

Ю.М. МІНАЄВ

Київський національний університет технологій та дизайну, Київ, Україна,
e-mail: *min_14@ukr.net*.

О.Ю. ФІЛІМОНОВА

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна,
e-mail: *filimonova1209@ukr.net*.

Ю.І. МІНАЄВА

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *juil_2010@ukr.net*.

ПРОГНОЗУВАННЯ НЕЧІТКИХ ЧАСОВИХ РЯДІВ НА ПІДСТАВІ КОНЦЕПЦІЇ НАЙБЛИЖЧИХ НЕЧІТКИХ МНОЖИН І ТЕНЗОРНИХ МОДЕЛЕЙ

Анотація. Розглянуто метод прогнозування нечітких часових рядів з представленням стандартної нечіткої множини у вигляді тензора, отриманого як результат тензорного добутку компонент, формування тензорної послідовності, останній елемент якої (прогнозована нечітка множина) обчислюється як неповний тензор (з відсутніми елементами). Сингулярна декомпозиція відновленого тензора дає змогу отримати підмножину впорядкованих пар, найближчу (у розумінні Ф-норми) до прогнозованої нечіткої множини. Наведено приклад прогнозування нечіткого часового ряду.

Ключові слова: нечітка множина, тензор, пропущені дані, сингулярна декомпозиція, Ф-норма.

ВСТУП

Проблема керування за умов невизначеності і потреба врахування середовища Big Data зумовила появу нової галузі науки — інтелектуальний аналіз даних або Data Mining (добування знань), яка сприяє використанню для розв'язання нових задач ментальних можливостей людини. Одними з об'єктів, які значною мірою впливають на розвиток Data Mining, виявились нечіткі множини (НМ), які дають змогу практично будь-який реальний фізичний об'єкт «фазифікувати» і застосувати для його аналізу і моделювання потужний апарат теорії нечітких множин (ТНМ).

Характерною особливістю Big Data є те, що як дані може використовуватися неструктурована підмножина багатовимірних даних, серед яких є відсутні і деформовані елементи, які потрібно відновити. З'явилась задача прогнозування часових рядів (ЧР), де елементом ряду є підмножина даних, для моделювання якої можна в деяких випадках застосовувати ТНМ. Реально виникає нечіткий часовий ряд (НЧР) і відповідно задача його прогнозування, причому прогноз має відповідати за формою і змістом реальним даним, тобто бути підмножиною впорядкованих пар (ПмВП) або послідовностей (випадок багатовимірних даних).

Натепер поширеним є клас задач, коли для моделювання ЧР застосовують апарат ТНМ, перетворюючи чіткий ЧР у нечіткій, використовуючи при цьому низку припущень, починаючи від функції належності (ФН) до постулатів щодо розв'язання. Переважна більшість робіт з прогнозування НЧР стосується прогнозування чітких ЧР з використанням методів і моделей ТНМ [1].

Об'єктом дослідження в цій роботі є процес інтелектуального аналізу ЧР за умов невизначеності, які установлюють, що елементом ЧР може бути неструктурована одно- або багатовимірною множина даних (МД), що може вміщувати пропущені або деформовані дані, зокрема, в окремому випадку МД може бути представлена як НМ або ПмВП.

Предметом дослідження є прогнозування таких значень: нечіткого ЧР, елементи якого НМ-1 типу, у вигляді, адекватному вхідним даним, тобто є ПмВП. Мета роботи — обґрунтування концепції найближчих ПмВП і доцільності (у деяких випадках унікальності) її використання для розв’язання задач прогнозування НЧР, а також формування алгоритму обчислення прогнозованого значення ЧР як ПмВП.

Головні розв’язувані задачі:

— виявити близькість за Φ -нормою НМ-1 типу $\tilde{x} = \{x / \mu^{(x)}\}$, $x \in X$, $\mu^{(x)} \rightarrow [0, 1]$, і ПмВП, отриманої як результат сингулярної декомпозиції Кронекер-добутку $(x \otimes \mu^{(x)})$;

— показати раціональність застосування принципу тензорного завершення (повноти) для визначення прогнозованого тензора, який моделює НМ у складі тензорного часового ряду (ТЧР)

$$\underbrace{\{\tilde{x}(t_1), \tilde{x}(t_2), \dots, \tilde{x}(t_n)\}}_{\{x_{t_1}/\mu^{(x_{t_1})}\} \quad \{x_{t_2}/\mu^{(x_{t_2})}\} \quad \{x_{t_n}/\mu^{(x_{t_n})}\}} \rightarrow \underbrace{\{tx(:, :, 1), tx(:, :, 2), \dots, tx(:, :, n)\}}_{\text{3D тензор}};$$

$tx(:, :, n)$ — матриця з відсутніми значеннями

— довести раціональність застосування процедури зваженої оптимізації SP_WORT [2] для визначення відсутніх значень $tx(:, :, n)$ з наступною сингулярною декомпозицією;

— показати на реальних прикладах доцільність і високу ефективність запропонованої концепції.

ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ ПРОГНОЗУВАННЯ НЧП

Уперше НЧР-FTS непараметричні моделі на основі теорії НМ було представлено в [3]. Аналіз чітких ЧР, зокрема прогнозування, досить ретельно досліджено, але було виявлено потребу застосування для корекції алгоритмів евристичних правил, які може надати ТНМ. Це сприяло тому, що задача аналізу (прогнозування) ЧР трансформувалась у задачу аналізу НЧР. У [1] показано, що сенс і зміст НЧР зумовлені насамперед тим, що виникла додаткова потреба у використанні експертних оцінок, притаманна невизначеність яких належить класу нечіткості.

На підставі формалізації інтелектуальних операцій, що моделюють нечіткі висловлювання людини про стан і поведінку складних явищ, було утворено самостійний напрямок науково-прикладних досліджень — нечітке моделювання. Спроба «уточнити» чіткий ЧР доповненням його системою нечітких тверджень спричинила формування нового класу обчислювальних моделей, які призначені для маніпулювання із значеннями, представленими НМ — головним об’єктом ТНМ на основі операцій нечіткої математики та нечіткої логіки. Таким чином, виникла нова галузь знань Time Series Data Mining — добування знань за допомогою ЧР, основою якої є нечітка модель ЧР.

Найбільш детально нечіткий підхід до моделювання часових (чітких) рядів представлено в [1], де модель числового ЧР для прогнозування відповідно до методології їхнього аналізу записана у вигляді $x_t = \lambda \cdot f(t) + \psi \cdot \varepsilon_t + \xi_t$, де $f(t)$ — деяка систематична компонента, яка може розглядатись як тенденція, ε_t — нерегулярна компонента; λ, ψ — цілочислові коефіцієнти, $\lambda \rightarrow [0, 1]$, $\psi \rightarrow [0, 1]$, ξ_t — похибка. Під час моделювання числових ЧР у межах нечіткого підходу числові значення попередньо перетворюють у нечіткі (фазифікують).

Один з методів прогнозування НЧР розглянуто в [4], він складається з таких процедур: перевірка стабільності даних; визначення (загальної) універсальної множини; формування нечітких спостережуваних правил; прогнозування та отримання результату у вигляді НЧ з трикутною ФН і його дефазифікація; обчислення значення інтервалу прогнозованого результату; визначення нових трикутних нечітких чисел (з урахуванням попередніх результатів); дефазифікація результату за допомогою спеціальних методів дефазифікації.

Нечіткі множини та системи вплинули на дослідження та розроблення практично у всіх напрямках штучного інтелекту, що зумовило створення різноманітних гібридних систем [5]. У цитованій роботі наведено огляд гібридних методів, що використовують у НЧР. Зауважимо, що загальною рисою методів інтелектуального аналізу є наявність процедур навчання різного рівня і форм занурення.

У [5] представлено метод прогнозування НЧР, відомий як метод Чена, сутність якого — пропозиція моделі, яка містить прості математичні операції. Запропоновано покрокову процедуру, яку можна описати як сукупність кроків:

- 1) розподіл універсальної множини на періоди однакової тривалості;
- 2) визначення нечітких груп щодо глобальної події;
- 3) розмивання реальних даних;
- 4) визначення нечітких відношень (правил);
- 5) встановлення групи нечітких відношень;
- 6) дефазифікація прогнозованого результату.

У [6] запропоновано гібридну модель розв'язання задачі прогнозування за умов невизначеності — так званий алгоритм FTSGA на основі НЧР та генетичного алгоритму. Результати експерименту показують, що порівняння цього алгоритму з іншими моделями на основі НЧР дає можливість значно зменшити середньоквадратичну похибку та покращити точність.

Завершуючи огляд умовно стандартних методів аналізу (прогнозування) НЧР, зазначимо, що останнім часом НЧР застосовують у поєднанні з нейронною мережею зі зворотним поширенням. Для покращення результатів моделей НЧР запропоновано гібридний метод з генетичним алгоритмом. Зазначимо, що генетичний алгоритм — це евристика пошуку, що імітує процес природної еволюції. Водночас передчасно вважати, що наявна багатоманітність методів аналізу і прогнозування НЧР на базі ТНМ та гібридних моделей дає змогу розв'язувати практично всі задачі аналізу та прогнозування за умов невизначеності. Існують дані, що не дають змоги аналізувати ЧР стандартними методами, зокрема, ТНМ. Наприклад, трафік комп'ютерної мережі, зібраний за годину, день, добу тощо, може мати пропуски даних або віртуальне (експертне) призначення ФН для представлення добового трафіка у вигляді конкретного значення, що може виявитись неможливим.

Крім того, багато процесів є такими, що повинні визначатись тільки на інтервалі часу або представляти певну непорушну множину даних. І насамкінець, віртуальне призначення ФН (навіть за участі кваліфікованого експерта) не є настільки досконалим, щоб його інколи не піддавати сумніву. Зазначимо, що згідно з [7] менталітет людини (досвід, здоровий глузд тощо) дає змогу приймати раціональні рішення лише у 15–25 % випадків, усі інші рішення є аномальними (це, однак, не означає, що вони є хибними!). Призначення ФН (фундамент ТНМ) покладено на досвід, знання, врешті решт, здоровий глузд експерта. У традиційних методах прогнозування трафіка [8] розглядають дані про трафік як одновимірний ЧР, що не дає змоги повною мірою використовувати

багаторежимний метод кореляції даних про трафік. Для повного використання внутрішніх множинних кореляцій даних про трафік у цій роботі запропоновано багатовимірну тензорну модель масиву, яка дає можливість інкапсулювати дані про обсяг трафіка.

Запропоновано новий метод прогнозування трафіка з використанням процедур так званого завершення (complete) динамічного тензора. Результати експериментів показують, що запропонований метод прогнозування є точнішим і надійнішим, ніж традиційні методи прогнозування. У [9, 10] запропоновано тензорні моделі НМ і відповідно методи їхнього оброблення. Це логічно приводить до постановки задач прогнозування на рівні тензорних моделей, тобто ТЧР. Методи на основі тензорів мають властивість враховувати глобальну структуру даних за допомогою декомпозиції високого порядку (так зване тензорне розкладання), яке, своєю чергою, є ефективним з точки зору багатовимірності моделювання, зокрема, має низку переваг: швидку збіжність, високу точність і малі обчислювальні зусилля порівняно з іншими методами. Оснований на динамічному завершенні тензора метод прогнозування передбачає реалізацію тензорної декомпозиції для відновлення даних у режимі реального часу.

Фундаментальні дослідження багатовимірних тензорів [11–13] дають змогу пропонувати нові методи і алгоритми аналізу і прогнозування НЧР на базі матричних факторизацій, зокрема, реалізувати пошук прихованих структур в НЧР, давати реальну оцінку відсутніх даних. Наприклад, існує можливість факторизувати неповну матрицю X , а потім використовувати ці фактори для реконструкції матриці та оцінювати (визначати) відсутні записи. Зазначимо, що матриця X вважається неповною, якщо вона містить невизначені (пропущені) або деформовані елементи. Можна стверджувати, що тензорні моделі НЧР можуть мати певні переваги перед стандартними і повинні розглядатися принаймні як можливість розширити коло розв'язуваних задач за умов невизначеності.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається часова послідовність впорядкованих у часі рівновіддалених об'єктів, кожний з яких являє собою множину даних або в окремому випадку стандартну НМ $\tilde{x} \triangleq \{x / \mu^{(x)}\}$, $x \in X$, $\mu^{(x)} \rightarrow [0, 1]$: $X^{(T)} = \{\tilde{x}(t)\}_{t=1}^n = \{\tilde{x}^{(1)}, \tilde{x}^{(2)}, \dots, \tilde{x}^{(n)}\}$ (рис. 1). Зауважимо, що будь-яка неструктурована множина даних може бути змодельована засобами ТНМ.

Задача формулюється як визначення об'єкта $\tilde{x}(t)$ для $t = n + 1$ у вигляді ПмВП, тобто $\tilde{x}^{(n+1)} \triangleq \{x^{(n+1)} / \mu^{(x^{(n+1)})}\}$, $x^{(n+1)} \in X$, $\mu^{(x^{(n+1)})} \rightarrow [0, 1]$. Кожна НМ

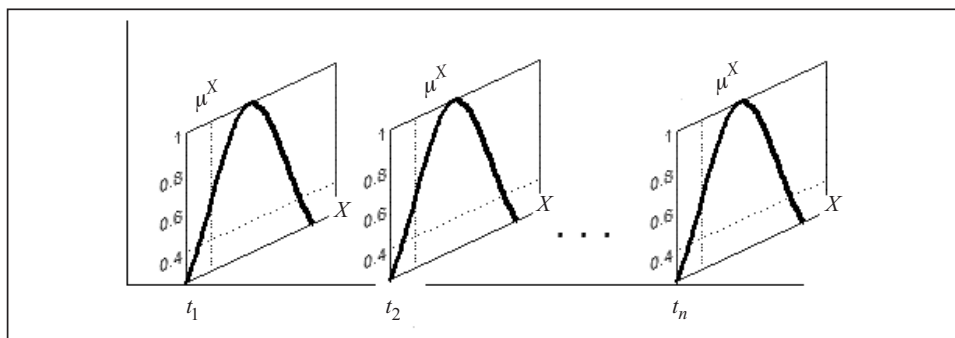


Рис.1. Схема представлення нечіткого ЧР

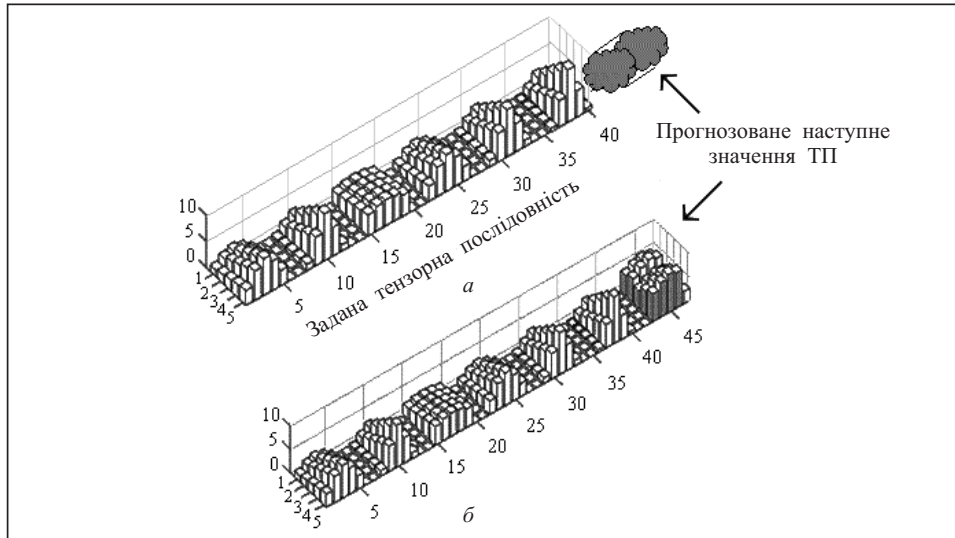


Рис. 2. Тензорна послідовність, утворена внаслідок перетворення НМ $\tilde{x}$ у 2D тензор як $t^{(x)} = (x \otimes \mu^{(x)}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$; загальний НЧР у тензорній нотації має вигляд $T^{(X)} = [t^{(x)}(:, :, 1), t^{(x)}(:, :, 2), \dots, t^{(x)}(:, :, n)] \in \mathbb{R}^{n \times m \times m}$ і є 3D тензором (а); загальна тензорна послідовність з відновленим (прогнозованим) тензором (б)

$\tilde{x}(t)$ представляється як 2D тензор $t_x = x \otimes \mu^{(x)} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, де $\otimes$ — символ Кронекер-добутку, m — кількість α -рівнів, НЧР перетворюється у ТЧР, наведений на рис. 2.

Означення 1 [14] (тензорна послідовність). Послідовність тензорів M -го порядку $\mathcal{X}_1 \dots \mathcal{X}_n$, де кожен $\mathcal{X}_i \in \mathbb{R}^{N_1 \times \dots \times N_M}$ ($1 \leq i \leq n$), має назву тензорна послідовність, якщо n — потужність тензорної послідовності є фіксованим натуральним числом. Фактично можемо розглядати M -порядкову тензорну послідовність $\mathcal{X}_1 \dots \mathcal{X}_n$ як одиничний $(M+1)$ -порядковий тензор розмірності n на додатковій моді (вимірі).

Означення 2 [15]. Тензорний часовий ряд — це $M+1$ направлений тензор або $\{\mathbf{S}_t \in \mathbb{R}^{N_1 \times \dots \times N_M \times T}\}_1^T$, де $(M+1)$ -й напрямок — час і T — його вимірність.

Означення 3 [14] (тензорний потік). Послідовність тензорів M -го порядку $\mathcal{X}_1 \dots \mathcal{X}_n$, де кожен $\mathcal{X}_i \in \mathbb{R}^{N_1 \times \dots \times N_M}$ ($1 \leq i \leq n$) має назву тензорний потік, якщо n — ціле число, яке збільшується з часом.

Інтуїтивно можна вважати, що потік тензорів поступово надходить з часом, $\mathcal{X}_n$ — останній тензор у потоці. Тензорна послідовність, утворена перетворенням НМ $\tilde{x} = (x / \mu^{(x)})_1^m$, наприклад, для $m=5$ у 2D тензор як $t^{(x)} = (x \otimes \mu^{(x)}) \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$; тензорний часовий ряд (див. рис. 2, а) розглядається як тензор $\mathbf{T}^{(x)} = \{t^{(x)}(:, :, 1), \dots, t^{(x)}(:, :, 6), t^{(x)}(:, :, 7)\} \in \mathbb{R}^{7 \times 5 \times 5}$ — прогнозоване значення; тензор $t^{(x)}(:, :, 7)$ розглядається як такий, значення якого відсутні; процедура так званої тензорної повноти (tensor complete) $\mathbf{T}_{mis}^{(x)} = cp_wopt(W, \mathbf{T}^{(x)}, R)$ дає змогу обчислити відсутні елементи $\mathbf{T}_{mis}^{(x)}(:, :, 7)$, які є прогнозованими для тензора $t^{(x)}(:, :, 7)$ (див. рис. 2, б).

Зуважимо, що згідно з нотацією MATLAB матриця $t^{(x)}(:, :, k)$ — k -й фронтальний слайс, розкриття 3D тензора у вигляді сукупності слайсів (2D матриць) і формування 3D тензора з сукупності слайсів реалізовано на підставі [16]. Сингу-

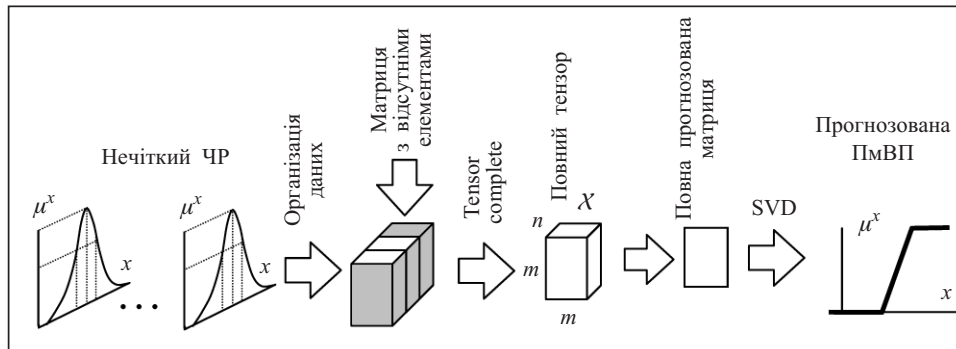


Рис. 3. Загальна схема постановок головних задач

лярна декомпозиція дає змогу отримати ПмВП, яка ототожнюється з відповідною прогнозованою НМ (див. рис. 2, б) та є найближчою (у розумінні Ф-норми).

Загальна схема постановок задач (рис. 3) має такий вигляд: стандартна НМ → 2D тензор → формування ТЧР (тут прогнозована НМ представлена як 2D тензор з відсутніми значеннями елементів (неповний тензор)) → застосування тензорних декомпозицій для відновлення неповного тензора (процедура CP_WORT) → виокремлення повної прогнозованої матриці, формування ПмВП з використанням сингулярної декомпозиції прогнозованої матриці.

ТЕНЗОРНІ ПОСЛІДОВНОСТІ, ТЕНЗОРНИЙ АНАЛІЗ, ПРОГНОЗУВАННЯ НЧР, АЛГОРИТМ CP_WORT

Натепер ТЧР є розповсюдженим методом розв'язання складних задач керування, зокрема, прогнозування, але аналіз нечітких ЧР на рівні тензорних моделей розглядається вперше. Отже, наведемо головні характеристики і властивості ТЧР згідно з [12]. Відомо, що дані часто є послідовностями багатовимірних масивів, які повинні оброблятися як незалежний і неподільний об'єкт. Такі множини даних мають назву тензори. Для оброблення таких даних передбачається, зокрема, добування прихованих, еволюційних знань, визначення тенденції поведінки даних за умови збереження тензорної структури. Модель, яку традиційно використовують, — це лінійна динамічна система (ЛДС) з Гаусовим шумом, який моделює (обробляє) прихований стан і спостереження кожного зрізу часу як вектор.

Означення 4 [14] (тензорний аналіз). Дано послідовність тензорів $\mathcal{X}_1 \dots \mathcal{X}_n$, де кожен $\mathcal{X}_i \in \mathbb{R}^{N_1 \times \dots \times N_M}$ ($1 \leq i \leq n$), треба знайти ортогональні матриці по одній для кожного режиму (напрямку), щоб похибка відновлення e була мінімізованою:

$$e = \sum_{t=1}^n \left\| \mathcal{X}_t - \mathcal{X}_t \prod_{i=1}^M \times_i (\mathbf{U}_i \cdot \mathbf{U}_i^T) \right\|_F^2.$$

Зауважимо, що $\mathcal{X}_t \prod_{i=1}^M \times_i (\mathbf{U}_i \cdot \mathbf{U}_i^T)$ — це апроксимація $\mathcal{X}_t$ на просторі, охопленому через $\mathbf{U}_i|_{i=1}^M$. Можемо записати $\mathcal{Y}_t \prod_{i=1}^M \times_i \mathbf{U}_i^T$, де $\mathcal{Y}_t$ — це кореневий тензор (CP-декомпозиція), визначений як $\mathcal{Y}_t = \mathcal{X}_t \prod_{i=1}^M \times_i \mathbf{U}_i^T$.

Врахуємо, що тензорними моделями формуються НМ, а ТЧР можуть бути представлені за допомогою декількох моделей. Зокрема, якщо кожен тензор «векторизувати» (тобто повторно виразити як вектор) так, що кожен елемент буде індексуватися одним цілим натуральним числом, то раніше згаданий метод ЛДС можна застосовувати. Очевидним обмеженням ЛДС для моделювання ЧР тензорів є те, що тензор-структура при цьому не зберігається. Зазначимо, що головні відомості відносно тензорних потоків, послідовностей наведено в [14]. Розглядуваний ТЧР моделюється за допомогою динамічного тензорного аналізу (ДТА), баєсівська ймовірнісна тензорна факторизація є однією з явних моделей ТЧР.

Для ДТА прихований низькорозмірний тензор «ядра» та набір проєкційних матриць (результат тензорних декомпозицій) вивчаються, як впливає із сутності методів тензорних декомпозицій, в процесі оброблення кожного члена $X_n \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_M}$ послідовності. Для кожного напрямку m тензор X_n згладжується в матрицю $X_n^{(m)} \in \mathbb{R}^{(\prod_{k \neq m} I_k) \times I_m}$, результат $X_n^{(m)T} \cdot X_n^{(m)}$ (множення транспонованої матриці на початкову) додається до матриці $S^{(m)}$, що накопичилася спрощенням попереднього $(n-1)$ тензора.

Ці моделі включають багатолінійний аналіз основних компонентів, алгоритм тензорної декомпозиції (Таккера) та тензорний аналіз Баєса. Такі моделі спираються на результати альтернативних методів найменших квадратів, які застосовують до кожного режиму i , крім інших можливостей, об'єднують члени тензорного часового ряду (X_n) , $X_n \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_M}$, щоб отримати тензор вищого порядку $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_M \times K}$, де K — довжина послідовності. Задані розподіли членів тензорного часового ряду вибираються за допомогою ланцюга Маркова для підгонки моделі.

Зазначимо, що в цій роботі використані приклади матрицизації тензора і тензоризації матриць із [10–13, 18], а також теорема про представлення добутку між 3-порядковим тензором $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L_1 \times L_2 \times L_3}$ і матрицею $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{L_2^1 \times L_2}$ уздовж напрямку 2 у вигляді нового тензора $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{L_1 \times L_2^1 \times L_3}$, сингулярна декомпозиція якого дає змогу отримати ПмВП [2]. Добуток між 3-порядковим тензором $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L_1 \times L_2 \times L_3}$ і матрицею $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{L_2^1 \times L_2}$ уздовж напрямку 2 дає новий тензор $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{L_1 \times L_2^1 \times L_3}$. Алгоритм прогнозування НЧР ґрунтується на двох головних концепціях:

— представлення НМ як 2D або 3D тензора і відповідно нечіткого ЧР як тензорного ЧР;

— прогнозований тензор розглядається як об'єкт, елементи якого невідомі і визначаються за допомогою алгоритмів реалізації так званої тензорної повноти (тензорне завершення).

Обчислення відсутніх елементів тензора реалізовано з використанням алгоритму CP_WOPT, докладно викладеного в [2, 18, 19]. У [18] показано переваги підходів на основі тензорного завершення (complete) у розв'язанні задачі відновлення багатовимірних даних. Результати показують, що запропонована модель може виробляти точні послідовності навіть за часової кореляції даних. Доповнення (завершення, complete) тензора — це проблема підбору відсутніх або непомічених записів частково спостережуваних тензорів, її детальне обґрунтування наведено в [19]. Задачу завершення тензора можна розв'язати за допомогою алгоритмів завершення матриці, як правило, шляхом переведення

проблеми на рівень матриці або розрізанням тензора на кілька малих матриць, або розгортанням його в одну велику матрицю.

Проблема неповних даних, тобто даних з відсутніми або невідомими значеннями [19], існує в майже всіх багатовимірних масивах. У цитованій роботі розглянуто розв'язання задачі факторизації набору даних з відсутніми значеннями для захоплення базової латентної структури даних і, можливо, для відновлення відсутніх значень (тобто тензора завершення). Застосовано найвідомішу з тензорних факторизацій CANDECOMP/PARAFAC (CP), яка фіксує багатолінійну структуру. За наявності відсутніх даних CP можна сформулювати як задачу зважених найменших квадратів, що моделює лише відомі записи (алгоритм CP_WOPT (CP-зважена оптимізація [19])) та використовує оптимізаційний підхід першого порядку для розв'язання задачі зважених найменших квадратів. На основі чисельних експериментів показано, що алгоритм успішно факторизує загамовані тензори і до 99 % відсутніх даних. У цитованій роботі нелінійна оптимізація використана для безпосереднього розв'язання задачі зважених найменших квадратів для моделі CP:

$$f_{\mathcal{W}}(A, B, C) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \left\{ w_{ijk} \left(x_{ijk} - \sum_{r=1}^R a_{ir} b_{jr} c_{kr} \right) \right\}^2,$$

де $\mathcal{W}$ (має такий же розмір, що й $\mathbf{X}$) — невід'ємний ваговий тензор, що визначається як

$$w_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_{ijk} \text{ є відомим,} \\ 0, & \text{якщо } x_{ijk} \text{ є відсутнім} \end{cases} \quad (\forall) i=1, \dots, I; j=1, \dots, J; k=1, \dots, K.$$

Показано, що CP_WOPT може масштабуватися до розріджених, масштабних даних за допомогою спеціалізованих розріджених структур даних. Крім факторизації тензорів, також показано, що CP_WOPT можна використовувати для розв'язання задачі завершення тензора в контексті аналізу мережевого трафіка.

Найближчий Кронекер-добуток і концепція найближчих нечітких множин як розширення можливостей ТНМ у прийнятті рішень за умов невизначеності. Припустимо, що матриця $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ є заданою з $m = m_1 m_2$ і $n = n_1 n_2$. Для цілочисельних множників розв'язання задачі найближчого Кронекер-добутку полягає в мінімізації $\phi(\mathbf{B}, \mathbf{C}) = \|\mathbf{A} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}\|_F$, де $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$ та $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$. У [14] показано, як розв'язати задачу НКР, використовуючи сингулярне розкладання векторизованої версії матриці $\mathbf{A}$. Вираз $\phi(\mathbf{B}, \mathbf{C})$ можна представити у вигляді $\phi(\mathbf{B}, \mathbf{C}) = \|\mathcal{R}(\mathbf{A}) - \text{vec}(\mathbf{B}) \text{vec}(\mathbf{C})^T\|_F$, де $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ — матриця перестановок $\mathbf{A}$, і отже, мінімізація $\phi(\cdot)$ є еквівалентом пошуку rank-1 матриці $\mathcal{R}(\mathbf{A})$. Для rank-1 матриці задача найближчої матриці є добре відома і досліджена як задача SVD-розв'язку. Зокрема, якщо $U^T \mathcal{R}(\mathbf{A}) V = \Sigma$ — SVD-розв'язок для $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, то оптимальні значення матриць $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ визначаються як:

$$\text{vec}(\mathbf{B}_{\text{opt}}) = (\sigma_1)^{1/2} U(:, 1), \quad \text{vec}(\mathbf{C}_{\text{opt}}) = (\sigma_1)^{1/2} \cdot V(:, 1).$$

Для оптимальних значень $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ масштабування (scaling) є довільним, оскільки для $\alpha \neq 0$ значення $\alpha \cdot \mathbf{B}_{\text{opt}}, \mathbf{C}_{\text{opt}} \cdot (1/\alpha)$ є також оптимальними. Авторами цієї статті оптимальний SVD-розв'язок сформовано у вигляді ПмВП:

$$\text{vec}(\mathbf{B}_{\text{opt}}) = \sigma_1 U(:, 1) \cdot \alpha, \quad \text{vec}(\mathbf{C}_{\text{opt}}) = V(:, 1) \cdot (1/\alpha),$$

де $\alpha = \max(\text{abs}(V(:,1)))$. Якщо $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ має ранг r , то $A \approx \sum_{k=1}^r \sigma_k U_k \otimes V_k$. Розглянемо властивості ПмВП, отриманої як результат сингулярної декомпозиції матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ у контексті ТНМ. Відомо, що головний об'єкт ТНМ завжди представлений у вигляді $\tilde{x} = \{x / \mu^{(x)}\}$, $x \in X$, $\mu^{(x)} \rightarrow [0, 1]$. Універсальна множина (УМ) $x \in X$ обчислюється на основі множини початкових даних. Зазвичай інтервал УМ відомий: $x \in I^{(x)} = [x^{\min}, x^{\max}]$, ФН обрана суб'єктивно, тензорно-матрична модель обчислена у вигляді $T^{(x)} = (x \otimes \mu^{(x)}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, де m — кількість α -рівнів НМ.

Якщо m суб'єктивно велика, $T^{(x)}$ може бути представлений у вигляді 3D тензора: $T^{(x)} = \text{reshape}(T^{(x)}, [n, n, n]) \in \mathbb{R}^{n \times n \times n}$, де $n \cdot n \cdot n = m \cdot m$, $T^{(x)} = [T^{(x)}(:, :, 1), \dots, T^{(x)}(:, :, n)]$. У випадку, коли $T^{(x)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, сингулярна декомпозиція $T^{(x)}$ дає змогу отримати ПмВП Pr_PVP1 таку, що $\|Pr_PVP1(:, 1) \otimes Pr_PVP1(:, 2)\|_F$ і $\|T^{(x)}\|_F$ майже однакові. Крім того, Ф-норми початкової НМ $\tilde{x} = \{x / \mu^{(x)}\}$, представленої у вигляді $fs = [x_1 \mu^{(x_1)}; \dots; x_m \mu^{(x_m)}] \in \mathbb{R}^{m \times 2}$, і Pr_PVP1 також майже збігаються. Додамо до цього, що дефазифіковані значення НМ $\tilde{x} = \{x / \mu^{(x)}\}$ і Pr_PVP1 також майже близькі. Отже, НМ $\tilde{x}$ і ПмВП, отримані з використанням реалізації сингулярної декомпозиції $T^{(x)} = (x \otimes \mu^{(x)})$ є найближчими нечіткими множинами у розумінні Ф-норми і майже близькими у розумінні дефазифікованих значень.

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ ПРОГНОЗУВАННЯ НЧР З ВИКОРИСТАННЯМ ПМВП, НАЙБЛИЖЧОЇ ДО СТАНДАРТНОЇ НМ

Приклад 1. Обчислення підмножини впорядкованих пар, найближчої до стандартної НМ з гаусівською ФН.

1. Стандартна НМ з гаусівською ФН:

```
x2=[1:8/10:9]; y2= gaussmf(x2,[2.0 5]); fs2=[x2' y2'];
```

Ф-норма і дефазифіковане значення стандартної НМ:

```
sum(fs2(:,1).*fs2(:,2))/sum(fs2(:,2))= 5.00
norm(fs2,'fro')= 18.70.
```

2. Формування тензорної моделі НМ:

```
tx2=kron(fs2(:,1),fs2(:,2)');
```

tx2 =

0.14	0.28	0.49	0.73	0.92	1.00	0.92	0.73	0.49	0.28	0.14
0.24	0.50	0.88	1.31	1.66	1.80	1.66	1.31	0.88	0.50	0.24
0.35	0.72	1.27	1.89	2.40	2.60	2.40	1.89	1.27	0.72	0.35
0.46	0.95	1.65	2.47	3.14	3.40	3.14	2.47	1.65	0.95	0.46
0.57	1.17	2.04	3.05	3.88	4.20	3.88	3.05	2.04	1.17	0.57
0.68	1.39	2.43	3.63	4.62	5.00	4.62	3.63	2.43	1.39	0.68
0.78	1.61	2.82	4.21	5.35	5.80	5.35	4.21	2.82	1.61	0.78
0.89	1.84	3.21	4.79	6.09	6.60	6.09	4.79	3.21	1.84	0.89
1.00	2.06	3.60	5.37	6.83	7.40	6.83	5.37	3.60	2.06	1.00
1.11	2.28	3.99	5.95	7.57	8.20	7.57	5.95	3.99	2.28	1.11
1.22	2.50	4.38	6.54	8.31	9.00	8.31	6.54	4.38	2.50	1.22

Ф-норма: Кронекер-добуток компонент НМ

```
[norm(tx2,'fro') 39.09.
```

3. Сингулярна декомпозиція тензорної моделі НМ і побудова ПмВП, найближчої до стандартної НМ:

```
[u s v]=svd(tx2);
Pr_PVP1=sort([abs(u(:,1))*s(1,1)*max(abs(v(:,1)))
              (abs(v(:,1)))/max(abs(v(:,1)))])
```

Ф-норми: тензорної моделі стандартної НМ 39.09

Кронекер-добуток компонент ПмВП 39.09

ПмВП 18.70

Стандартна НМ 18.70

Дефазифіковане значення

ПмВП 5.68

Стандартна НМ 5.12

4. Графічне представлення стандартної НМ і ПмВП (рис. 4)

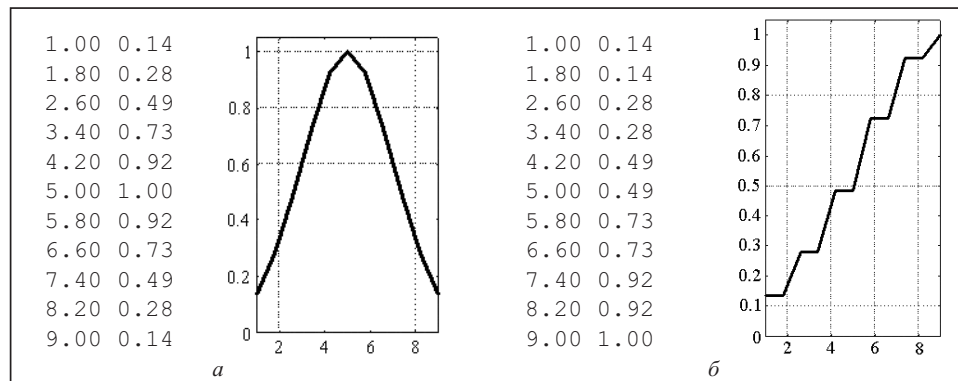


Рис. 4. Стандартна НМ з гаусівською ФН (а), найближча ПмП (б)

Окремо зауважимо, що властивостями ПмВП наділена також підмножина, отримана розмиванням УМ за допомогою Теплиць-матриці (рис. 5).

Розглянемо фрагмент MATLAB-коду:

```
tx3=toeplitz([x2]); [u s v]=svd(tx3);
Pr_1PVP1=sort([abs(u(:,1))*s(1,1)*max(abs(v(:,1)))
              (abs(v(:,1)))/max(abs(v(:,1)))])
```

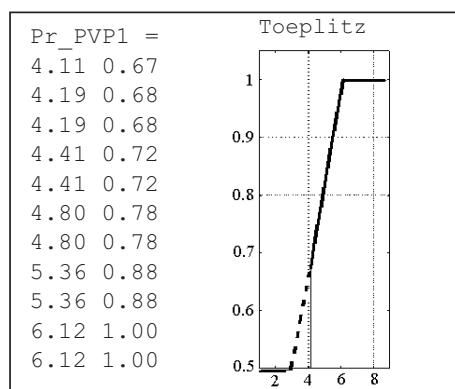


Рис. 5. ПмВП, обчислена з допомогою розмивання УМ з використанням Теплиць-матриці та її сингулярної декомпозиції

Тут Ф-норма утвореної ПмВП та дефазифіковане значення становлять 16.63 та 5.00 відповідно, тоді як аналогічні параметри евристично створеної НМ *приблизно 5* — 18.7 та 5.0, похибка у межах $\pm 10\%$, що для умов невизначеності може вважатись допустимим. Зауважимо, що для НМ та утвореної (обчисленої) найближчої ПмВП рівність норм не гарантує такої ж рівності дефазифікованих значень (похибка $\pm 10\%$). Водночас рівність дефазифікованих значень гарантує близькість норм у межах $\pm 10\%$.

Приклад 2. Прогнозування НЧР з використанням ПмВП, найближчої до стандартної НМ. В умовно представленому НЧР кожна змінна є НМ з гаусівською ФН:

x_1 — *приблизно 5*; x_2 — *приблизно 6*; x_3 — *приблизно 4*; x_4 — *приблизно 5*; x_5 — *приблизно 6*; x_6 — *приблизно 6.5*; x_7 — *приблизно 7*.

Нечітка змінна	$\tilde{x}_1 \triangleq \tilde{5}$	$\tilde{x}_2 \triangleq \tilde{6}$	$\tilde{x}_3 \triangleq \tilde{4}$	$\tilde{x}_4 \triangleq \tilde{5}$	$\tilde{x}_5 \triangleq \tilde{6}$	$\tilde{x}_6 \triangleq \tilde{6.5}$	$\tilde{x}_7 \triangleq \tilde{7}$
Час, ум. од.	1	2	3	4	5	6	7

Головне завдання: на підставі інформації про НМ $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_6$ прогнозувати наступне значення часового ряду НМ $\tilde{x}_7$, контрольне значення якої відоме

```
%УНІВЕРСАЛЬНІ МНОЖИНИ
x1=[3:4/4:7]; x2=[3:6/4:9]; x3=[3:2/4:5]; x4=[3:4/4:7];
x5=[3:6/4:9]; x6=[3:7/4:10]; x7=[5:4/4:9];

%ФУНКЦІЇ НАЛЕЖНОСТІ
y1= gaussmf(x1,[1.5 5]); y2= gaussmf(x2,[1.5 6]);
y3= gaussmf(x3,[1.5 4]); y4= gaussmf(x4,[1.5 5]);
y5= gaussmf(x5,[1.5 6]); y6= gaussmf(x6,[1.5 6.5]);
y7= gaussmf(x7,[1.5 7]);
```

Формування тензорної моделі НЧР:

НМ $\rightarrow$ Кронекер-добуток

px is a tensor of size $5 \times 5 \times 7$

Тензор часового ряду $px \in \mathbb{R}^{5 \times 5 \times 7}$:

$px(:, :, 1) =$	$px(:, :, 4) =$
1.23 2.40 3.00 2.40 1.23	1.23 2.40 3.00 2.40 1.23
1.64 3.20 4.00 3.20 1.64	1.64 3.20 4.00 3.20 1.64
2.06 4.00 5.00 4.00 2.06	2.06 4.00 5.00 4.00 2.06
2.47 4.80 6.00 4.80 2.47	2.47 4.80 6.00 4.80 2.47
2.88 5.61 7.00 5.61 2.88	2.88 5.61 7.00 5.61 2.88
$px(:, :, 2) =$	$px(:, :, 5) =$
0.41 1.82 3.00 1.82 0.41	0.41 1.82 3.00 1.82 0.41
0.61 2.73 4.50 2.73 0.61	0.61 2.73 4.50 2.73 0.61
0.81 3.64 6.00 3.64 0.81	0.81 3.64 6.00 3.64 0.81
1.02 4.55 7.50 4.55 1.02	1.02 4.55 7.50 4.55 1.02
1.22 5.46 9.00 5.46 1.22	1.22 5.46 9.00 5.46 1.22
$px(:, :, 3) =$	$px(:, :, 6) =$
2.40 2.84 3.00 2.84 2.40	0.20 1.52 3.00 1.52 0.20
2.80 3.31 3.50 3.31 2.80	0.31 2.41 4.75 2.41 0.31
3.20 3.78 4.00 3.78 3.20	0.43 3.29 6.50 3.29 0.43
3.60 4.26 4.50 4.26 3.60	0.54 4.18 8.25 4.18 0.54
4.00 4.73 5.00 4.73 4.00	0.66 5.06 10.00 5.06 0.66
$px(:, :, 7) =$	
2.06 4.00 5.00 4.00 2.06	
2.47 4.80 6.00 4.80 2.47	
2.88 5.61 7.00 5.61 2.88	
3.29 6.41 8.00 6.41 3.29	
3.70 7.21 9.00 7.21 3.70	

Тензор ваг $W \in \mathbb{R}^{5 \times 5 \times 7}$:

$W(:, :, 1) = W(:, :, 2) = W(:, :, 3) = W(:, :, 4) =$	$W(:, :, 7) =$
$W(:, :, 5) = W(:, :, 6) =$	
1.00 1.00 1.00 1.00 1.00	0 0 0 0 0
1.00 1.00 1.00 1.00 1.00	0 0 0 0 0
1.00 1.00 1.00 1.00 1.00	0 0 0 0 0
1.00 1.00 1.00 1.00 1.00	0 0 0 0 0
1.00 1.00 1.00 1.00 1.00	0 0 0 0 0

Відновлення фронтального слайсу $px(:, :, 7) \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$:

```
disp('Формування тензорної моделі НЧР згідно з вимогами Tensor
Toolbox (Т.KOLDA)')

px(:, :, 1)=tx1; px(:, :, 2)=tx2; px(:, :, 3)=tx3; px(:, :, 4)=tx4;
px(:, :, 5)=tx5; px(:, :, 6)=tx6; px(:, :, 7)=tx7; ця НМ вважається
невідомою
px(:, :, 1:7) — фронтальні слайси, сукупність яких утворює 3D тензор
px=tensor(px)

ones(5,5,7); W(:, :, 7)=zeros(5); — утворення вагового тензора

W=tensor(W); k=cp_wopt(px,W,3) — відновлення тензора з відсутніми
даними
У формі Крускал-тензора
tr=full(k); %стандартна форма представлення результату
```

Зауважимо, що під час розв'язання всіх задач тензорного аналізу використано математичне забезпечення Tensor Toolbox, запропоноване в [20, 21]. Формат Крускала — це розкладання тензора $\mathcal{X}$ як суми зовнішніх добутоків у вигляді стовпчиків матриць. Наприклад, тензор можна записати як $\mathcal{X} \approx \sum_{r=1}^R a_r \circ b_r \circ c_r$, де індекс позначає індекс стовпчика, а $\circ$ — символ зовнішнього добутку. Інакше кажучи, тензор $\mathcal{X}$ будується зі стовпчиків матриць **A**, **B** і **C**. Часто корисно чітко зазначити для кожного зовнішнього добутку, що можна зробити, ввівши множник λ_r : $\mathcal{X} \approx \sum_{r=1}^R \lambda_r a_r \circ b_r \circ c_r$. Клас *ktensor* у Tensor Toolbox зберігає компоненти тензора $\mathcal{X}$ та може виконувати багато операцій, наприклад *ttm*, без явного формування тензора $\mathcal{X}$.

Наведені у табл. 1 дані підтверджують, що запропонований метод прогнозування НЧР, що базується на використанні тензорних моделей НМ та динамічного тензорного аналізу, дає змогу отримати прогнозовані значення ПмВП, найближчої до гіпотетичної (прогнозованої) НМ з точністю (± 5 – 10 %), що з прикладної точки зору є достатнім.

Таблиця 1

Підмножини впорядкованих пар, найближчі до		НМ <i>приблизно 7</i>
Прогнозованої НМ	Стандартної НМ	
5.33 0.32	5.00 0.41	5.00 0.41
5.89 0.73	6.00 0.41	6.00 0.80
6.91 0.89	7.00 0.80	7.00 1.00
7.08 0.93	8.00 0.80	8.00 0.80
8.16 1.00	9.00 1.00	9.00 0.41
Ф-норма та дефазифіковане значення		
15.87 6.95	16.05 7.00	16.05 7.00

Примітка. ПмВП, представлені в першому та другому стовпчиках, отримано в результаті сингулярних декомпозицій тензора $px(:, :, 7)$ і тензорної моделі стандартної НМ *приблизно 7* з гаусівською ФН відповідно, в третьому стовпчику — стандартна НМ $\tilde{x}_{7(gaussfm)} \triangleq \tilde{7}$, обчислена за правилами ТНМ.

ВИСНОВКИ

1. Концепція тензорного моделювання НМ і обчислення найближчої ПмВП дає змогу задачу прогнозування НЧР представити як задачу моделювання 3D тензорного ЧР, наділеного неповнотою (окремі компоненти тензора відсутні). Розглядувана СР-декомпозиція неповного тензора і програма CP_WOPT (на її основі) дають змогу відновити майже 80–90 % відсутніх значень.

2. Описаний НЧР трансформується у тензорний ЧР, який являє собою сукупність фронтальних або латеральних слайсів, які своєю чергою моделюють відповідні НМ. За-

дача прогнозування НЧР розглядається як обчислення значень відновлених елементів (останній слайс у сукупності слайсів, які утворюють ТЧР).

3. Тензорна модель НМ за достатньої кількості α -рівнів може бути представлена у 2D або 3D просторах, відповідно ТЧР може бути 3D вимірним або високо вимірним тензором. Це дає можливість отримати альтернативні розв'язки та підвищити точність прогнозування.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Афанасьева Т.В., Наместников А.М., Перфильева И.Г., Романов А.А., Ярушкина Н.Г. Прогнозирование временных рядов: нечеткие модели. Под ред. Н.Г. Ярушкиной. Ульяновск: УлГТУ, 2014. 145 с.
2. Acar E., Dunlavy D.M., Kolda T.G., Mørup M. Scalable tensor factorizations for incomplete data. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*. 2011. Vol. 106, Iss. 1 P. 41–56. <http://doi.org/10.1016/j.chemolab.2010.08.004>.
3. Sahin A., Dodurka M.F., Kumbasar T., Yesil E., Siradag S. Review study on fuzzy time series and their applications in the last fifteen years. *International Fuzzy Systems Symposium (FUZZYSS'15)*. 2015. Vol. 4. P. 166–171. URL: <https://www.researchgate.net/publication/303523611>.
4. Mohammed Eid Awad Alqatqat, Ma Tie Feng. Methods in fuzzy time series prediction with applications in production and consumption electric. *American Journal of Mathematics and Statistics*. 2020. Vol. 10(3). P. 79–95. <http://doi.org/10.5923/j.ajms.20201003.03>.
5. Qisen Caia, Defu Zhanga, Bo Wu, Stephen C.H. Leung. A novel stock forecasting model based on fuzzy time series and genetic algorithm. *Procedia Computer Science*. 2013. Vol. 18. P. 1155–1162 <http://doi.org/10.1016/j.procs.2013.05.281>.
6. Канеман Д. Мыслення швидко й повільно. 3-є вид. Київ: Наш формат, 2019. 480 с.
7. Huachun Tan, Yuankai Wu, Guangdong Feng, Wuhong Wang, Bin Ran. A new traffic prediction method based on dynamic tensor completion. *Procedia — Social and Behavioral Sciences*. 2013. Vol. 96. P. 2431–2442.
8. Минаев Ю.Н., Филимонова О.Ю., Минаева Ю.И. Кронекеровы (тензорные) модели нечетко-множественных гранул. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. Т. 50, № 4. С.42–52.
9. Minaev Y.N., Filimonova O.Y., Minaeva J.I., Filimonov G.A. Fuzzy mathematics with limited possibilities for assigning membership functions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56, N 1. P. 29–39. <https://doi.org/10.1007/s10559-020-00218-9>.
10. Acar E., Kolda T.G., Dunlavy D.M., Morup M. Scalable tensor factorizations with missing data. arXiv:1005.2197 [math.NA]. 12 May 2010. 25 p.
11. Tomasi G., Bro R. PARAFAC and missing values. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*. 2005. Vol. 75. P. 163–180.
12. Papalexakis E.E., Faloutsos C., Sidiropoulos N.D. Tensors for data mining and data fusion: Models, applications, and scalable algorithms. *ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology*. 2016. Vol. 8, N 2. P. 1–44.
13. Rogers M., Li L., Russell S. Multilinear dynamical systems for tensor time series. URL: <https://ptolemy.berkeley.edu/projects/robotics/pubs/26/nips13-tensor.pdf>.
14. Chena X., Hea Z., Sunb L. A Bayesian tensor decomposition approach for spatiotemporal traffic data imputation. Preprint. October 2018. 17 p. URL: <https://www.researchgate.net/publication/328560889>.

15. Yaru Su, Xiaohui Wu, Wenxi Liu. Low-rank tensor completion by sum of tensor nuclear norm minimization. *IEEE Access*. 2019. Vol. 7. P. 134943–134953. <http://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2940664>.
16. Song Q., Chissom B.S. Fuzzy time series and its models. *Fuzzy Sets and Systems*. 1993. Vol. 54, N 3. P. 269–277.
17. Ming-Tao Chou. Fuzzy forecast based on fuzzy time series. In: *Time Series Analysis — Data, Methods, and Applications*. Chun-Kit Ngan (Ed.). <http://doi.org/10.5772/intechopen.82843>.
18. Song Q., Ge H., Caverlee J., Hu X. Tensor completion algorithms in big data analytics. *arXiv:1711.10105v2 [stat.ML]*. 3 May 2018. 44 p.
19. Bader B.W., Kolda T.G. Tensor toolbox for MATLAB, Version 3.2.1. URL: <https://www.tensor-toolbox.org> (April 5, 2021).
20. Kolda T., Bader B.W., Acar A., E. NMN Dunlavy D., Bassett R., Battaglino C.J. Plantenga T., Chi E., Hansen S. and USDOE. Tensor Toolbox for MATLAB v. 3.0. Computer software. URL: <https://www.osti.gov/servlets/purl/1349514>. USDOE. 7 Mar. 2017. Web. doi: 10.11578/dc.20201001.24.

Yu.M. Minaev, O.Yu. Filimonova, Yu.I. Minaeva
FORECASTING OF FUZZY TIME SERIES BASED ON THE CONCEPT
OF NEAREST FSAND TENSOR MODELS OF TIME SERIES

Abstract. Forecasting of fuzzy time series is considered by presenting a standard fuzzy set in the form of a tensor obtained as a result of the tensor product of components, forming a tensor sequence whose last element (the predicted fuzzy set) is calculated as an incomplete tensor (with missing elements). Singular value decomposition of the restored tensor allows obtaining a subset of ordered pairs that is closest (in terms of the F-norm) to the predicted fuzzy set. An example of predicting a fuzzy time series is given.

Keywords: fuzzy set, tensor, missing data, singular value decomposition, F-norm.

Надійшла до редакції 09.11.2021