопряженной функции, получаем

$$\sigma(z(T)) = \max_{\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*} \left[(\psi, \xi(T)) + \int_0^{t_*} (\psi, \pi\Omega(T, \tau)\varphi(\widetilde{u}_1^*(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(T, \tau)) d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{t_*}^{T} (\psi, \pi\Omega(T, \tau)\varphi(\widetilde{u}_*^1(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(T, \tau)) d\tau - \sigma^*(\psi) \right]. \quad (16)$$

Прибавим и вычтем в квадратных скобках выражения (16) величину

$$[(\psi, \xi(T)) - \sigma^*(\psi)] \left[\int_0^{t_*} \inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(T, \tau, \upsilon)\, d\tau + \int_{t_*}^{T} \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T, \tau, \upsilon)\, d\tau \right].$$

Тогда получим

$$\sigma(z(T)) = \max_{\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*} \left\{ [(\psi, \xi(T)) - \sigma^*(\psi)]\, h(t_*) + \right.$$

$$+ \int_0^{t_*} [(\psi, \pi\Omega(T, \tau)\varphi(\widetilde{u}_1^*(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(T, \tau)) + \inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(T, \tau, \upsilon)[(\psi, \xi(T)) - \sigma^*(\psi)]] d\tau +$$

$$\left. + \int_{t_*}^{T} [(\psi, \pi\Omega(T, \tau)\varphi(\widetilde{u}_*^1(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(T, \tau)) + \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T, \tau, \upsilon)[(\psi, \xi(T)) - \sigma^*(\psi)]] d\tau \right\}.$$

Отсюда с учетом соотношений (14), (15) вытекает, что преследователь может гарантировать в момент T выполнение неравенства

$$\sigma(z(T)) \le \sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)))h(t_*) = 0.$$

Для случая $\sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) \le 0$ достаточно применить теорему 2 и этим завершить доказательство теоремы.

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА. РАЗРЕШАЮЩИЕ ФУНКЦИИ ВТОРОГО ТИПА

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathrm{A}(t, \tau) = \bigcap_{\upsilon \in V} \mathrm{A}(t, \tau, \upsilon), \ (t, \tau) \in \Delta.$$

Условие 6. На множестве Δ справедливо неравенство

$$\sup_{\upsilon \in V} \sup_{\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*} [C_*(W(t, \tau, \upsilon) - \gamma(t, \tau), \psi) + \mathrm{A}(t, \tau)[(\psi, \xi(t) - \sigma^*(\psi)]] \le 0.$$

Если условие 6 выполнено, то многозначное отображение $\mathrm{A}(t, \tau)$ не пусто на множестве Δ и порождает верхнюю и нижнюю скалярные разрешающие функции второго типа

$$\alpha^*(t, \tau) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathrm{A}(t, \tau)\}, \ \alpha_*(t, \tau) = \inf\{\alpha : \alpha \in \mathrm{A}(\mathrm{t}, \tau)\}, \ \tau \in [0, t], \ \upsilon \in V.$$

Как показано в [1] многозначное отображение $\mathrm{A}(t, \tau)$ замкнутозначное, L-измеримо по τ, $\tau \in [0, t]$, $\upsilon \in V$, а верхняя и нижняя разрешающие функции, являясь соответственно верхней и нижней опорными функциями многозначного отображения $\mathrm{A}(t, \tau)$ в направлении $+1$, L-измеримы по τ, $\tau \in [0, t]$.

Замечание 6. Если для некоторой функции сдвига $\gamma(t, \tau)$ на множестве Δ выполнено условие 4, то $\sup\limits_{\upsilon \in V} \alpha_*(t, \tau, \upsilon) \in \mathrm{A}(t, \tau)$, $\tau \in [0, t]$. Тогда выполнено условия 6 и справедливо равенство $\sup\limits_{\upsilon \in V} \alpha_*(t, \tau, \upsilon) = \alpha_*(t, \tau)$, $\tau \in [0, t]$. Если для некоторой функции сдвига $\gamma(t, \tau)$ на множестве Δ выполнено условие 5, то $\inf\limits_{\upsilon \in V} \alpha^*(t, \tau, \upsilon) \in \mathrm{A}(t, \tau)$, $\tau \in [0, t]$. Тогда выполнено условие 6 и справедливо равенство $\inf\limits_{\upsilon \in V} \alpha^*(t, \tau, \upsilon) = \alpha^*(t, \tau)$, $\tau \in [0, t]$.

Рассмотрим множество

$$\mathrm{P}_*^2(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \left\{ t \geq 0 : \sigma(\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot))) \leq 0, \int_0^t \alpha_*(t, \tau)\, d\tau < 1 \right\}.$$

Если неравенства в фигурных скобках не выполняются ни для каких $t \geq 0$, то полагаем, что $\mathrm{P}_*^2(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \varnothing$.

Теорема 5. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по z функцией, выполнено условие 6 и для соответствующей функции сдвига $\gamma(t, \tau)$ множество $\mathrm{P}_*^2(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не пусто и $\mathrm{P}_*^2 \in \mathrm{P}_*^2(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент P_*^2 с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $\upsilon(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^1]$. Зададим способ выбора управления преследователем.

Ввиду условия 6 и леммы 1 существует $\mathrm{L} \otimes \mathrm{B}$-измеримый селектор $u_*^2(\tau, \upsilon)$ многозначного отображения $W(\mathrm{P}_*^2, \tau, \upsilon) - \gamma(\mathrm{P}_*^2, \tau)$ такой, что для $\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*$, $\psi \neq 0$, $\upsilon \in V$, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^2]$ справедливы соотношения

$$(u_*^2(\tau, \upsilon) - \gamma(\mathrm{P}_*^2, \tau), \psi) = C_*(W(\mathrm{P}_*^2, \tau, \upsilon) - \gamma(\mathrm{P}_*^2, \tau), \psi),$$

$$\sup_{\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*} [(u_*^2(\tau, \upsilon) - \gamma(\mathrm{P}_*^2, \tau), \psi) + \alpha_*(\mathrm{P}_*^2, \tau)[(\psi, \xi(\mathrm{P}_*^2) - \sigma^*(\psi)]] \leq 0. \quad (17)$$

Положим управление первого игрока $u_*^2(\tau) = u_*^2(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^2]$. Прибавляя и вычитая в квадратных скобках выражения (17) величину

$$[(\psi, \xi(\mathrm{P}_*^2)) - \sigma^*(\psi)] \int_0^{\mathrm{P}_*^2} \alpha_*(\mathrm{P}_*^2, \tau) d\tau, \text{ получаем}$$

$$\sigma(z(\mathrm{P}_*^2)) = \max_{\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*} \left\{ [(\psi, \xi(\mathrm{P}_*^2)) - \sigma^*(\psi)] \left(1 - \int_0^{\mathrm{P}_*^2} \alpha_*(\mathrm{P}_*^2, \tau) d\tau \right) + \right. \tag{18}$$

$$\left. + \int_0^{\mathrm{P}_*^2} [(\psi, \pi\Omega(\mathrm{P}_*^2, \tau)\varphi(u_*^2(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(\mathrm{P}_*^2, \tau)) + \alpha_*(\mathrm{P}_*^2, \tau)[(\psi, \xi(\mathrm{P}_*^2)) - \sigma^*(\psi)]] d\tau \right\}.$$

В силу соотношений (17), (18) преследователь может гарантировать в момент P_*^2 выполнение неравенства

$$\sigma(z(\mathrm{P}_*^2)) \le \sigma(\xi(\mathrm{P}_*^2, g(\mathrm{P}_*^2), \gamma(\mathrm{P}_*^2, \cdot))) \left(1 - \int_0^{\mathrm{P}_*^2} \alpha_*(\mathrm{P}_*^2, \tau) d\tau \right).$$

При этом по определению P_*^2 имеем $\sigma(\xi(\mathrm{P}_*^2, g(\mathrm{P}_*^2), \gamma(\mathrm{P}_*^2, \cdot))) \le 0$, а

$$1 - \int_0^{\mathrm{P}_*^2} \alpha_*(\mathrm{P}_*^2, \tau) d\tau > 0 .$$

Таким образом, имеем

$$\sigma(z(\mathrm{P}_*^2)) \le \sigma(\xi(\mathrm{P}_*^2, g(\mathrm{P}_*^2), \gamma(\mathrm{P}_*^2, \cdot))) \left(1 - \int_0^{\mathrm{P}_*^2} \alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau) d\tau \right) \le 0 ,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Замечание 7. Если для некоторой функции сдвига $\gamma(t, \tau)$, $\gamma : \Delta \to L$, на множестве $\Delta \times V$ выполнено условие 2, то $0 \in \mathrm{A}(t, \tau)$, $\tau \in [0, t]$. Поэтому выполнены условия 4, 6 и на множестве Δ справедливо равенство $\sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(t, \tau, \upsilon) = \alpha_*(t, \tau) = 0$.

Рассмотрим множество

$$\Theta(g(t), \gamma(\cdot, \cdot)) = \left\{ t \ge 0 : \int_0^t \alpha^*(t, \tau)\, d\tau \ge 1, \int_0^t \alpha_*(t, \tau)\, d\tau < 1 \right\}. \tag{19}$$

Если при некотором $t > 0$ имеем $\alpha^*(t, \tau) \equiv +\infty$ для $\tau \in [0, t]$, $\upsilon \in V$, то значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (19) естественно положить равным $+\infty$, и $t \in T(g(t), \gamma(\cdot, \cdot))$, если для этого t справедливо второе неравенство в фигурных скобках соотношения (19). В случае, когда неравенства в соотношении (19) не выполняются при всех $t > 0$, положим $\Theta(g(t), \gamma(\cdot, \cdot)) = \varnothing$.

Теорема 6. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по z функцией, выполнено условие 3 и для соответствующей функции сдвига $\gamma(\cdot, \cdot)$ множество $\Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не пусто, а $\Theta \in \Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент Θ с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $\upsilon(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau \in [0, \Theta]$.

Рассмотрим вначале случай $\sigma(\xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\Theta, \cdot))) > 0$ и введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha^*(\Theta, \tau) d\tau - \int_t^T \alpha_*(\Theta, \tau) d\tau, \quad t \in [0, \Theta].$$

По определению Θ имеем

$$h(0)=1-\int_0^{\Theta}\alpha_*(\Theta,\tau)\,d\tau>0\,,\quad h(\Theta)=1-\int_0^{\Theta}\alpha^*(\Theta,\tau)\,d\tau\le 0\,.$$

В силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_*\in(0,T]$, что $h(t_*)=0$. Отметим, что момент переключения t_* не зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot)=\{v(s)\colon s\in[0,t_*]\}$.

Промежутки времени $[0,t_*)$, $[t_*,\Theta]$ назовем активным и пассивным соответственно. Опишем способ управления для первого игрока на каждом промежутке времени.

В силу условия 6 и леммы 1 существует $L\otimes B$-измеримый селектор $\widetilde{u}_2^*(\tau,v)$ многозначного отображения $W(\Theta,\tau,v)-\gamma(\Theta,\tau)$ такой, что для $\psi\in\operatorname{dom}\sigma^*$, $\psi\ne 0$, $v\in V$, $\tau\in[0,t_*)$ справедливы соотношения

$$(\widetilde{u}_2^*(\tau,v)-\gamma(\Theta,\tau),\psi)=C_*(W(\Theta,\tau,v)-\gamma(\Theta,\tau),\psi)\,,$$

$$\sup_{\psi\in\operatorname{dom}\sigma^*}[(\widetilde{u}_2^*(\tau,v)-\gamma(\Theta,\tau),\psi)+\alpha^*(\Theta,\tau)[(\psi,\xi(\Theta)-\sigma^*(\psi)]]\le 0\,. \tag{20}$$

Положим управление первого игрока на активном промежутке времени $\widetilde{u}_2^*(\tau)=\widetilde{u}_2^*(\tau,v(\tau))$, $\tau\in[0,t_*)$.

Ввиду условия 6 и леммы 1 существует $L\otimes B$-измеримый селектор $\widetilde{u}_*^2(\tau,v)$ многозначного отображения $W(\Theta,\tau,v)-\gamma(\Theta,\tau)$ такой, что для $\psi\in\operatorname{dom}\sigma^*$, $\psi\ne 0$, $v\in V$, $\tau\in[t_*,\Theta]$ справедливы соотношения

$$(\widetilde{u}_*^2(\tau,v)-\gamma(\Theta,\tau),\psi)=C_*(W(\Theta,\tau,v)-\gamma(\Theta,\tau),\psi)\,,$$

$$\sup_{\psi\in\operatorname{dom}\sigma^*}[(\widetilde{u}_*^2(\tau,v)-\gamma(\Theta,\tau),\psi)+\alpha_*(\Theta,\tau)[(\psi,\xi(\Theta)-\sigma^*(\psi)]]\le 0\,. \tag{21}$$

Положим управление первого игрока на пассивном промежутке времени $\widetilde{u}_*^2(\tau)=\widetilde{u}_*^2(\tau,v(\tau))$, $\tau\in[t_*,\Theta]$.

Принимая во внимание равенство $\sigma(z(\Theta))=\sigma(\pi z(\Theta))$, формулу (1) и определение сопряженной функции, получаем

$$\sigma(z(\Theta))=\max_{\psi\in\operatorname{dom}\sigma^*}\left[(\psi,\xi(\Theta))+\int_0^{t_*}(\psi,\pi\Omega(\Theta,\tau)\varphi(\widetilde{u}_2^*(\tau),v(\tau))-\gamma(\Theta,\tau))d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_{t_*}^{\Theta}(\psi,\pi\Omega(\Theta,\tau)\varphi(\widetilde{u}_*^2(\tau),v(\tau))-\gamma(\Theta,\tau))d\tau-\sigma^*(\psi)\right]. \tag{22}$$

Прибавим и вычтем в квадратных скобках выражения (22) величину

$$[(\psi,\xi(\Theta))-\sigma^*(\psi)]\left[\int_0^{t_*}\alpha^*(\Theta,\tau)\,d\tau+\int_{t_*}^{\Theta}\alpha_*(\Theta,\tau)\,d\tau\right].$$

Тогда получим

$$\sigma(z(\Theta))=\max_{\psi\in\operatorname{dom}\sigma^*}\left\{[(\psi,\xi(\Theta))-\sigma^*(\psi)]h(t_*)+\right.$$

$$+\int_0^{t_*}[(\psi,\pi\Omega(\Theta,\tau)\varphi(\widetilde{u}_2^*(\tau),v(\tau))-\gamma(\Theta,\tau))+\alpha^*(\Theta,\tau)[(\psi,\xi(\Theta))-\sigma^*(\psi)]]d\tau+$$

$$+\int_{t_*}^{\Theta}[(\psi, \pi\Omega(\Theta,\tau)\varphi(\widetilde{u}_*^2(\tau), \upsilon(\tau))-\gamma(\Theta,\tau))+\alpha_*(\Theta,\tau)[(\psi, \xi(\Theta))-\sigma^*(\psi)]]d\tau\Bigg\}.$$

Отсюда с учетом соотношений (20), (21) вытекает, что преследователь может гарантировать в момент Θ выполнение неравенства

$$\sigma(z(\Theta)) \le \sigma(\xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\Theta,\cdot)))h(t_*)=0.$$

Для случая $\sigma(\xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\Theta,\cdot))) \le 0$ достаточно применить теорему 2 и этим завершить доказательство теоремы.

СРАВНЕНИЕ ГАРАНТИРОВАННЫХ ВРЕМЕН

Лемма 2. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по z функцией, и для некоторой функции сдвига $\gamma(t,\cdot)$ выполнено условие 6, причем $\sigma(\xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot)))>0$. Тогда имеют место неравенства

$$\sup_{\upsilon\in V}\alpha_*(t,\tau,\upsilon) \le \alpha_*(t,\tau),\ (t,\tau)\in\Delta, \tag{23}$$

$$\inf_{\upsilon\in V}\alpha^*(t,\tau,\upsilon) \ge \alpha^*(t,\tau),\ (t,\tau)\in\Delta. \tag{24}$$

Если при этом выполнено условие 4, то неравенство (23) преобразуется в равенство. Если справедливо условие 5, то в равенство обращается неравенство (24). При этом если многозначное отображение $\mathrm{A}(t,\tau,\upsilon)$ принимает выпуклые значения на множестве $\Delta\times V$, то справедливы условия 4 и 5 и в соотношениях (23) и (24) имеет место равенство.

Теорема 7. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по z функцией, при некоторой функции сдвига $\gamma(\cdot,\cdot)$ выполнено условие 6. Тогда имеют место включения

$$T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) \supset \Theta(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) \supset \mathrm{P}_*^2(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) \supset \mathrm{P}_*^1(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) \supset \mathrm{P}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)).$$

При этом если выполнены условия 4 и 5 или если многозначное отображение $\mathrm{A}(T,\tau,\upsilon)$ принимает выпуклые значения на множестве $\Delta\times V$, то справедливы равенства

$$T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) = \Theta(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)),\ \mathrm{P}_*^2(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) = \mathrm{P}_*^1(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)).$$

Если выполнено условие 2, то имеем

$$\mathrm{P}_*^2(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) = \mathrm{P}_*^1(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) = \mathrm{P}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)),$$

причем при выполнении условия 1 в качестве $\gamma(\cdot,\cdot)$ можно выбрать некоторый селектор Понтрягина [2].

Доказательство леммы 2 и теоремы 7 непосредственно следует из конструкций соответствующих определений, замечаний и теорем.

Теорема 8. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по z функцией, выполнено условие 3 и для соответствующей функции сдвига $\gamma(\cdot,\cdot)$ множество $T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто, $T\in T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ и многозначное отображение $\mathrm{A}(T,\tau,\upsilon)$ принимает выпуклые значения для всех (τ,υ), $\tau\in[0,T]$, $\upsilon\in V$. Тогда игра может быть закончена в момент T с использованием управления вида (4).

Доказательство автоматически вытекает из леммы 2 и теорем 6 и 7.

ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим простое движение

$\dot{z} = u - v$, $z \in R^n$, $z(0) = z_0$, $v \in S$, $u \in aS^0$, $a > 1$. Здесь S — единичный шар с центром в нуле, S^0 — его граница.

Выберем функцию сдвига $\gamma(t, \tau) \equiv 0$. Поскольку $\Omega(t, \tau) = E$, E — единичная матрица, $L = R^n$ и $\pi = E$, то $\xi(t) = z_0$. Положим $\sigma^*(\psi) = \varepsilon \|\psi\|$, $\psi \in R^n$, $\sigma(z) = \max\limits_{\|\psi\|=1} [(z, \psi) - \varepsilon \|\psi\|]$.

Условие Понтрягина не имеет места, поскольку $aS \overset{*}{-} S = \varnothing$, $\overset{*}{-}$ — геометрическая разность Минковского [22]. Тогда многозначное отображение $\mathrm{A}(t, \tau, v)$ не зависит от t, τ и имеет вид

$$\mathrm{A}(t, \tau, v) = \mathrm{A}(v, z_0) = \left\{ \alpha \ge 0 : \max_{\|\psi\|=1} [C_*(aS^0 - v, \psi) + \alpha[(z_0, \psi) - \varepsilon \|\psi\|]] \le 0 \right\}.$$

Это множество обладает непустыми образами и поэтому справедливо неравенство

$$\max_{v \in S} \max_{\|\psi\|=1} [-a\|\psi\| - (v, \psi) + \mathrm{A}(v, z_0)[(z_0, \psi) - \varepsilon \|\psi\|]] \le 0 .$$

Таким образом, выполнено условие 3.

Верхняя разрешающая функция определяется из соотношения

$$\alpha^*(t, \tau, v) = \alpha^*(v, z_0) = \sup\{\alpha \ge 0 : \max_{\|\psi\|=1} [-a\|\psi\| - (v, \psi) + \alpha[(z_0, \psi) - \varepsilon \|\psi\|]] \le 0\} =$$

$$= \sup\{\alpha > 0 : \|v - \alpha z_0\| = [a + \alpha\varepsilon]\}.$$

Отсюда следует, что она является большим положительным корнем квадратного уравнения

$$(\|z_0\|^2 - \varepsilon^2)\alpha^2 - 2[(v, z_0) + a\varepsilon]\alpha - (a^2 - \|v\|^2) = 0 .$$

Таким образом, справедлива формула

$$\alpha^*(v, z_0) = \frac{(v, z_0) + a\varepsilon + \sqrt{[(v, z_0) + a\varepsilon]^2 + (\|z_0\|^2 - \varepsilon^2)(a^2 - \|v\|^2)}}{\|z_0\|^2 - \varepsilon^2} .$$

При этом $\min\limits_{v \in S} \alpha^*(v, z_0) = \dfrac{a-1}{\|z_0\| - \varepsilon}$ достигается при $v = -\dfrac{z_0}{\|z_0\|}$.

Нижняя разрешающая функция определяется из соотношения

$$\alpha_*(t, \tau, v) = \alpha_*(v, z_0) = \inf\{\alpha \ge 0 : \max_{\|\psi\|=1} [-a\|\psi\| - (v, \psi) + \alpha[(z_0, \psi) - \varepsilon \|\psi\|]] \le 0\} =$$

$$= \sup\{\alpha \ge 0 : \max_{\|\psi\|=1} [-a\|\psi\| - (v, \psi) - \alpha[(z_0, -\psi) - \varepsilon \|\psi\|]] \le 0\} =$$

$$= \sup\{\alpha \ge 0 : \|v - \alpha z_0\| = [a - \alpha\varepsilon]\}.$$

Поэтому она является большим положительным корнем квадратного уравнения

$$(\|z_0\|^2 - \varepsilon^2)\alpha^2 - 2[(v, z_0) - a\varepsilon]\alpha - (a^2 - \|v\|^2) = 0 .$$

Следовательно, получим

$$\alpha_*(v, z_0) = \frac{(v, z_0) - a\varepsilon + \sqrt{[(v, z_0) - a\varepsilon]^2 + (\|z_0\|^2 - \varepsilon^2)(a^2 - \|v\|^2)}}{\|z_0\|^2 - \varepsilon^2} .$$

При этом $\max\limits_{v\in S} \alpha_*(v, z_0) = \dfrac{a+1}{\| z_0 \| + \varepsilon}$ достигается при $v = \dfrac{z_0}{\| z_0 \|}$.

Проверим справедливость условия 4. В силу построения верхней и нижней разрешающих функций должно выполняться условие $\min\limits_{v\in S} \alpha^*(v, z_0) \ge \max\limits_{v\in S} \alpha_*(v, z_0)$, которое приводит к неравенству

$$[a-1] \ge \frac{a+1}{\| z_0 \| + \varepsilon} [\| z_0 \| - \varepsilon]. \tag{25}$$

Имеют место соотношения

$$\max_{v\in S} \max_{\|\psi\|=1} [-a\|\psi\| + (v, \psi) + \max_{v\in S} \alpha_*(v, z_0)[(z_0, \psi) - \varepsilon\|\psi\|]] =$$

$$= \max_{\|\psi\|=1} [-[a-1]\|\psi\| + \max_{v\in S} \alpha_*(v, z_0)[(z_0, \psi) - \varepsilon\|\psi\|]] =$$

$$= -[a-1] + \frac{a+1}{\| z_0 \| + \varepsilon} [\| z_0 \| - \varepsilon] \le 0.$$

Тогда в силу неравенства (25) выполнено условие 4.

Проверим справедливость условия 5. Имеют место соотношения

$$\max_{v\in S} \max_{\|\psi\|=1} [-a\|\psi\| + (v, \psi) + \inf_{v\in S} \alpha^*(v, z_0)[(z_0, \psi) - \varepsilon\|\psi\|]] =$$

$$= \max_{\|\psi\|=1} [-[a-1]\|\psi\| + \inf_{v\in S} \alpha^*(v, z_0)[(z_0, \psi) - \varepsilon\|\psi\|]] =$$

$$= -[a-1] + \frac{a-1}{\| z_0 \| - \varepsilon} [\| z_0 \| - \varepsilon] = 0.$$

Поэтому справедливо условие 5.

В данном примере имеем

$$\int_0^T \min_{v\in V} \alpha^*(v, z_0)\, d\tau = \frac{a-1}{\| z_0 \| - \varepsilon} T = 1, \; T = T(z_0) = \frac{\| z_0 \| - \varepsilon}{a-1}.$$

При этом если параметры игры удовлетворяют условию

$$1 > \frac{\varepsilon}{\| z_0 \|} > \frac{1}{a}, \; a > 1,$$

то справедливо неравенство

$$\int_0^T \max_{v\in V} \alpha_*(v, z_0)\, d\tau = \frac{a+1}{\| z_0 \| + \varepsilon} T = \frac{(a+1)}{(\| z_0 \| + \varepsilon)} \frac{(\| z_0 \| - \varepsilon)}{(a-1)} < 1.$$

Следовательно, для рассматриваемого примера выполняются все условия теорем 3 и 4. В силу леммы 2 и замечания 6 для примера справедливы условия теоремы 6.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматриваются квазилинейные конфликтно-управляемые процессы общего вида с терминальной функцией платы. Сформулированы достаточные условия окончания игры за конечное гарантированное время в случае, когда условие Понтрягина не выполняется. Предложены две схемы метода разрешающих функций, обеспечивающих завершение конфликтно-управляемого процесса с терминальной функцией платы в классе квазистратегий и контруправлений, и приведено сравнение гарантированных времен. Дан иллюстративный пример сближения управляемых объектов с простым движением с целью получения в явном виде верхних и нижних разрешающих функций, позволяющих сделать вывод о возможности окончания игры в случае, когда не имеет места условие Понтрягина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. Т. 48, № 4. С. 40–64.
2. Чикрий А.А. Верхняя и нижняя разрешающие функции в игровых задачах динамики. *Тр. ИММ УрО РАН*. 2017. Т. 23, № 1. С. 293–305. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-1-293-305.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. Москва: Наука, 1974. 455 с.
4. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Т. 2. Москва: Наука, 1988. 576 с.
5. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. Москва: Изд-во МГУ, 1984. 65 с.
6. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. Москва: Наука, 1981. 288 с.
7. Hajek O. Pursuit games. New York: Academic Press. 1975. Vol. 12. 266 p.
8. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.
9. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. Москва: Мир, 1973. 470 с.
10. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. Москва: Наука, 1974. 480 с.
11. Chikrii A.A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2010. Vol. 271. P. 69–85.
12. Chikrii A.A. Multivalued mappings and their selections in game control problems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 1995. Vol. 27, N 1. P. 27–38.
13. Pittsyk M.V., Chikrii A.A. On group pursuit problem. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1982. Vol. 46, N 5. P. 584–589.
14. Чикрий А.А., Дзюбенко К.Г. Билинейные марковские процессы поиска движущихся объектов. *Проблемы управления и информатики*. 1997. № 1. С. 92–107.
15. Chikrii A.A., Eidelman S.D. Game problems for fractional quasilinear systems. *Journal Computers and Mathematics with Applications*. 2002. Vol. 44. P. 835–851.
16. Chikrii A.A. Game dynamic problems for systems with fractional derivatives. *Springer Optimization and its Applications*. 2008. Vol. 17. P. 349–387.
17. Пилипенко Ю.В., Чикрий А.А. Колебательные конфликтно-управляемые процессы. *Прикл. математика и механика*. 1993. Т. 57, № 3. С. 3–14.
18. Chikrii A.A. Quasilinear controlled processes under conflict. *Journal of Mathematical Sciences*. 1996. Vol. 80, N 3. P. 1489–1518.
19. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана–Лиувилля. *Кибернетика и системный анализ*. 2001. № 6. С. 66–99.
20. Chikrii A.A. Optimization of game interaction of fractional-order controlled systems. *Optimization Methods and Software*. 2008. Vol. 23, N 1. P. 39–72.
21. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Обобщенные матричные функции Миттаг–Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка. *Кибернетика и системный анализ*. 2000. № 3. С. 3–32.
22. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Dordrecht; Boston; London: Springer Science and Business Media, 2013. 424 p.
23. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. *Вестн. МГУ. Сер. математика, механика, астрономия, физика, химия.* 1959. № 2. С. 25–32.
24. Половинкин Е.С. Элементы теории многозначных отображений. Москва: Изд-во МФТИ, 1982. 127 с.

Надійшла до редакції 18.02.2020

Й.С. Раппопорт

ПРОБЛЕМА ЗБЛИЖЕННЯ КЕРОВАНИХ ОБ'ЄКТІВ В ІГРОВИХ ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ З ТЕРМІНАЛЬНОЮ ФУНКЦІЄЮ ПЛАТИ

Анотація. Запропоновано метод розв'янання проблеми зближення керованих об'єктів в ігрових задачах динаміки з термінальною функцією плати, який полягає в систематичному використанні ідей Фенхеля–Моро стосовно загальної схеми методу розв'язувальних функцій. Сутність запропонованого методу полягає в тому, що розв'язувальну функцію можна визначити через спряжену до функції плати з використанням інволютивності оператора спряження для опуклої замкненої функції, і отримати гарантовану оцінку термінального значення функції плати, яку представлено через значення плати в початковий момент та інтеграл від розв'язувальної функції. Наведено поняття верхньої та нижньої розв'язувальних функцій двох типів і отримано достатні умови гарантованого результату в диференціальній грі з термінальною функцією плати у разі, коли умова Понтрягіна не має місця. Запропоновано дві схеми методу розв'язувальних функцій, побудовано відповідні стратегії керування і наведено порівняння гарантованих часів. Результати ілюстровано на модельному прикладі.

Ключові слова: термінальна функція плати, квазілінійна диференціальна гра, багатозначне відображення, вимірний селектор, стробоскопічна стратегія, роздільна функція.

J.S. Rappoport

THE PROBLEM OF APPROXIMATION OF CONTROLLED OBJECTS IN DYNAMIC GAME PROBLEMS WITH A TERMINAL PAYOFF FUNCTION

Abstract. A method is proposed for solving the problem of convergence of controlled objects in dynamic game problems with the terminal payoff function, which consists in the systematic use of Fenchel–Moreau ideas as applied to the general scheme of the method of resolving functions. The essence of the proposed method is that the resolving function can be expressed in terms of the function conjugate to payoff function and, using the involution of the conjugation operator for a convex closed function, we obtain a guaranteed estimate of the terminal value of the payoff function, which can be presented in terms of the payoff value at the initial instant of time and integral of the resolving function. The concepts of upper and lower resolving functions of two types are introduced and sufficient conditions for a guaranteed result in a differential game with a terminal payoff function are obtained for the case where the Pontryagin condition does not hold. Two schemes of the method of resolving functions are considered, the corresponding control strategies are constructed, and guaranteed times are compared. The results are illustrated by a model example.

Keywords: terminal payoff function, quasilinear differential game, multi-valued mapping, measurable selector, stroboscopic strategy, resolving function.

Раппопорт Иосиф Симович,
кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: jeffrappoport@gmail.com.