

Ю.Г. СТОЯН

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, Україна, e-mail: yustoyan19@gmail.com.

Т.Є. РОМАНОВА

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, Україна, e-mail: tarom27@yahoo.com.

О.В. ПАНКРАТОВ

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, Україна, e-mail: pankratov2001@yahoo.com.

А.Д. ТЕВЯШЕВ

Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна, e-mail: andrew.teviashev@nure.ua.

РЕШІТЧАСТЕ ПОКРИТТЯ КУБОЇДА МІНІМАЛЬНОЮ КІЛЬКІСТЮ ПІВСФЕР¹

Анотація. Розглянуто задачу часткового решітчастого покриття кубоїда заданих розмірів мінімальною кількістю однакових півсфер із заданим коефіцієнтом покриття. Побудовано математичну модель у вигляді задачі змішаного цілочислового нелінійного програмування. Запропоновано метод розв’язання, в якому застосовано ідею релаксації задачі тривимірного покриття до задачі покриття прямокутної області сім’єю однакових кругів радіуса, що залежить від висоти кубоїда, радіуса півсфер та відстані між центрами сусідніх півсфер. Наведено результати обчислювальних експериментів для прикладної задачі оптимізації розміщення сенсорів у заданій тривимірній області.

Ключові слова: півсфера, решітчасте покриття, кубоїд, математична модель, оптимізація.

ВСТУП

Задачі оптимального покриття геометричних об’єктів виникають у багатьох галузях науки та техніки, наприклад, під час планування променевої терапії, систем бездротового радіозв’язку, у проектуванні систем акустичної діагностики та контролю корпусів і обладнання, радіолокаційних систем регулювання й керування повітряним рухом, систем виявлення рухомих цілей [1–3]. У монографії [4] розглянуто задачі покриття евклідової площині, наведено поняття щільноти системи покривних фігур, отримано оцінки покриття площини й опуклої області рівними кругами. У багатьох публікаціях досліджено побудову математичних моделей та розроблення методів розв’язання різних класів задач покриття (див., наприклад, [5–8]). Особливий інтерес, як фундаментальний, так і прикладний, становлять дослідження задач сферичного покриття [9–17].

Задачі оптимального сферичного покриття належать класу NP-складних [18]. Для розв’язання задач розміщення сферичних об’єктів можна застосувати методи геометричного проектування [19–21] та негладкої оптимізації [22–24]. Однак, для задач розміщення (зокрема задач покриття) великої розмірності доцільно використовувати евристичні методи, які дають змогу отримати ефективні за функцією цілі розв’язки за прийнятний час. Останнім часом у зв’язку з розвитком різного виду сенсорних мереж цей напрям стає дедалі більш перспективним [25].

Одним з підходів до побудови кругових покріттів є розміщення датчиків у детермінованих вузлах. При цьому будують базовий шаблон розміщення кругів з мінімальною кількістю вузлів, що необхідна для покриття багатокутника. Регулярне розбиття площини на багатокутники називають теселяцією. Якщо

¹ Робота підтримана грантом на науково-технічну роботу за договором від 09.03.2021 № ДЗ/105-2021 МОН України та Volkswagen Foundation (grant 97 775, Романова Т.Є.).

шаблон повністю покритий зонами датчиків, розташованих у його вершинах, то вся площа може бути повністю покрита теселяцією таких багатокутників. Доведено [26], що правильна трикутна теселяція є оптимальною з погляду мінімальної кількості вузлів, необхідних для повного покриття області кругами. Деякі автори (див., наприклад, [27]) досліджують використання шаблона у вигляді смуги кругів. Ефективним варіантом цього підходу є запропонований і досліджені у [13] метод секційно-регулярного покриття прямокутної області.

У цій роботі досліджено нестандартну задачу часткового (неповного) сферичного покриття. Як розміщувані об'єкти розглянуто однакові півсфери, а як область покриття — кубоїд, що має висоту, меншу за радіус сфер.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай є набір тривимірних об'єктів $\{H_i, i \in I_n = \{1, \dots, n\}\}$ та обмежена область $\Omega \subset R^3$.

Кожний об'єкт H_i має змінний вектор руху $u_i, i \in I_n$, у просторі R^3 .

Задача покриття полягає у визначенні таких $u_i, i \in I_n$, щоб кожна точка області Ω належала хоча б одному об'єкту $H_i(u_i), i \in I_n$ (рис. 1).

Уведемо множину $H(u) = \bigcup_{i \in I_n} k_i H_i(u_i)$, де

$$k_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \text{int } H_i(u_i) \cap \text{int } \Omega \neq \emptyset, \\ 0, & \text{якщо } \text{int } H_i(u_i) \cap \text{int } \Omega = \emptyset, \end{cases} \quad i \in I_n,$$

$u = (u_1, \dots, u_n)$.

Сформулюємо критерій покриття так:

$$\Omega \subset H(u) \Leftrightarrow \Omega \cap H^*(u) = \emptyset, \quad (1)$$

де $H^*(u) = R^3 \setminus H(u)$ (рис. 2).

Для аналітичного опису критерію покриття можна застосувати метод *phi*-функцій [28, 29].

Означення 1. Неперервна всюди визначена функція $\Phi(u_i, u_j)$ називається *phi*-функцією об'єктів $H_i(u_i)$ і $H_j(u_j)$, якщо виконуються такі умови:

$\Phi(u_i, u_j) > 0$, якщо $H_i(u_i) \cap H_j(u_j) = \emptyset$;

$\Phi(u_i, u_i) = 0$, якщо $\text{int } H_i(u_i) \cap \text{int } H_j(u_j) = \emptyset$ та $H_i(u_i) \cap H_j(u_j) \neq \emptyset$;

$\Phi(u_i, u_j) < 0$, якщо $\text{int } H_i(u_i) \cap \text{int } H_j(u_j) \neq \emptyset$.

Позначимо $\Phi(u)$ *phi*-функцією для області Ω та об'єкта $H^*(u)$. Завдяки властивостям *phi*-функції нерівність $\Phi(u) \geq 0$ описує критерій покриття (1).

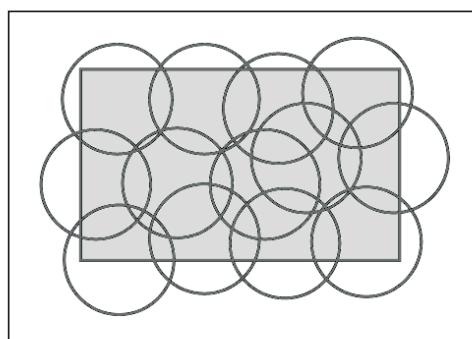


Рис. 1. Покриття прямокутної області кругами

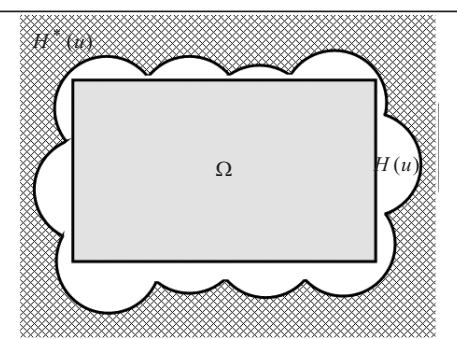


Рис. 2. Критерій покриття

Задачу покриття області Ω мінімальною кількістю тривимірних об'єктів H_i , $i \in I_n$, можна сформулювати так:

$$\min_{(u,k) \in W \subset R^\sigma \times B^n} N, \quad (2)$$

де (u, k) — вектор змінних, $u = (u_1, \dots, u_n) \in R^\sigma$ — вектор змінних параметрів розміщення об'єктів H_i , $i \in I_n$, $k = (k_i, i \in I_n) \in B^n$ — вектор Булевих змінних $k_i \in \{0, 1\}$, $N = \sum_{i=1}^n k_i$, — функція цілі, W — область допустимих розв'язків, описана у такий спосіб:

$$\Phi(u, k) \geq 0, \quad (3)$$

$$k_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Phi_i(u_i) < 0, \\ 0, & \text{якщо } \Phi_i(u_i) \geq 0, \end{cases} \quad i \in I_n, \quad (4)$$

де $\Phi_i(u_i)$ — *phi*-функція для області Ω та об'єкта $H_i(u_i)$, при цьому $\Phi_i(u_i) < 0$ гарантує, що область Ω та об'єкт $H_i(u_i)$ мають спільні внутрішні точки, тобто $\text{int } H_i(u_i) \cap \text{int } \Omega \neq \emptyset$.

Зазначимо, що модель (2)–(4) можна використати тільки для побудови повного покриття.

У деяких прикладних задачах допускається, щоб частина області Ω була непокритою (див., наприклад, [1–3]).

Формалізуємо поняття «неповного» покриття. Позначимо V_Ω об'єм кубоїда Ω , а V_{Ω_H} — об'єм покритої частини області $\Omega_H = \Omega \cap H(u)$. Тоді об'єм непокритої частини області визначають як $V_\Omega - V_{\Omega_H}$. У випадку повного покриття $\Omega_H = \Omega$.

Означення 2. Розміщення об'єктів $\{H_i, i \in I_n\}$ називається λ -покриттям області Ω , якщо

$$\frac{V_{\Omega_H}}{V_\Omega} = \lambda, \quad (5)$$

де $0 \leq \lambda \leq 1$ — коефіцієнт покриття (частка покритої частини) області Ω .

Тоді $\bar{\lambda} = 1 - \lambda$ є коефіцієнтом вільного об'єму (часткою непокритої частини) області Ω . При цьому, якщо $\Omega \subset H(u)$, то $\lambda = 1$, а якщо $\text{int } \Omega \cap H(u) = \emptyset$, то $\lambda = 0$.

Нехай область покриття має форму кубоїда $\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq w, 0 \leq z \leq h\}$ (рис. 3).

Як об'єкти, що розміщуються, будемо розглядати півсфери однакового радіуса $R > h$ з центром у точці $t = (x, y, z)$, розташовані у першому квадранті системи координат $OXYZ$ (рис. 4), основа кожної півсфери належить площині XOY , тобто $z = 0$.

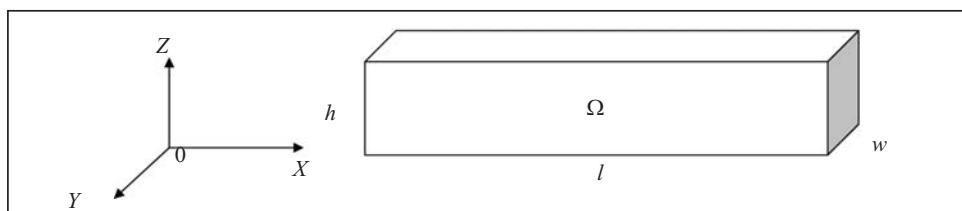


Рис. 3. Область покриття Ω — кубоїд

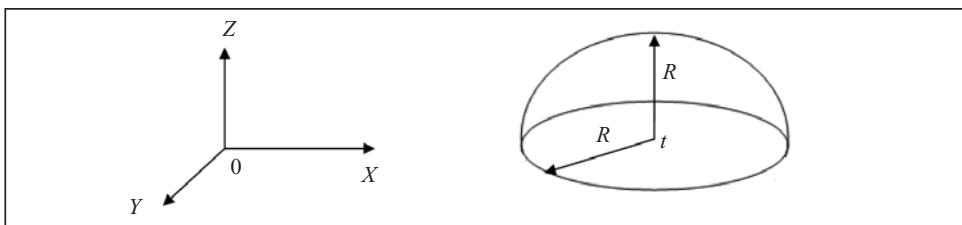


Рис. 4. Об'єкт покриття H_i — півсфера

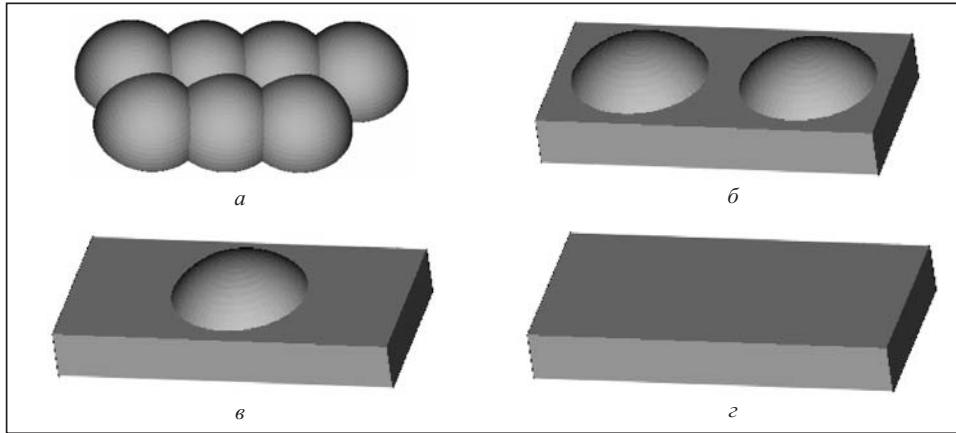


Рис. 5. Приклади решітчастого λ -покриття кубоїда півсферами: $\lambda = 1$ (а); $\lambda = 0.7$ (б); $\lambda = 0.35$ (с); $\lambda = 0$ (д)

Решіткою за базисом (а, б) назовемо систему точок

$$t_{ij} = t_0 + i\mathbf{a} + j\mathbf{b}, \quad i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, \quad j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, \quad (6)$$

де $t_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ — вектор трансляції решітки, $\mathbf{a} = (a_x, a_y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y) \in \mathbb{R}^2$ — базисні вектори, \mathbb{Z}^+ — множина додатних цілих чисел.

Позначимо $H_{ij}(t_{ij})$ півсферу радіуса R з центром t_{ij} , $i \in I_n$, $j \in I_n$.

Означення 3. Назовемо λ -покриття вигляду (5) області Ω півсферами $H_{ij}(t_{ij})$

решітчастим, якщо центри t_{ij} півсфер розташовані у вузлах решітки вигляду (6).

На рис. 5 наведено приклади решітчастого λ -покриття для таких випадків: $\lambda = 1$ (повне покриття) (рис. 5, а); $\lambda = 0.7$ (покрито 0.7 об'єму області) (рис. 5, б); $\lambda = 0.35$ (покрито 0.35 об'єму області) (рис. 5, с); $\lambda = 0$ (область повністю непокрита) (рис. 5, д).

Сформулюємо оптимізаційну задачу решітчастого λ -покриття кубоїда Ω півсферами (далі — задача HSCP, Hemispheric Coverage Problem) у такий спосіб: визначити параметри t_0 , a , b , що відповідають решітчастому λ -покриттю кубоїда Ω заданих розмірів мінімальною кількістю півсфер H_{ij} радіуса R з центраторами в точках t_{ij} за умови $\lambda \geq \lambda_0$.

Математичну модель задачі HSCP можна представити у вигляді

$$\min_{(t,k) \in W \subset \mathbb{R}^6 \times \mathbb{B}^{n^2}} N, \quad (7)$$

де (t, k) — вектор змінних, $t = (t_0, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ — вектор неперервних змінних, $k = (k_{ij}, (i, j) \in \Xi) \in \mathbb{B}^{n^2}$ — вектор Булевих змінних, $k_{ij} \in \{0, 1\}$, $N = \sum_{(i,j) \in \Xi} k_{ij}$ — функція цілі, $\Xi = \{(i, j): i \in I_n, j \in I_n\}$, n^2 — верхня оцінка кількості вузлів, необхідної для повного покриття прямокутної області кругами, отримана з використанням трикутної теселяції [20], W — область допустимих розв'язків, яка описується так:

$$\lambda = \frac{V_{\Omega_H}(t)}{V_\Omega} \geq \lambda_0, \quad (8)$$

$$k_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Phi_{ij}(t_{ij}) < 0, \\ 0, & \text{якщо } \Phi_{ij}(t_{ij}) \geq 0, \end{cases} \quad (9)$$

де $\Phi_{ij}(t_{ij})$ — *phi*-функція для об'єктів $H_{ij}(t_{ij})$ і Ω , $t_{ij} = t_0 + i\mathbf{a} + j\mathbf{b}, (i, j) \in \Xi$.

Зазначимо, що $\Phi_{ij}(t_{ij}) < 0 \Leftrightarrow \text{int } H_{ij}(t_{ij}) \cap \Omega \neq \emptyset$.

Математична модель (7)–(9) є задачею змішаного цілочислового нелінійного програмування.

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ НСР

Розглянемо задачу (7)–(9) покриття кубоїда Ω (з метричними характеристиками l, w, h) мінімальної кількістю півсфер радіуса R із заданим коефіцієнтом покриття λ .

Назвемо верхню і нижню грані кубоїда Ω відповідно прямокутником P_{up} і прямокутником P_{down} . Переріз кожної півсфери площею $z=0$ є кругом радіуса R , тоді як переріз півсфери площею $z=h$ є кругом радіуса r (рис. 6).

Зазначимо, що кожному повному покриттю прямокутника P_{up} кругами радіуса $r = \sqrt{R^2 - h^2}$ відповідає повне покриття ($\lambda = 1$) кубоїда Ω півсферами радіуса R , а покриттю прямокутника P_{up} мінімальним числом кругів радіуса $r > \sqrt{R^2 - h^2}$ відповідає λ -покриття ($\lambda < 1$) кубоїда півсферами радіуса R , а також, у загальному випадку, неповне покриття прямокутника P_{down} кругами радіуса R .

На рис. 7 наведено ілюстрацію варіантів λ -покриття прямокутника P_{up} кругами радіуса r та відповідні λ -покриття прямокутника P_{down} кругами радіуса R залежно від відстані між центрами півсфер радіуса R : $r = \sqrt{R^2 - h^2}$ (рис. 7, а); $\sqrt{R^2 - h^2} < r < R$ (рис. 7, б); $r = R$ (рис. 7, в); $r > R$ (рис. 7, г).

З урахуванням зазначеного вище розв'язання задачі (7)–(9) можна звести до розв'язання задачі покриття прямокутника P_{up} сім'єю одинакових кругів змінного радіуса r , що залежить від висоти h області Ω , радіуса R півсфер та відстані між центрами сусідніх півсфер.

У роботі [16] наведено швидкий і ефективний наближений метод розв'язання задачі повного решітчастого покриття прямокутника мінімальної кількістю кругів фіксованого радіуса. Метод складається з двох етапів: 1) пошук мінімальної кількості кругів радіуса r , що можуть покрити прямокутник розмірами $l \times w$; 2) пошук координат центрів кругів для кращого варіанта з отриманих на першому етапі.

Грунтуючись на результатах роботи [16], застосуємо для розв'язання задачі (7)–(9) алгоритмічно обчисленну функцію $\mathfrak{J}(l, w, r)$, значення якої дорівнюють мінімальній кількості кругів радіуса r , необхідній для регулярного покриття прямокутника P_{up} розмірами $l \times w$.

Ключова ідея алгоритму PCSA (Partial Coverage Semisphere Algorithm) є такою. Повне покриття кубоїда півсферами досягається тоді, коли круги радіуса $r = \sqrt{R^2 - h^2}$ покривають верхню границю кубоїда. Задамо якесь відносно малу величину Δ (наприклад, $0.01 \cdot R$) і почнемо поступово збільшувати радіус r на Δ , розраховуючи кожного разу функцію $\mathfrak{J}(l, w, r)$. Якщо функція не змінюється, то

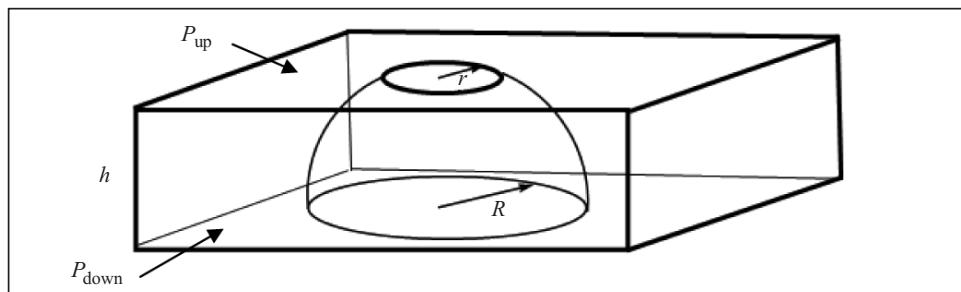


Рис. 6. Прямокутники P_{up} і P_{down} та кругові перерізи півсфери

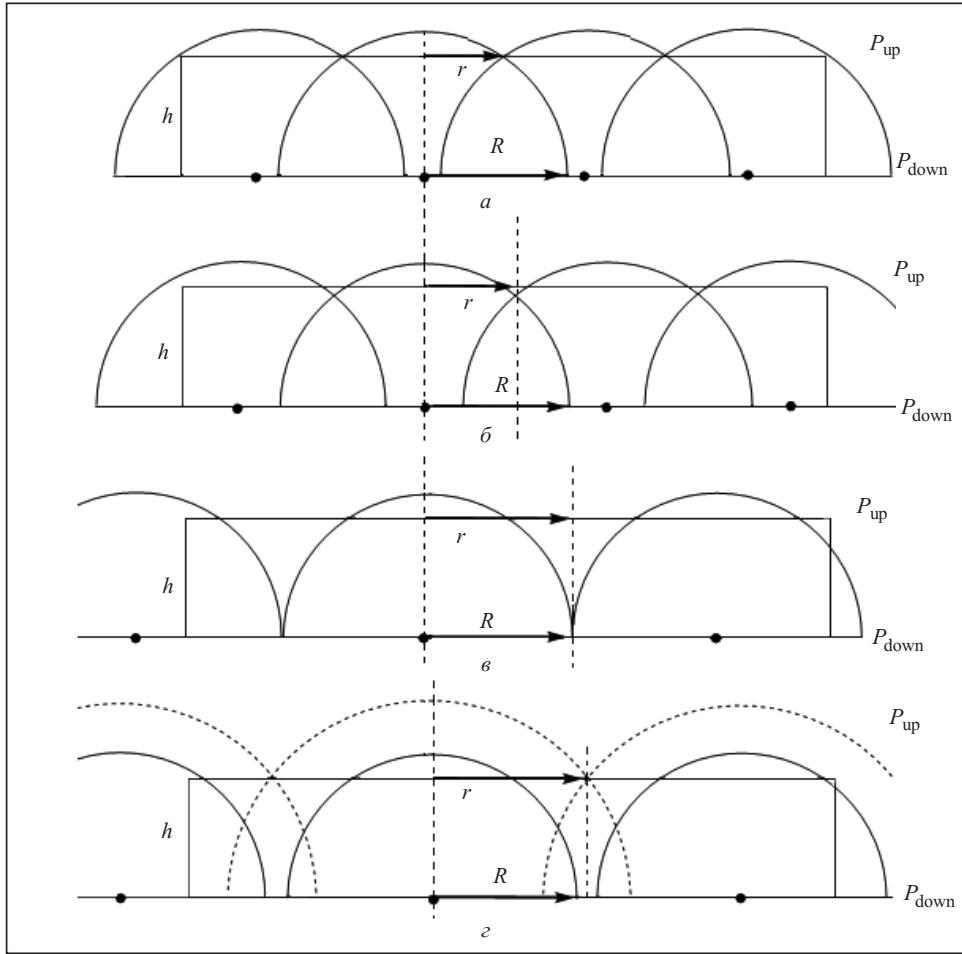


Рис. 7. Варіанти λ -покриття прямокутника P_{up} кругами радіуса r та відповідні λ -покриття прямокутника P_{down} кругами радіуса R : $r = \sqrt{R^2 - h^2}$ (a); $\sqrt{R^2 - h^2} < r < R$ (б); $r = R$ (в); $r > R$ (г)

побудоване раніше покриття є кращим за поточне покриття (коєфіцієнт λ є меншим за незмінної кількості півсфер). Якщо кількість кругів (значення $\Im(l, w, r)$) зменшилася, необхідно перерахувати коєфіцієнт λ . Далі, залежно від того, чи досягнуто потрібну щільність покриття, треба продовжити пошук меншого числа покриваючих кругів або завершити роботу алгоритму.

Крок 1. Присвоюємо $k = 0$ і $\lambda_0 = 1$. Розраховуємо нижню оцінку кількості $N_0 = \Im(l, w, r_0 = \sqrt{R^2 - h^2})$ півсфер радіуса R , що повністю покривають Ω .

Крок 2. Якщо потрібно забезпечити повне покриття, розв'язуємо оптимізаційну задачу $m_0^* = \max_{\Im(l, w, r_0 - m_0 \cdot \Delta) = N_0} m_0$ і розраховуємо координати центрів півсфер $(x_i^0, y_i^0, 0)$, $i = 1, \dots, N_0$, для круга радіуса $r_0 - m_0^* \Delta$ (m_0 — невід'ємна цілочислова змінна) за допомогою алгоритму, наведеного у [16], в іншому випадку переходимо до кроku 3.

Крок 3. Розв'язуємо оптимізаційну задачу $m_{k+1}^* = \max_{\Im(l, w, r_k + m_{k+1} \cdot \Delta) = N_k} m_{k+1}$ та присвоюємо $r_{k+1} = r_k + (m_{k+1}^* + 1)\Delta$ (радіус r_{k+1} — це мінімальний радіус, для якого можна побудувати λ_{k+1} -покриття кількістю півсфер, меншою за N_k).

Крок 4. Присвоюємо $k = k + 1$. Розраховуємо кількість півсфер $N_k = \mathfrak{I}(l, w, r_k)$ та координати центрів півсфер $(x_i^k, y_i^k, 0)$, $i = 1, 2, \dots, N_k$, для круга радіуса r_k за допомогою алгоритму, наведеного у [16].

Крок 5. Розраховуємо коефіцієнт покриття λ_k для покриття, побудованого на кроці 4.

Якщо треба побудувати покриття з коефіцієнтом, меншим за λ_k , переходимо до кроку 3, в іншому випадку завершуємо роботу.

Зауваження 1. Побудоване на k ітерації регулярне покриття є найкращим для всіх можливих регулярних покриттів (з урахуванням похиби методу) з коефіцієнтом покриття $\lambda_{k+1} < \lambda \leq \lambda_k$, бо немає сенсу погіршувати вже побудоване покриття для N_k кругів.

Зауваження 2. Можливими модифікаціями запропонованої стратегії є подрібнювання Δ в області зміни кількості кругів, використання на додаток до регулярних ще й секційно-регулярних покриттів і побудова «майже регулярних» покриттів шляхом поліпшення регулярних із застосуванням методів нелінійної оптимізації.

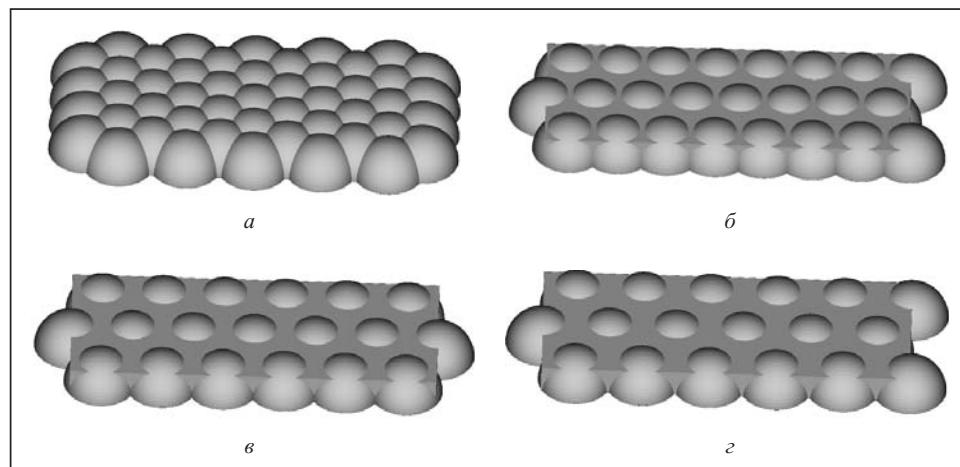
РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Експерименти виконано на AMD FX(tm)-6100, 3.30 GHz комп’ютері мовою програмування C++, Windows 7. Для локальної оптимізації використано IPOPT (<https://github.com/coin-or/Ipopt>).

Розглянуто дві групи прикладів з нижньою оцінкою коефіцієнта покриття $\lambda^0 = 0.7$. Під час обчислення коефіцієнта покриття застосовано наближений сітковий метод. Крок сітки визначають як R / M , де $1 \leq M \leq 100$. Заради зменшення часу роботи алгоритму використано значення $M = 26$. Коефіцієнт покриття для наведених далі результатів перераховано для $M = 100$.

Перша група прикладів: $\lambda^0 = (0.95, 0.9, 0.85, 0.8)$, радіус сфер $R = 5000$, розміри кубоїда $h = 4000$, $l = 50000$, $w = 20000$, у діапазоні $0.7 \leq \lambda^0 \leq 1$ отримано 32 варіанти решітчастих λ -покриттів кубоїда (рис. 8).

Загальний час роботи алгоритму для першої групи прикладів становить 1381.186 с.



Rис. 8. Результати покриття для першої групи прикладів: $\lambda^* = 1$, $N^* = 49$ півсфер, $\lambda^0 = 1$ (a); $\lambda^* = 0.95688015$, $N^* = 24$ півсфер, $\lambda^0 = 0.95$ (b); $\lambda^* = 0.90017673$, $N^* = 19$ півсфер, $\lambda^0 = 0.9$ (c); $\lambda^* = 0.86002479$, $N^* = 18$ півсфер, $\lambda^0 = 0.85$ (d), цей самий результат є кращим для $\lambda^0 = 0.8$

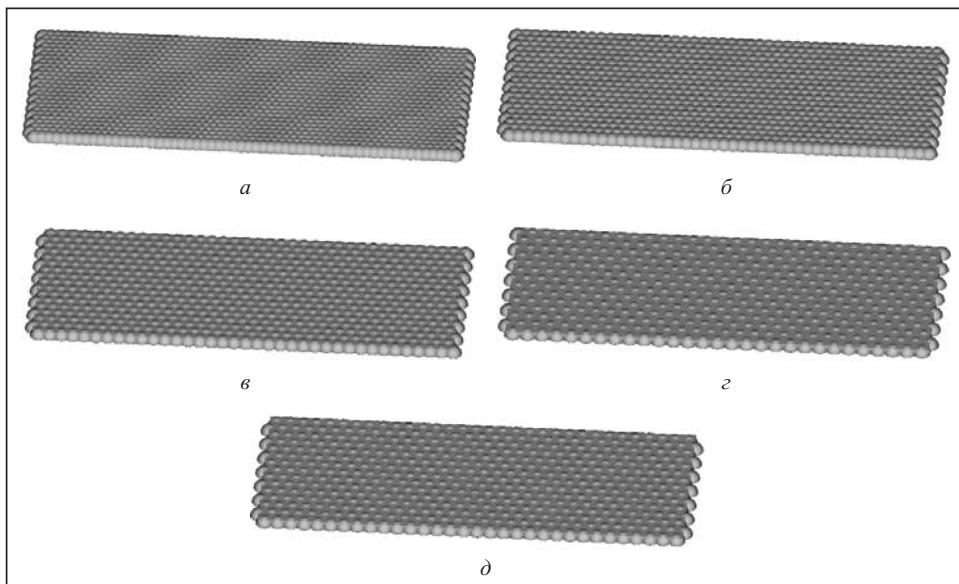


Рис. 9. Результати покриття для другої групи прикладів: $\lambda^* = 1$, $N^* = 1508$ півсфер, $\lambda^0 = 1$ (а); $\lambda^* = 0.99028403$, $N^* = 920$ півсфер, $\lambda^0 = 0.99$ (б); $\lambda^* = 0.95129289$, $N^* = 629$ півсфер, $\lambda^0 = 0.95$ (в); $\lambda^* = 0.90116484$, $N^* = 487$ півсфер, $\lambda^0 = 0.9$ (г); $\lambda^* = 0.85124148$, $N^* = 413$ півсфер, $\lambda^0 = 0.85$ (д)

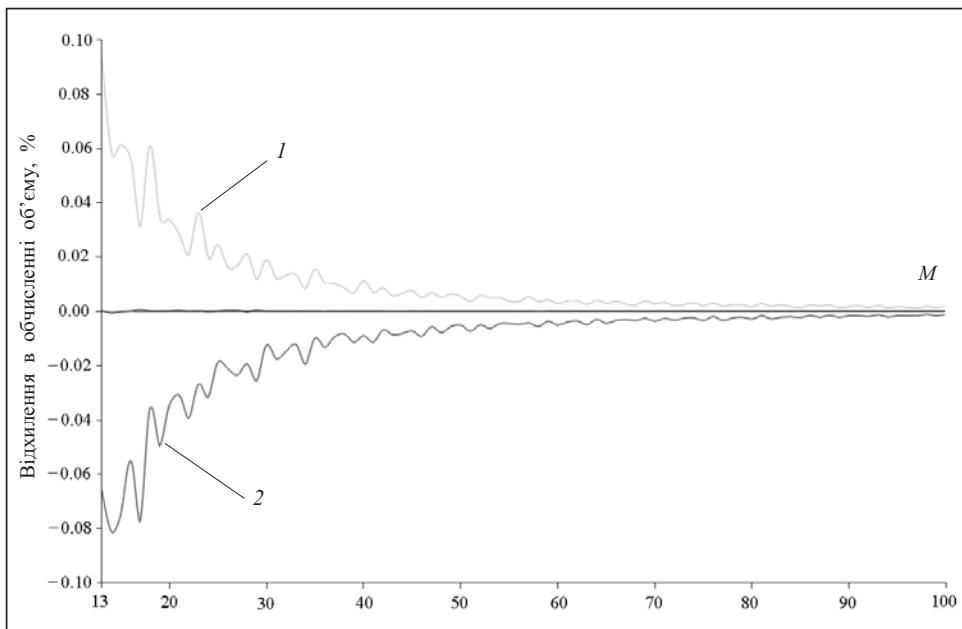


Рис. 10. Графіки залежності похибки обчислення об'єму зайнятої частини області від точності апроксимації: відхилення в обчисленні об'єму з надлишком (крива 1); відхилення в обчисленні об'єму з недостачею (крива 2)

Друга група прикладів: $\lambda^0 = (0.99, 0.95, 0.9, 0.85)$, радіус сфер $R = 1000$, розміри кубоїда $h = 860$, $l = 50000$, $w = 20000$, у діапазоні $0.7 \leq \lambda^0 \leq 1$ отримано 239 варіантів решітчастих λ -покриттів кубоїда (рис. 9).

Загальний час роботи алгоритму для другої групи прикладів становить 23540.598 с.

На рис. 10 наведено графіки залежності похибки обчислення коефіцієнта покриття від точності апроксимації у відсотках (для $13 \leq M \leq 100$). Результати

Таблиця 1

<i>M</i>	Час (с)								
1	0.031	21	9.001	41	35.131	61	75.941	81	133.631
2	0.078	22	9.906	42	36.910	62	78.375	82	137.062
3	0.203	23	10.795	43	38.002	63	80.918	83	140.214
4	0.327	24	11.919	44	39.734	64	83.445	84	144.051
5	0.531	25	12.730	45	41.215	65	86.190	85	147.234
6	0.733	26	14.102	46	43.368	66	88.671	86	150.666
7	1.030	27	14.898	47	45.194	67	91.448	87	154.301
8	1.326	28	16.037	48	46.894	68	94.318	88	158.793
9	1.684	29	17.176	49	49.249	69	96.908	89	161.898
10	2.091	30	18.673	50	51.059	70	99.981	90	166.188
11	2.511	31	19.578	51	53.134	71	102.540	91	168.684
12	2.964	32	20.998	52	55.209	72	105.737	92	172.568
13	3.464	33	22.527	53	57.065	73	108.530	93	176.094
14	4.056	34	23.556	54	59.530	74	111.572	94	179.822
15	4.711	35	25.022	55	63.898	75	114.817	95	183.832
16	5.351	36	26.630	56	64.803	76	117.780	96	187.669
17	5.928	37	27.893	57	66.706	77	120.589	97	191.585
18	6.614	38	29.765	58	68.750	78	123.881	98	195.422
19	7.488	39	31.075	59	71.214	79	127.078	99	199.463
20	8.284	40	33.197	60	73.617	80	130.588	100	203.722

отримано шляхом порівняння за допомогою сіткового методу об'єму покриття області для 10000 випадкових розміщень півсфер радіуса 10 у кубоїді розмірами $100 \times 100 \times 10$ з відомим аналітично отриманим результатом.

У табл. 1 наведено час, потрібний для обчислення об'єму покриття області за допомогою сіткового методу для 10000 випадкових розміщень півсфер радіуса 10 в області з розмірами $100 \times 100 \times 10$.

ВИСНОВКИ

Сформульовано задачу часткового решітчастого покриття кубоїда заданих розмірів мінімальним числом однакових півсфер із заданим коефіцієнтом покриття. Побудовано математичну модель у вигляді задачі змішаного цілочислового нелінійного програмування. Запропоновано евристичний метод розв'язання, який ґрунтуються на зведенні задачі тривимірного покриття до задачі покриття прямокутної області сім'єю однакових кругів радіуса, що залежить від висоти області, радіуса півсфер та відстані між центрами сусідніх півсфер. Наведено результати обчислювальних експериментів для прикладної задачі оптимізації розміщення сенсорів у кубоїді, яку можна застосувати для побудови архітектури просторово-розподіленої, ешелонованої системи взаємозв'язаної сенсорної мережі засобів ураження повітряних об'єктів та малогабаритних оптоелектронних станцій наведення.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Tevyashev A., Shostko I., Neofitnyi M., Koliadin A. Laser opto-electronic airspace monitoring system in the visible and infrared ranges. *Proc. 2019 IEEE 5th International Conference Actual Problems of Unmanned Aerial Vehicles Developments (APUAVD 2019)* (22–24 October 2019, Kyiv, Ukraine). Kyiv, 2019. P. 170–173.
2. Shostko I., Tevyashev A., Neofitnyi M., Kulia Y. Information-measuring system of polygon based on wireless sensor infocommunication network. In: Data-Centric Business and Applications. Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies. Radivilova T., Ageyev D., Kryvinska N. (Eds.). 2021. Vol. 48. P. 649–674. https://doi.org/10.1007/978-3-030-43070-2_8.
3. Shostko I., Tevyashev A., Kulia Y., Koliadin A. Optical-electronic system of automatic detection and high-precise tracking of aerial objects in real-time. *Proc. 3rd Interbatiobal Workshop on Computer Modeling and Intelligent Systems (CMIS-2020)* (27 April – 1 May 2020, Zaporizhzhia, Ukraine). Zaporizhzhia, 2020. P. 784–803.
4. Фейеш Тот Л. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. Москва: Физматгиз, 1958. 363 с.
5. Grinde R., Daniels K. Solving an apparel trim placement problem using a maximum cover problem approach. *IIE Transactions*. 1999. Vol. 31, Iss. 8. P. 763–769.
6. Stoyan Y.G., Romanova T., Scheithauer G., Krivulya A. Covering a polygonal region by rectangles. *Computational Optimization and Applications*. 2011. Vol. 48. P. 675–695. <https://doi.org/10.1007/s10589-009-9258-1>.
7. Tedeschi D., Andretta M. New exact algorithms for planar maximum covering location by ellipses problems. *European Journal of Operational Research*. 2021. Vol. 291, Iss. 1. P. 114–127. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.09.029>.
8. Bansal M., Kianfar K. Planar maximum coverage location problem with partial coverage and rectangular demand and service zones. *INFORMS Journal on Computing*. 2017. Vol. 29, N 1. P. 152–169.
9. Blyuss O., Zaikin A., Cherepanova V., Munblit D., Kiseleva E.M., Prytomanova O.M., Duffy S.W., Crnogorac-Jurcevic T. Development of PancRISK, a urine biomarker-based risk score for stratified screening of pancreatic cancer patients. *British Journal of Cancer*. 2020. Vol. 122, Iss. 5. P. 692–696. <https://doi.org/10.1038/s41416-019-0694-0>.
10. Blyuss O., Koriashkina L., Kiseleva E., Molchanov R. Optimal placement of irradiation sources in the planning of radiotherapy: mathematical models and methods of solving. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*. 2015. 142987. <https://doi.org/10.1155/2015/142987>.
11. Stoyan Y., Patsuk V. Covering a compact polygonal set by identical circles. *Computational Optimization and Applications*. 2010. Vol. 46, Iss. 1. P. 75–92. <https://doi.org/10.1007/s10589-008-9191-8>.
12. Stoyan Yu.G., Patsuk V.M. Covering a convex 3D polytope by a minimal number of congruent spheres. *International Journal of Computer Mathematics*. 2014. Vol. 91, Iss. 9. P. 2010–2020. <https://doi.org/10.1080/00207160.2013.865726>.
13. Yakovlev S.V. On a class of problems on covering of a bounded set. *Acta Mathematica Hungarica*. 1989. Vol. 53, Iss. 3. P. 253–262, <https://doi.org/10.1007/BF01953365>.
14. Shekhovtsov S.B., Yakovlev S.V. Formalization and solution of one class of covering problem in design of control and monitoring systems. *Avtomatika i Telemekhanika*. 1989. Iss. 5. P. 160–168, URL: <http://mi.mathnet.ru/eng/at6296>.
15. Yakovlev S., Kartashov O., Komyak V., Shekhovtsov S., Sobol O., Yakovleva I. Modeling and simulation of coverage problem in geometric design systems. *Proc. 2019 IEEE 15th International Conference on the Experience of Designing and Application of CAD Systems (CADSM)* (26 February – 2 March 2019, Polyana-Svalyava, Ukraine). Polyana-Svalyava, 2019. P. 20–23. <https://doi.org/10.1109/CADSM.2019.8779303>.

16. Панкратов А.В., Пацук В.Н., Романова Т.Е. Метод покрытия прямоугольника конгруэнтными кругами с учётом дополнительных ограничений. *Радиоэлектроника и информатика*. 2005. № 1. С. 54–58.
17. Pankratov A., Romanova T., Litvinchev I., Marmolejo J.A. An optimized covering spheroids by spheres. *Applied Sciences*. 2020. Vol. 10, Iss. 5. 1846. <https://doi.org/10.3390/app10051846>.
18. Fowler R., Paterson M., Tanimoto S. Optimal packing and covering in the plane are NP-complete. *Information Processing Letters*. 1981. Vol. 12, Iss. 3. P. 133–137.
19. Pankratov A., Romanova T., Litvinchev I. Packing ellipses in an optimized convex polygon. *Journal of Global Optimization*. 2019. Vol. 75(2). P. 495–522.
20. Stoyan Y.G., Romanova T.E., Pankratov O.V., Stetsyuk P.I., Maximov S.V. Sparse balanced layout of ellipsoids. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2021. Vol. 57, N 6. P. 864–873. <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00412-3>.
21. Grebennik I.V., Kovalenko A.A., Romanova T.E., Urniaieva I.A., Shekhovtsov S.B. Combinatorial configurations in balance layout optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 2. P. 221–231. <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0023-2>.
22. Сергиенко И.В., Стецюк П.И. О трех научных идеях Н.З. Шора. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. Т. 48, № 1. С. 4–22.
23. Stetsyuk P.I. Shor's r-algorithms: theory and practice. In: Optimization Methods and Applications: In Honor of the 80th Birthday of Ivan V. Sergienko. Butenko S., Pardalos P.M., Shylo V. (Eds.). Springer International Publishing, 2017. P. 495–520.
24. Стецюк П.И. Теория и программные реализации г-алгоритмов Шора. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 5. С. 43–57.
25. Wang B. Coverage problems in sensor networks: A survey. *ACM Computing Surveys*. 2011. Vol. 43, Iss. 4. P. 1–53.
26. Kershner R. The number of circles covering a set. *American Journal of Mathematics*. 1939. Vol. 61, N 3. P. 665–671.
27. Wang Y.C., Hu C.C., Tseng Y.C. Efficient deployment algorithms for ensuring coverage and connectivity of wireless sensor networks. *Proc. 1st IEEE International Conference on Wireless Internet (WICON 2005)* (10–15 July 2005, Budapest, Hungary). Budapest, 2005. P. 114–121.
28. Stoyan Y., Pankratov A., Romanova T., Fasano J., Pinter T., Stoian Y.E., Chugay A. Optimized packings in space engineering applications. Part I. In: Modeling and Optimization in Space Engineering. Springer Optimization and Its Applications. Fasano G., Pintér J. (Eds.). Cham: Springer, 2019. Vol. 144. P. 395–437. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10501-3_15.
29. Stoyan Yu., Pankratov A., Romanova T. Placement problems for irregular objects: mathematical modeling, optimization and applications. In: Springer Optimization and Its Applications. Optimization Methods and Applications. Butenko S., Pardalos P., Shylo V. (Eds.). 2017. Vol. 130. P. 521–559. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68640-0_25.

Yu. Stoyan, T. Romanova, O. Pankratov, A. Tevyashev

LATTICE COVERAGE OF CUBOID WITH MINIMUM NUMBER OF SEMISPHERES

Abstract. The problem of partial lattice coverage of a cuboid of given dimensions with a minimum number of identical hemispheres with a given coverage factor is considered. A mathematical model in the form of a mixed integer nonlinear programming problem is constructed. A solution algorithm is proposed. The problem of three-dimensional coverage is reduced to the problem of covering a rectangular area by a family of identical circles of radius that depends on the height of the cuboid, the radius of the hemispheres, and the distance between the centers of neighboring hemispheres. The results of computational experiments for the problem of optimizing the placement of sensors in a given three-dimensional domain are provided.

Keywords: hemispheres, lattice coverage, cuboid, mathematical model, optimization.

Надійшла до редакції 07.12.2021