

Т.Є. РОМАНОВА

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, Україна, e-mail: tarom27@yahoo.com.

П.І. СТЕЦЬОК

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна, e-mail: stetsyukp@gmail.com.

А. ФІШЕР

Інститут обчислювальної математики, Технічний університет Дрездена, Дрезден, Німеччина, e-mail: Andreas.Fischer@tu-dresden.de.

Г.М. ЯСЬКОВ

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, Україна, e-mail: yaskov@ukr.net.

ПРОПОРЦІЙНЕ ПАКУВАННЯ КРУГІВ У КРУГОВОМУ КОНТЕЙНЕРІ¹

Анотація. Розглянуто задачу пакування кругів заданих типів у круговому контейнері. Кругам дозволено перетинати межу контейнера у заздалегідь визначеному околі, який залежить від типу кругів (умова псевдовключення). Сім'я кругів розміщується у контейнері за умови неперетину кругів, псевдовключення та дотримання заданих пропорцій типів кругів (умова пропорційності) задля максимізації загальної кількості кругів. Побудовано математичну модель як задачу змішаного цілочислового нелінійного програмування. Запропоновано евристичний алгоритм, який застосовує задачу нелінійного програмування для пакування заданої кількості кругів у круговому контейнері, максимізуючи змінні радіуси кругів. Наведено результати обчислювальних експериментів.

Ключові слова: пропорційне пакування, круги, круговий контейнер, псевдовключення, оптимізація.

ВСТУП

Оптимальне пакування кругів в обмеженій області має різноманітні практичні застосування в сучасних задачах медицини, біології, логістики та адитивного виробництва [1–4]. Задачі пакування кругів є NP-складними [5]. Багато публікацій присвячено методам розв'язання цього класу задач. Задачі пакування кругів для різних контейнерів, зокрема круга, квадрата, прямокутника, смуги та трикутника, розглянуто у роботі [6]. Шляхом використання скінченної сітки для апроксимації контейнера оптимізаційну задачу пакування кругів зведено до задачі лінійного цілочислового програмування великої розмірності. У роботі [7] цей підхід поширено на задачу пакування кругових об'єктів, які можна задати як круги в деякій метриці. Пакування рівних кругів у круговий контейнер із зонами заборони розглянуто у [8, 9]. У [10] для задачі із змінним розміром контейнера запропоновано гібридні алгоритми, що застосовують багатостартову стратегію. Пакування кругів за умови балансу досліджено в [11, 12]. У [13] розглянуто дві задачі. В першій мінімізують радіус контейнера, у другій — максимізують мінімальну відстань між кругами, а також між кругами та межею контейнера. Наведено математичні моделі задач та стратегії їхнього розв'язання із застосуванням алгоритму Шора [14–16] та методу декомпозиції [17]. Еталонні тестові приклади та найвідоміші розв'язки для пакування однакових і неоднакових кругів у різних контейнерах підсумовано на сайті E. Specht [18].

У цій статті розглянуто задачу пакування максимальної кількості кругів заданих типів у круговому контейнері за умов неперетину кругів та дотримання

¹Роботу підтримано грантами Volkswagen Foundation #Az97775, #9C086 та грантом Національного фонду досліджень України (# 02.2020/167).

пропорційності типів кругів. Кругам дозволено перетинати межу контейнера в деякому заздалегідь визначеному околі, який залежить від типу кругів (умова псевдовключення).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай $\{C_i(u_i), i=1, \dots, n\}$ — сім'я кругів $C_i(u_i) = \{U \in \mathbf{R}^2: \|U - u_i\| \leq r_i\}$ із центрами $u_i = (x_i, y_i)$. Кожен круг $C_i(u_i)$ належить одному із K типів.

Нехай C_0 — круговий контейнер із заданим радіусом R та центром у точці $(0, 0)$.

Уведемо такі позначення: $k=1, \dots, K$ — індексна множина типів кругів, n_k — достатньо велика кількість кругів k -го типу, $n = \sum_{k=1}^K n_k$, $\varepsilon_i, i=1, \dots, n$, — випадково вибраний параметр $\varepsilon_i \in [-r_i, r_i]$, Δ_i — задана константа, $0 \leq \tau_k^- \leq \tau_k \leq \tau_k^+ \leq 1$, τ_k — частка кругів k -го типу, $\tau_k = \frac{\text{кількість упакованих кругів } k\text{-го типу}}{\text{загальна кількість упакованих кругів}}$, $\tau_k^- = \tau_k - \Delta_k$, $\tau_k^+ = \tau_k + \Delta_k$.

Постановка задачі пропорційного пакування кругів (RCPP — Ratio Circle Packing Problem) є такою. Знайти максимальну кількість кругів C_i із сім'ї $\{C_i, i=1, \dots, n\}$, для яких виконано такі умови:

$$u_i \in C_0(\varepsilon_i) = \{U \in \mathbf{R}^2: \|U\| \leq R + \varepsilon_i\} \text{ (умова псевдовключення) для } i=1, \dots, n,$$

$$\text{int } C_i(u_i) \cap \text{int } C_j(u_j) = \emptyset \text{ (умова неперетину) для } 1 \leq i < j \leq n,$$

$$\tau_k^- \leq \tau_k \leq \tau_k^+ \text{ для } k=1, \dots, K \text{ (умова пропорційності).}$$

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ RCPP

Визначимо змінні задачі RCPP. Вектор $u = (u_i, i=1, \dots, n) \in \mathbf{R}^{2n}$ задає координати центрів кругів $C_i(u_i)$, $i=1, \dots, n$, вектор $\pi = (\pi_i, i=1, \dots, n) \in \mathbf{B}^n$, $k=1, \dots, K$, визначає Булеві змінні $\pi_i \in B = \{0, 1\}$.

Вектор усіх змінних позначають як $v = (u, \pi)$.

Математична модель задачі RCPP має такий вигляд:

$$\max \sum_{i=1}^n \pi_i \text{ за умови } v \in D \subset \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{B}^n, \quad (1)$$

де множина допустимих розв'язків D описується системою нерівностей

$$\pi_i \varphi_i(u_i) \geq 0, \quad i=1, \dots, n, \quad (2)$$

$$\pi_i \pi_j \varphi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad (3)$$

$$\tau_k^- \sum_{i=1}^n \pi_i \leq \sum_{i=1}^n \pi_i \leq \tau_k^+ \sum_{i=1}^n \pi_i, \quad i=1, \dots, n, \quad k=1, \dots, K. \quad (4)$$

У моделі (1)–(4) нерівність (2) відповідає за умову псевдовключення, де

$$\varphi_i(u_i) = R + \varepsilon_i - \|u_i\|,$$

нерівність (3) описує умову неперетину кругів $C_i(u_i)$, де

$$\varphi_{ij}(u_i, u_j) = \|u_i - u_j\| - (r_i + r_j),$$

а система нерівностей (4) забезпечує умову пропорційності.

Основні властивості задачі (1)–(4) є такими.

1. Модель є змішаною цілочисловою нелінійною задачею математичного програмування (MINLP — Mixed-Integer NonLinear Programming).

2. Цільова функція (1) є лінійною.

3. Кількість змінних становить $3n$ (n Булевих та $2n$ неперервних змінних).

4. Область допустимих розв'язків включає $n + 0.5n(n - 1)$ нелінійних нерівностей в обмеженнях (2), (3) та $2k$ лінійних нерівностей в обмеженнях (4).

Для пошуку оптимальних розв'язків у прикладах невеликої розмірності можна використати безпосередньо сучасні солвери для задач глобальної оптимізації. Для задач великої розмірності запропоновано підхід, який дає змогу знайти допустимі розв'язки.

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ RCPP

Ключовою ідеєю алгоритму розв'язання RCPP є зведення задачі (1)–(4) до послідовності задач ($l = 1, 2, \dots$) пакування заданої кількості кругів $C_i(u_i, \rho_i)$, $i = 1, \dots, n_l \leq n$, зі змінними радіусами ρ_i , $0 \leq \rho_i \leq r_i$, $i = 1, \dots, n_l$, у крузі C_0 радіуса R з центром у точці $(0, 0)$ задля максимізації радіусів кругів до оригінальних значень.

Математична модель l -ї задачі пакування має такий вигляд:

$$\max \sum_{i=1}^{n_l} \rho_i, \quad v_l \in W_l, \quad (5)$$

де $v_{n_l} = (u_1, \dots, u_{n_l}, \rho_1, \dots, \rho_{n_l})$ — вектор змінних, а область допустимих розв'язків $W_l \subset \mathbf{R}^{3n_l}$ описується системою нерівностей

$$\hat{\varphi}_i(u_i) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n_l, \quad (6)$$

$$\hat{\varphi}_{ij}(u_i, u_j, \rho_i, \rho_j) \geq 0, \quad 1 \leq i < j \leq n_l, \quad (7)$$

$$0 \leq \rho_i \leq r_i, \quad i = 1, \dots, n_l. \quad (8)$$

Тут

$$\hat{\varphi}_i(u_i) = -\|u_i\|^2 + (R + \varepsilon_i)^2, \quad \hat{\varphi}_{ij}(u_i, u_j, \rho_i, \rho_j) = \|u_i - u_j\|^2 - (\rho_i + \rho_j)^2.$$

Очевидно, що

$$\rho_i = r_i, \quad i = 1, \dots, n_l, \quad (9)$$

є глобальним розв'язком задачі (5)–(8).

Опис алгоритму.

Введемо такі позначення:

I_B — мінімальна множина кругів відповідно до часток τ_k , $k = 1, \dots, K$;

$\mu = |I_B|$ — потужність множини I_B , μ — мінімальна кількість кругів, для яких виконано строгу умову пропорційності: $\tau_k = (\tau_k^+ - \tau_k^-) / 2$, $\tau_k = \mu_k / \mu$, $k = 1, \dots, K$,

$\mu = \sum_{k=1}^K \mu_k$. Алгоритм формування множини I_B наведено у Додатку 1;

I — поточна множина кругів, які розміщуються за умови пропорційності (4);

$|I| = m$ — потужність множини I ;

$\{i_k\}$ — круг k -го типу.

Вважаємо, що радіуси типів кругів ранжовано в порядку зростання.

Алгоритм містить такі кроки.

Крок 1. Встановлюємо $I := \emptyset$, $l := 0$, $m := 0$ (m — кількість кругів).

Крок 2. Встановлюємо $I := I \cup I_B$, $l := l + 1$, $m := m + p$.

Крок 3. Встановлюємо $n_l := m$ та шукаємо локальний максимум l -ї задачі (5)–(8) для n_l кругів.

Крок 4. Якщо розв’язок задачі (5)–(8) не задовольняє умову (9), то встановлюємо $I := I \setminus I_B$, $m := m - p$ і переходимо до кроку 5, в іншому разі переходимо до кроку 2.

Крок 5. Встановлюємо $k := 0$ (k — тип круга).

Крок 6. Встановлюємо $k := k + 1$.

Крок 7. Якщо $k < K + 1$, то переходимо до кроку 8, в іншому разі зупиняємо алгоритм, встановлюємо $n^* := m$.

Крок 8. Встановлюємо $I := I \cup \{i_k\}$, $m := m + 1$ (формування множини кругів для $(l+1)$ -ї задачі (5)–(8)).

Крок 9. Якщо для множини I , яка містить m кругів, виконано умову пропорційності (4), то переходимо до кроку 10, в іншому разі встановлюємо $I := I \setminus \{i_k\}$, $m := m - 1$ та переходимо до кроку 6.

Крок 10. Встановлюємо $l := l + 1$ (перехід до $(l+1)$ -ї задачі (5)–(8)).

Крок 11. Встановлюємо $n_l := m$ та шукаємо локальний максимум l -ї задачі (5)–(8) для n_l кругів. Якщо розв’язок задачі задовольняє умову (9), то переходимо до кроку 12, в іншому разі встановлюємо $I := I \setminus \{i_k\}$, $m := m - 1$, $n^* := m$ та зупиняємо алгоритм.

Крок 12. Якщо $k > 1$, то встановлюємо $k := 1$. (Після успішного додавання круга k -го типу до сукупності I знову повертаємось до кругів першого типу, які мають мінімальний радіус, враховуючи (1). Зрозуміло, що найімовірнішим буде додавання наступного круга саме з мінімальним радіусом.)

Крок 13. Переходимо до кроку 7.

Запропонований алгоритм дає змогу отримувати допустимі розв’язки задачі (1)–(4).

ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Для перевірки ефективності запропонованих моделей та алгоритмів використано солвер BARON з мовою моделювання AMPL [19–21] для пошуку глобальних екстремумів задачі (1)–(4). Під час пошуку наближеного розв’язку за допомогою розробленого алгоритму для розв’язання задачі нелінійного програмування (5)–(8) використано солвер IPOPT [22], який ґрунтується на методі внутрішньої точки. Усі приклади обчислено за допомогою DESKTOP-54TG91N з процесором Intel(R) Core(TM) i3-6100T CPU @ 3.20GHz, RAM 8 Gb.

Приклад 1. Нехай $R = 10$, $K = 5$. Вихідні дані наведено у табл. 1. Оптимальний розв’язок $n^* = 47$ отримано за допомогою солвера BARON за 601 с, при цьому $r_i = 1.1$, $\varepsilon_i = -1$, $i = 1, \dots, 10$; $r_i = 1.2$, $\varepsilon_i = -1$, $i = 11, \dots, 19$; $r_i = 1.3$, $\varepsilon_i = -1$, $i = 20, \dots, 28$; $r_i = 1.4$, $\varepsilon_i = -1.1$, $i = 29, \dots, 41$; $r_i = 1.5$, $\varepsilon_i = -1.2$, $i = 42, \dots, 53$.

Решту підсумкових даних наведено у табл. 2 та 3. Відповідне розміщення кругів проілюстровано на рис. 1.

Таблиця 1. Вихідні дані для прикладу 1

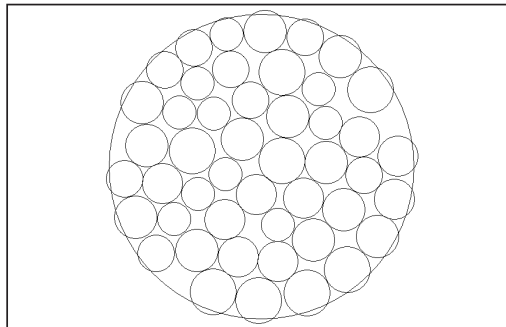
k	n_k	Радіус типу k	ε_k	τ_k^-	τ_k^+
1	10	1.1	-1	0.1	0.3
2	9	1.2	-1	0.1	0.3
3	9	1.3	-1	0.1	0.3
4	13	1.4	-1.1	0.1	0.3
5	12	1.5	-1.2	0.1	0.3

Таблиця 2. Результати розв'язання для прикладу 1

i	π_i	x_i	y_i	i	π_i	x_i	y_i
1	1	1.06658	-3.80041	28	1	-6.46764	-1.11188
2	1	4.21609	2.89876	29	1	4.27227	0.294641
3	1	-4.14687	-1.77487	30	1	-4.23598	-5.47128
4	1	-2.25991	8.6986	31	1	-7.83191	4.20386
5	1	-2.35012	-0.46502	32	1	5.41266	-2.80532
6	1	-4.18296	5.47623	33	0	-5.40101	-7.28041
7	1	-3.10332	3.51072	34	1	5.16564	7.22111
8	1	-5.70708	-3.42463	35	1	1.7209	3.30075
9	1	3.76354	5.09385	36	1	-1.22744	1.7971
10	1	-5.38499	3.55659	37	1	3.41684	-4.81755
11	0	5.17188	5.30165	38	1	-8.23412	-3.32528
12	1	6.75524	-0.54819	39	1	7.60399	-4.59088
13	1	-8.95797	-0.77432	40	1	0.250991	8.88533
14	1	-4.40763	7.81823	41	1	-7.50684	1.40927
15	1	-6.91169	-5.6988	42	1	5.62099	-6.74662
16	1	2.86444	8.50486	43	1	-3.17161	-8.19818
17	1	-2.02654	6.39183	44	0	8.45998	2.91705
18	1	-0.69338	4.37026	45	0	6.96596	-5.84958
19	1	-6.34316	6.35831	46	1	3.00211	-8.26142
20	1	-2.40465	-3.45042	47	1	-4.53753	1.04235
21	1	2.77626	-2.05766	48	1	7.16518	5.05744
22	1	-1.52421	-5.91541	49	1	-0.160448	-8.77324
23	1	6.45019	1.96535	50	1	1.35497	0.407689
24	1	1.07142	-6.218	51	1	1.37132	6.19663
25	1	8.7337	-2.1081	52	0	8.45998	2.91705
26	1	-0.344853	1.8354	53	0	9.02451	-0.71658
27	1	-8.95252	0.701968				

Таблиця 3. Значення n_k^* та τ_k^* для прикладу 1

k	n_k^*	τ_k^*
1	10	0.212766
2	8	0.170213
3	9	0.191489
4	12	0.255319
5	8	0.170213



Приклад 2. Нехай $R=15$, $K=3$, $n = \sum_{k=1}^K n_k = 3000$. Вихідні дані наведено у табл. 4.

Розглянемо випадок а): $\tau_k = \tau_k^- = \tau_k^+$, $k=1, 2, 3$. Знайдено допустимий розв'язок: $n_1^* = 51$, $n_2^* = 34$, $n_3^* = 17$, $n^* = 102$; при цьому $r_i = 1$, $\varepsilon_i = -0.5$, $i=1, \dots, 51$;

Рис. 1. Розміщення $n^* = 47$ кругів, що відповідає оптимальному розв'язку задачі (1)–(4) у прикладі 1

$r_i = 1.5$, $\varepsilon_i = -1$, $i = 52, \dots, 85$; $r_i = 2$, $\varepsilon_i = -1.2$, $i = 86, \dots, 102$ (рис. 2, а). Час обчислення — 50 с.

Розглянемо випадок б): $\tau_k^- = \tau_k - 0.1$; $\tau_k^+ = \tau_k + 0.1$, $k = 1, 2, 3$. Знайдено наближений розв'язок: $n_1^* = 53$, $n_2^* = 34$, $n_3^* = 17$, $n^* = 104$; при цьому $r_i = 1$, $\varepsilon_i = -0.5$, $i = 1, 2, \dots, 53$; $r_i = 1.5$, $\varepsilon_i = -1$, $i = 54, \dots, 87$; $r_i = 2$, $\varepsilon_i = -1.2$, $i = 88, \dots, 104$ (рис. 2, б). Координати центрів кругів для цього випадку наведено в табл. 5, а значення n_k^* та τ_k^* — у табл. 6. Час обчислення становить 60 с.

Таблиця 4. Вихідні дані для прикладу 2

k	n_k	Радіус типу k	ε_k	τ_k
1	1000	1	-0.5	1 / 2
2	1000	1.5	-1	1 / 3
3	1000	2	-1.2	1 / 6

Таблиця 5. Результати розв'язання для прикладу 2, випадок б

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	0.589568	-3.77506	27	-3.13299	-7.61133	53	-7.20465	12.58314	79	-13.9275	4.033087
2	-3.56218	5.863177	28	4.968749	-10.9475	54	-2.49462	8.667198	80	-10.9439	-0.40405
3	-6.2176	-3.17738	29	-0.84854	-13.9739	55	14.32298	2.251989	81	4.545551	7.262606
4	-1.33383	11.48697	30	5.185573	0.252999	56	11.47769	-0.37268	82	3.009335	-0.97995
5	-12.1857	6.476338	31	-10.3327	9.445753	57	3.128785	9.776724	83	2.128045	11.51076
6	11.34507	2.624517	32	0.610001	-0.27473	58	-2.95956	14.1944	84	-1.21289	1.436922
7	-2.78784	-1.11786	33	9.467178	-5.66633	59	6.560736	-9.0197	85	-14.3491	2.077166
8	2.588651	2.612824	34	2.45303	-8.4442	60	-5.63522	3.69413	86	-0.49535	8.60423
9	9.335578	-10.1619	35	13.98303	-0.22859	61	14.24263	-2.71911	87	-5.93841	0.422897
10	-10.9359	-3.40417	36	11.41408	8.106531	62	7.407352	-12.4618	88	9.230811	6.139596
11	1.64364	6.500221	37	5.616073	9.522419	63	4.364629	5.114046	89	1.512979	-10.7611
12	4.819246	12.93082	38	-13.4404	-0.25264	64	13.83221	4.319842	90	-14.2609	-2.61501
13	-3.30686	-11.1084	39	-8.4444	-0.47654	65	12.31384	-2.18967	91	-3.34511	-14.1086
14	2.625624	-13.5477	40	-7.08579	-7.20933	66	5.62118	-13.3644	92	-8.17672	-9.45914
15	4.583098	-3.53537	41	8.00642	11.48342	67	2.724592	-5.9344	93	11.16263	5.619084
16	-11.3056	2.57419	42	-7.14951	5.685027	68	-0.33524	-11.5268	94	8.642748	4.109734
17	-6.84281	9.17294	43	-0.48948	-9.03096	69	-3.96526	10.02302	95	-4.9558	-5.89967
18	6.73164	6.048711	44	11.74357	-7.62094	70	0.590169	-6.77549	96	-8.86762	11.47171
19	-3.56078	2.297817	45	-12.3412	-6.60984	71	-9.21794	7.16608	97	13.09128	6.206953
20	8.441754	8.514164	46	-6.78153	-11.534	72	6.983385	-5.37555	98	-5.68871	-9.28331
21	9.371041	-1.71939	47	-2.80774	-4.6195	73	7.566762	-7.29092	99	6.872881	-1.5935
22	-7.80724	2.455617	48	5.083092	-7.00056	74	-0.97792	14.46661	100	-9.25411	-11.1624
23	-10.6493	-9.08745	49	-0.67741	3.879566	75	-9.79292	-6.70242	101	-13.7641	-4.55327
24	6.051275	3.126503	50	1.462331	13.92221	76	1.128516	9.772435	102	10.95321	-3.65574
25	13.0975	-4.94277	51	8.217673	1.050571	77	-9.56078	5.017814	103	-8.48826	-5.13937
26	-4.71052	12.40967	52	7.583048	-3.46715	78	10.20762	10.29688	104	-5.25489	-13.5139

Таблиця 6. Значення n_k^* та τ_k^* для прикладу 2, випадок б

k	n_k^*	τ_k^*
1	53	0.509615
2	34	0.326923
3	17	0.163462

ВИСНОВКИ

Розглянуто задачу пакування максимальної кількості кругів заданих типів із нестандартними умовами включення та пропорційності, яку застосовують у матеріалознавстві під час дослідження структур матеріалів. Круги можуть перетинати межу контейнера у заздалегідь визначеному околі, який залежить від типу кругів (псевдовключення). Сім'ю кругів розміщують у круговому контейнері за таких умов: умови а) неперетину кругів; б) псевдовключення; в) дотримання заданих пропорцій типів кругів за-

для максимізації загальної кількості кругів. Побудовано математичну модель як змішану цілочислову нелінійну задачу математичного програмування (MINLP). Запропоновано алгоритм, який ґрунтується на зведенні задачі MINLP до послідовності задач нелінійного програмування з розміщення заданої кількості кругів зі змінними метричними характеристиками за умови пропорційності. Наведено результати обчислень. Для пошуку глобальних екстремумів застосовано солвер BARON, для пошуку локальних екстремумів — солвер IPOPT.

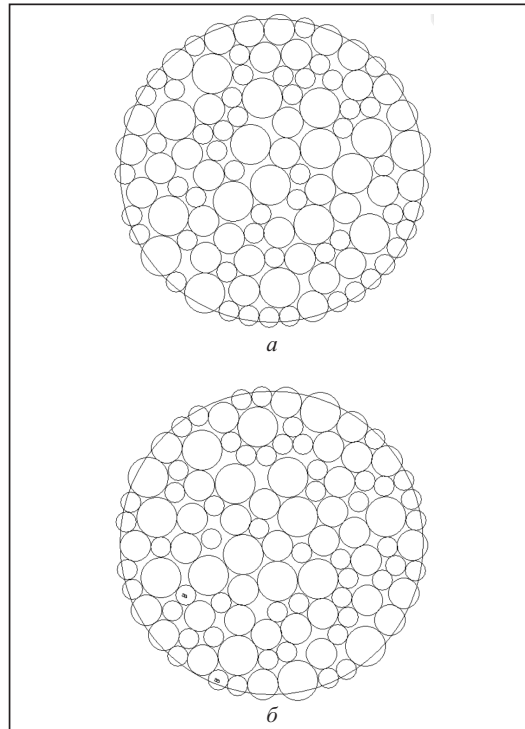


Рис. 2. Ілюстрація розміщення кругів, що відповідає допустимому розв'язку у прикладі 2 за умови: строгої пропорційності (а); нестрогой пропорційності (б)

ДОДАТОК 1. АЛГОРИТМ ФОРМУВАННЯ МІНІМАЛЬНОЇ МНОЖИНИ КРУГІВ I_B ВІДПОВІДНО ДО ЧАСТОК τ_k , $k=1, \dots, K$

Крок 1. Встановлюємо $\mu := 0$ (μ — кількість кругів у мінімальній сукупності).

Крок 2. Встановлюємо $\mu := \mu + 1$.

Крок 3. Якщо $\mu\tau_1 - \lfloor \mu\tau_1 \rfloor \neq 0$, то переходимо до кроку 2; в іншому разі переходимо до кроку 4 (перевірка формування мінімальної множини кругів відповідно до часток τ_k , $k=1, \dots, K$).

Кроки 4–7 — формування множини I_B .

Крок 4. Встановлюємо $k := 0$, $J := \emptyset$, $p := 0$. (Ініціалізація початкового значення типу кругів k , поточної множини J та $p = |J|$).

Крок 5. Встановлюємо $k := k + 1$.

Крок 6. Якщо $k = K + 1$, то встановлюємо $I_B := J$ та зупиняємо алгоритм.

Крок 7. Виконуємо $\mu\tau_k$ разів операцію $J := J \cup \{i_k\}$, встановлюємо $p := p + \mu\tau_k$ та переходимо до кроку 5. (Формування мінімальної множини I_B).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Yanchevskiy I., Lachmayer R., Mozgova I., Lippert R. B., Yaskov G., Romanova T., Litvinchev I. Circular packing for support-free structures. *EAI Endorsed Transactions on Energy Web*. 2020. Vol. 7, Iss. 30. e3. P. 1–10.
2. Blyuss O., Koriashkina L., Kiseleva E., Molchanov R. Optimal placement of irradiation sources in the planning of radiotherapy: mathematical models and methods of solving. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*. 2015. Vol. 2015. Article ID 142987. <https://doi.org/10.1155/2015/142987>.
3. Duriagina Z., Lemishka I., Litvinchev I., Marmolejo J.A., Pankratov A., Romanova T., Yaskov G. Optimized filling of a given cuboid with spherical powders for additive manufacturing. *Journal of the Operations Research Society of China*. 2021. Vol. 9, Iss. 4. P. 853–868. <https://doi.org/10.1007/s40305-020-00314-9>.
4. Plankovskyy S., Shypul O., Tsegelnyk Ye., Pankratov A., Romanova T., Litvinchev I. Circular layout in thermal deburring. In: *Advances in Intelligent Systems and Computing*. Shkarlet S., Morozov A., Palagin A. (Eds.). 2021. Vol. 1265. P. 111–120. URL: <file:///D:/Downloads/Springer.pdf>.
5. Chazelle B., Edelsbrunner H., Guibas L.J. The complexity of cutting complexes. *Discrete & Computational Geometry*. 1989. Vol. 4, Iss. 2. P. 139–181.
6. Galiev S.I., Lisafina M.S. Linear models for the approximate solution of the problem of packing equal circles into a given domain. *European Journal of Operational Research*. 2013. Vol. 230, Iss. 3. P. 505–514.
7. Litvinchev I., Infante L., Ozuna L. Packing circular like objects in a rectangular container. *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2015. Vol. 54, Iss. 2. P. 259–267.
8. Stoyan Y., Yaskov G. Packing equal circles into a circle with circular prohibited areas. *Int. J. Comput. Math.* 2012. Vol. 89, Iss. 10. P. 1355–1369.
9. López C.O., Beasley J.E. Packing a fixed number of identical circles in a circular container with circular prohibited areas. *Optim. Lett.* 2019. Vol. 13, Iss. 7. P. 1449–1468.
10. Akeb H., Hifi M., Negre S. An augmented beam search-based algorithm for the circular open dimension problem. *Comput. Ind. Eng.* 2011. Vol. 61, Iss. 2. P. 373–381.
11. Stetsyuk P.I., Romanova T.E., Scheithauer G. On the global minimum in a balanced circular packing problem. *Optim. Lett.* 2016. Vol. 10, Iss. 6. P. 1347–1360.
12. Grebennik I.V., Kovalenko A.A., Romanova T.E., Urniaieva I.A., Shekhovtsov S.B. Combinatorial configurations in balance layout optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 2. P. 221–231. <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0023-2>.
13. Romanova T., Pankratov O., Litvinchev I., Stetsyuk P., Lykhovyd O., Marmolejo-Saucedo J.A., Vasant P. Balanced circular packing problems with distance constraints. *Computation*. 2022. Vol. 10, Iss. 7. 113. <https://doi.org/10.3390/computation10070113>.
14. Shor N.Z., Zhurbenko N.G., Likhovid A.P., Stetsyuk P.I. Algorithms of nondifferentiable optimization: development and application. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2003. Vol. 39, N 4. P. 537–548. <https://doi.org/10.1023/B:CASA.0000003503.25710.84>.
15. Stetsyuk P.I. Shor's r -algorithms: theory and practice. In: *Optimization Methods and Applications*. Butenko S., Pardalos P.M., Shylo V. (Eds.). Cham: Springer, 2017. P. 495–520.
16. Stetsyuk P.I. r -algorithms and ellipsoids. *Cybernetics and System Analysis*. 1996. Vol. 32, N 1. P. 93–110. <https://doi.org/10.1007/BF02366587>.

17. Romanova T., Stoyan Y., Pankratov A., Litvinchev I., Marmolejo J.A. Decomposition algorithm for irregular placement problems. *Proc. 2nd International Conference on Intelligent Computing and Optimization 2019 (ICO 2019)* (3–4 October 2019, Baywater Resort, Koh Samui, Thailand). Baywater Resort, Koh Samui, 2019. Vol. 1072. P. 214–221.
18. E. Specht. URL: www.packomania.com. 2018.
19. Tawarmalani M., Sahinidis N.V. A polyhedral branch-and-cut approach to global optimization. *Mathematical Programming*. 2005. Vol. 103, Iss. 2. P. 225–249.
20. Sahinidis N.V. BARON 21.1.13: Global optimization of mixed-integer nonlinear programs, User's manual. 2021.
21. Kilinc M.R., Sahinidis N.V. Exploiting integrality in the global optimization of mixed-integer nonlinear programming problems with BARON. *Optimization Methods and Software*. 2018. Vol. 33, Iss. 3. P. 540–562.
22. Wächter A., Biegler L.T. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*. 2006. Vol. 106, N 1. P. 25–57.

T.E. Romanova, P.I. Stetsyuk, A. Fischer, G.M. Yaskov

PROPORTION PACKING OF CIRCLES IN A CIRCULAR CONTAINER

Abstract. The paper considers the optimization problem of packing circles into a larger fixed circular container with non-standard placement conditions. A family of circles is assigned to a given set of circle types. Proportions of the different types of circles appearing in the packing are defined. The circles are allowed predefined overhanding of the container boundary. The problem is aimed to arrange as much non-overlapping circles in the container as possible subject to the proportion and pseudo-containment conditions. A mathematical model as a mixed integer nonlinear mathematical programming problem (MINLP) is constructed and a solution algorithm is proposed. It reduces the MINLP to a sequence of nonlinear programming problems for packing of circles with variable metrical characteristics meeting the proportion conditions in a given circular container. The computational results are provided.

Keywords: proportional packing, circles, circular container, pseudo-containment, optimization.

Надійшла до редакції 16.09.2022