

В.К. ЯСИНСЬКИЙЧернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна,
e-mail: v.yasynskyy@chnu.edu.ua.**І.В. ЮРЧЕНКО**Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна,
e-mail: i.yurchenko@chnu.edu.ua.

КРИТЕРІЙ СТІЙКОСТІ ТА НЕСТІЙКОСТІ В СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ ДИФУЗІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ СИСТЕМ ГІХМАНА-ІТО ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНИХ ЗБУРЕНЬ ТИПУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Анотація. Досліджено асимптотичну стійкість у середньому квадратичному тривіального розв'язку дифузійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь Гіхмана-Іто в термінах власних значень матриці **B**, яка побудована з коефіцієнтів цих рівнянь.

Ключові слова: критерій, стійкість розв'язку, стохастичні диференціально-функціональні рівняння Гіхмана-Іто, зовнішні збурення.

ВСТУП

Після введення поняття сильного розв'язку стохастичного диференціального рівняння вивчення його властивостей та подальшого поширення на класи стохастичних диференціально-функціональних рівнянь (див. праці Кійосі Іто, Й.І. Гіхмана, А.В. Скорохода, В.С. Корольока, Є.Ф. Царкова та ін.) стало можливим дослідження асимптотичної стійкості розв'язку для стохастичних диференціально-функціональних рівнянь (див., наприклад, [1–5]).

У запропонованій статті досліджено асимптотичну стійкість у середньому квадратичному (у середньому) тривіального розв'язку дифузійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь (СДФР) Гіхмана-Іто в термінах власних значень матриці **B**, яка побудована з коефіцієнтів цих рівнянь.

Якщо максимальне власне значення матриці **B** $\max \lambda_{\mathbf{B}} < 1$, то система стійка в середньому квадратичному (l.i.m.) (у середньому). Якщо $\max \lambda_{\mathbf{B}} > 1$, то система асимптотично нестійка в l.i.m. Досліджено також випадок, коли $\max \lambda_{\mathbf{B}} = 1$, де $\max \lambda_{\mathbf{B}}$ — корінь Перрона [6] додатно визначеної матриці **B**.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \{F_t, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ задано дифузійне СДФР вигляду

$$dx(t, \omega) = \varphi(\omega) a(x_t) dt + \psi(\omega) b(x_t) dw(t, \omega) \quad (1)$$

за початкових умов

$$x_t|_{t=0} \equiv \{x(t + \theta), \theta \in [-r, 0]\}|_{t=0} = \alpha \in \mathbf{R}^n, \quad (2)$$

де $x(t, \omega) \in \mathbf{R}^n$; $x_t \in \mathbf{D}_n([-r, 0])$ — простір Скорохода [7] неперервних справа функцій, що мають лівосторонні межі; $\varphi(\omega), \psi(\omega): \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ — задані попарно незалежні від n -вимірного Вінерового процесу [8] $w(t, \omega): [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ випадкові величини, що мають обмежені другі моменти

$$\mathbf{E} \{\varphi^2(\omega)\} = K_1 < \infty; \quad \mathbf{E} \{\psi^2(\omega)\} = K_2 < \infty; \quad (3)$$

$$a(x_t): \mathbf{D}_n([-r, 0]) \rightarrow \mathbf{R}^n; \quad b(x_t): \mathbf{D}_n([-r, 0]) \rightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n.$$

Означення 1. Під сильним розв'язком задачі (1)–(3) будемо розуміти сепарабельний випадковий процес $x(t, \omega): [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$, який визначений для довільного $t \in [-r, 0]$ співвідношенням (2), вимірний відносно σ -алгебри $F_t \times B_t$ (B_t — σ -алгебра Борелевих множин відрізка $[-r, t]$) та з імовірністю 1 задовольняє інтегральне рівняння [7, 9, 10]

$$x(t, \omega) = \alpha(0) + \varphi(\omega) \int_0^t a(x_\tau) d\tau + \psi(\omega) \int_0^t b(x_\tau) dw(\tau, \omega). \quad (4)$$

Будемо вважати, що коефіцієнти та функції $\varphi(\omega), \psi(\omega)$ такі, що існують сильні розв'язки задачі (1)–(3) [3, 11, 12].

**ПЕРЕХІД ДО ІНТЕГРАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ (1), (2)
ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СКОРОЧЕНОЇ ЗАДАЧІ**

Позначимо $\mathfrak{M}_T$ простір n -вимірних випадкових процесів $f(t, \omega)$, який є вимірним для довільного $t \in [0, T]$ відносно σ -алгебри $F_t, t \geq 0, F_t \subset F$, і такий, що

$$\int_0^T \mathbf{E} \{f^2(t, \omega)\} dt < \infty. \quad (5)$$

Припущення 1. Нехай надалі задано n -вимірний випадковий процес

$$z(t, \omega) = \varphi(\omega) \int_0^t H(t, \tau) dw(\tau, \omega) f(\tau, \omega) d\tau, \quad (6)$$

де $\varphi(\omega)$ незалежна від $w(t, \omega)$, $f(\tau, \omega)$, а $H(t, \tau), \frac{d}{dt} H(t, \tau)$ — елементи дійсних матриць, визначені та неперервні за сукупністю аргументів $t \geq \tau \geq 0$.

Припущення 2. Власні значення $\lambda(\omega) \in \mathbf{R}^1$ твірного оператора напівгрупи розв'язків диференціального рівняння для кожного $\omega \in \Omega$ [10]

$$dy(t) = \varphi(\omega) a(y_t(\theta)) dt \quad (7)$$

лежать у лівій півплощині $\operatorname{Re} \lambda(\omega) < 0$.

Лема 1 [1, 11–13]. Нехай:

- 1) виконуються припущення 1, 2;
- 2) випадковий процес $f(t, \omega): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ неперервний з імовірністю 1 за змінною $t \in [0, T]$ і для нього виконується нерівність (5);
- 3) $\varphi(\omega), \psi(\omega)$ попарно незалежні від Вінерового процесу $w(t, \omega): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ та виконуються умови (3).

Тоді випадковий процес $z(t, \omega): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$, який задано рівністю (6), матиме стохастичний диференціал

$$dz(t, \omega) = \psi(\omega) \int_0^t H(t, \tau) dw(\tau, \omega) f(\tau, \omega) d\tau + \\ + \psi(\omega) H(t, t) dw(t, \omega) f(t, \omega). \quad (8)$$

Доведення. За означенням стохастичного диференціала [13] вираз для $dz(t, \omega)$ означає, що для довільних $t', t'' \in [0, T] \subset [0, \infty)$ виконується інтегральне рівняння

$$z(t'', \omega) - z(t', \omega) = \varphi(\omega) \int_{t'}^{t''} \frac{\partial H(t, \tau)}{\partial \tau} f(\tau, \omega) d\tau + \psi(\omega) \int_{t'}^{t''} H(t, t) f(t, \omega) dt. \quad (9)$$

Для доведення леми 1 слід встановити, що (6) задовольняє (3). Розіб'ємо відрізок $[t', t''] \subset [0, T]$ на інтервали довжиною $\Delta = \frac{t'' - t'}{m}$. Тоді різниця (9) набу-

де вигляду

$$\begin{aligned}
 z(t'', \omega) - z(t', \omega) &= \sum_{i=0}^{m-1} [z(t_{i+1}, \omega) - z(t_i, \omega)] = \\
 &= \sum_{i=0}^{m-1} \varphi(\omega) \int_{t_i}^{t_{i+1}} H(t_{i+1}, \tau) f(\tau, \omega) d\omega(\tau, \omega) + \\
 &+ \sum_{i=0}^{m-1} \psi(\omega) \int_{t_i}^{t_{i+1}} [H(t_{i+1}, \tau) - H(t_i, \tau)] f(\tau, \omega) d\omega(\tau, \omega) = \\
 &= \int_{t'}^{t''} \varphi(\omega) H(t, t) f(t, \omega) d\omega(t, \omega) + \\
 &+ \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t'}^{t''} \psi(\omega) [H(t_{i+1}, \tau) - H(t_i, \tau)] d\omega(\tau, \omega) + \\
 &+ \sum_{i=0}^{m-1} \psi(\omega) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} [H(t_{i+1}, \tau) - H(t_i, \tau)] f(\tau, \omega) d\omega(\tau, \omega) + \\
 &+ \sum_{i=0}^{m-1} \int_0^{t_{i+1}} \psi(\omega) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\partial H(t, \tau)}{\partial \tau} f(\tau, \omega) d\omega(\tau, \omega) d\tau = \\
 &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \psi(\omega) H(t, t) d\omega(t, \omega) + \int_{t'}^{t''} \int_0^t \frac{\partial H(t, \tau)}{\partial \tau} \psi(\omega) f(\tau, \omega) d\omega(\tau, \omega) d\tau + \\
 &+ \sum_{i=0}^{m-1} \psi(\omega) \int_{t_i}^{t_{i+1}} [H(t_{i+1}, \tau) - H(t_i, \tau)] d\omega(\tau, \omega) f(\tau, \omega) - \\
 &- \sum_{i=0}^{m-1} \psi(\omega) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^{t_{i+1}} H(t, \tau) d\omega(\tau, \omega) f(\tau, \omega) d\tau. \tag{10}
 \end{aligned}$$

У (10) для подальших оцінок позначимо

$$\begin{aligned}
 A_m &\equiv \sum_{i=0}^{m-1} \psi(\omega) \int_{t_i}^{t_{i+1}} [H(t_{i+1}, \tau) - H(t_i, \tau)] d\omega(\tau, \omega) f(\tau, \omega); \\
 B_m &\equiv \sum_{i=0}^{m-1} \psi(\omega) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\tau}^{t_{i+1}} \frac{\partial H(t, \tau)}{\partial \tau} d\omega(\tau, \omega) f(\tau, \omega) d\tau.
 \end{aligned}$$

Обчислюючи математичне сподівання $E\{|A_m|^2\}$, з урахуванням властивості математичного сподівання від стохастичного інтеграла Гіхмана–Іто [8] та неперервності $\frac{\partial H(t, \tau)}{\partial \tau}$ на замкненому інтервалі матимемо

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{|A_m|^2\} &\leq m \sum_{i=0}^{m-1} K_2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} |H(t_{i+1}, \tau) - H(\tau, \tau)|^2 \mathbf{E}\{|f(\tau, \omega)|^2\} d\tau \leq \\ &\leq m \sum_{i=0}^{m-1} \Delta^2 K_2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left| \frac{\partial H(t_i^*, \tau)}{\partial \tau} \right|^2 \mathbf{E}\{|f(\tau, \omega)|^2\} d\tau \leq K_2 K_3 \Delta \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{E}\{|f(\tau, \omega)|^2\} d\tau, \end{aligned}$$

$$\text{де } t_i \leq t_i^* \leq t_{i+1}, \quad K_3 \equiv (t'' - t') K_2 \sup_{t, \tau \in [t', t'']} \left| \frac{\partial H(t, \tau)}{\partial t} \right|^2.$$

Таким чином, за умови інтегровності за $t \in [0, T]$ у середньому квадратичному випадковому процесу $f(t, \omega)$ (5) та нерівності Чебишова [8] одержимо

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\omega: |A_m| > \varepsilon\} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}\{|A_m(\omega)|^2\}}{\varepsilon^2} = 0. \quad (11)$$

Далі аналогічно до $|A_m(\omega)|^2$ справджуються нерівності для $|B_m(\omega)|^2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{|B_m|^2\} &\leq m \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\int_{\tau}^{t_{i+1}} \frac{\partial H(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right)^2 \mathbf{E}\{|f(\tau, \omega)|^2\} d\tau \leq \\ &\leq m \sum_{i=0}^{m-1} K_2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^{t_{i+1}} \left| \frac{\partial H(t, \tau)}{\partial \tau} \right|^2 \mathbf{E}\{|f(\tau, \omega)|^2\} d\tau dt \leq K_2 K_3 \Delta \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{E}\{|f(\tau, \omega)|^2\} d\tau. \end{aligned}$$

Тоді за нерівністю Чебишова має місце співвідношення

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\omega: |B_m(\omega)|^2 > \varepsilon\} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{E}\{|B_m(\omega)|^2\} = 0.$$

Унаслідок довільності вибору m твердження леми 1 доведено.

Як і раніше, фундаментальним розв'язком $H(t, \omega)$ диференціального рівняння (7), побудованого за початкової умови (2), назовемо $H(t, \omega)$ для $t > 0$ вигляду [10]

$$H(t, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Pi} e^{\lambda t} V^{-1}(\lambda, \omega) d\lambda, \quad (12)$$

де

$$V(\lambda, \omega) \equiv \lambda - \varphi(\omega) a(e^{\lambda \theta}) \quad (13)$$

є квазіполіномом СДФР (7), а Π — контур, що охоплює всі корені характеристичного рівняння $\det V(\lambda, \omega) = 0$, $\omega \in \Omega$. При цьому $H(0, \omega) = I$ — одинична матриця, а для $t < 0$ маємо $H(t, \omega) = 0$.

Теорема 1 [13]. Нехай виконуються умови леми 1 та припущення 1, 2. Тоді розв'язок задачі Коші для СДФР (1), (2) $x(t, \omega) \in \mathbf{R}^n$ за допомогою фундаментального розв'язку $H(t)$ можна записати у вигляді

$$x(t, \omega) = y(t, \omega) + \psi(\omega) \int_0^t H(t - \tau, \omega) d\omega(\tau, \omega) b(x_\tau(\theta)), \quad (14)$$

де $y(t)$ — розв'язок диференціально-функціонального рівняння (7).

Доведення. Випадковий процес $x(t, \omega): [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ згідно з лемою 1 має стохастичний диференціал

$$dx(t, \omega) = dy(t, \omega) + \psi(\omega) b(x_t(\theta)) dw(t, \omega) + \int_0^t \frac{\partial H(t-\tau, \omega)}{\partial t} b(x_t(\theta)) dw(t, \omega) d\tau. \quad (15)$$

За означенням фундаментального розв'язку з імовірністю 1 маємо, що

$$\frac{\partial H(t-\tau, \omega)}{\partial t} = \varphi(\omega) a(H_{t-\tau}(\theta), \omega)$$

для $T \geq t \geq 0$.

Враховуючи лінійність оператора $a(\cdot)$, одержуємо з імовірністю 1 співвідношення

$$\begin{aligned} \int_0^t \psi(\omega) \frac{\partial H(t-\tau, \omega)}{\partial t} b(x_t(\theta)) dw(t, \omega) = \\ = \varphi(\omega) a \left(\int_0^t H(t-\tau, \omega) b(x_t(\theta)) dw(\tau, \omega) \right) = \varphi(\omega) a(x_t(\theta) - y_t(\theta, \omega)), \end{aligned}$$

що з урахуванням (4), (8), (11), (15) доводить теорему 1.

НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ НАЛЕЖНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ СДФР ПРОСТОРУ СУМОВНИХ ЗА ЧАСОМ У СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ задано автономне лінійне СДФР (1), (2), коефіцієнти якого задовольняють умови існування та єдиності розв'язку з імовірністю 1 [12].

Припущення 3. Власні значення квазіполінома $V(\lambda)$ (13) розташовані в лівій півплощині $\text{Re } \lambda < 0$ комплексної площини $xO(iy)$.

Уведемо до розгляду матрицю $\mathbf{B}$ вигляду

$$\mathbf{B} \equiv \int_0^\infty \mathbf{E}\{[b(H_t(\theta, \omega))]_+^2\} dt. \quad (16)$$

Тут і далі верхній індекс 2 біля матриці (вектора) означає піднесення до квадрата кожного елемента матриці (вектора), а + у нижньому індексі означає, що кожний елемент матриці (вектора) потрібно брати за модулем.

Застосуємо $b(\cdot)$ до лівої та правої частин рівняння (14), у результаті одержимо, що

$$b(x_t(\theta, \omega)) = b(y_t(\theta, \omega)) + \psi(\omega) \int_0^t b(H_{t-\tau}(\theta, \omega)) dw(\tau, \omega) b(x_t(\theta, \omega)). \quad (17)$$

Піднесемо до квадрата ліву та праву частини (17), застосуємо операцію математичного сподівання та, використавши властивості стохастичних інтегралів [7, 8], одержимо

$$\mu_b(t) = \mathbf{E}\{b^2(y_t(\theta, \omega))\} + \mathbf{E}\{\psi^2(\omega)\} \int_0^t \mathbf{E}\{b^2(H_{t-\tau}(\theta, \omega))\} \mu_b(s) ds, \quad (18)$$

де $\mu_b(t) = \mathbf{E}\{b^2(x_t(\theta, \omega))\}$.

Далі інтегруємо рівняння (18) за аргументом t від 0 до $+\infty$ та, змінюючи порядок інтегрування у правій частині, маємо

$$\int_0^{\infty} \mu_b(t) dt = \int_0^{\infty} \mathbf{E}\{b^2(y_t(\theta, \omega))\} dt + \\ + \mathbf{E}\{\psi^2(\omega)\} \int_0^{\infty} \mathbf{E}\{b^2(H_t(\theta, \omega))\} dt \int_0^{\infty} \mu_b(s) ds. \quad (19)$$

У рівнянні (19) як $y(t)$ слід використовувати стовпчики матриці $H(t) \equiv \{h_{ij}(t)\}$, $i, j = \overline{1, n}$. Будемо позначати їх $y_j(t)$, $j = \overline{1, n}$.

Для зручності уведемо такі позначення:

$$N_j \equiv \int_0^{\infty} b^2(y_j(\theta)) dt; \quad M_j \equiv \int_0^{\infty} \mu_{b_j}(t) dt.$$

Тоді аналогічно до (18) запишемо рівняння

$$M_j = N_j + \mathbf{E}\{\psi^2(\omega)\} \int_0^{\infty} \mathbf{E}\{b^2(H_t(\theta, \omega))\} dt \cdot M_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (20)$$

або за означенням матриці $\mathbf{B}$ одержимо

$$M_j = N_j + \mathbf{E}\{\psi^2(\omega)\} \mathbf{B} \cdot M_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

За побудовою, вектор N_j збігається з j -м стовпчиком матриці $\mathbf{B}$, при цьому $B = \{N_1, N_2, \dots, N_n\}$. Тоді позначимо $M \equiv \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ і запишемо (20) у вигляді матричного рівняння

$$M = \mathbf{B} + \mathbf{E}\{\psi^2(\omega)\} \cdot \mathbf{B} \cdot M. \quad (21)$$

Доведемо твердження.

Теорема 2. Нехай для лінійного СДФР (1), (2) виконуються всі умови теореми 1 та припущень 1–3. Тоді необхідною та достатньою умовою належності простору $\mathfrak{M}_{\infty}$ довільного лінійного функціонала $f: \mathbf{D}_n([-r, 0]) \rightarrow \mathbf{R}^n$ є умова $\rho(\mathbf{B}) < 1$ або $|\lambda_{\max}(B)| < 1$, де $\rho(\mathbf{B})$ — спектральний радіус додатної матриці $\mathbf{B}$, $\lambda_{\max}(B)$ — корінь Перрона додатної матриці $\mathbf{B}$.

Доведення. Необхідність будемо доводити від супротивного. Оскільки матриця $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, n}$, складена за побудовою з невід'ємних елементів, то існує додатне власне значення $\lambda_0 > 0$ [14]. Нехай $\lambda_0 \geq 1$.

Випадок $\lambda_0 = 1$. Позначимо $\bar{b}_0$ власний вектор матриці $\mathbf{B}$, що відповідає власному значенню $\lambda_0 = 1$. Тоді від матричного рівняння (21) легко перейти до рівняння

$$X = \bar{b} + \mathbf{E}\{\psi^2(\omega)\} \mathbf{B} X,$$

де $X = M \bar{b}_0$. Одержане рівняння не має обмеженого розв'язку [14].

Таким чином, для $\lambda_0 = 1$ матричне рівняння (21) має необмежений розв'язок. Це означає, що існують початкові функції $\alpha(\theta)$, за якими побудовані розв'язки мають властивість $b(x_t(\theta)) \notin \mathfrak{M}_{\infty}$.

Доведемо, що в цьому випадку для довільного функціонала $f(\cdot) \notin \mathfrak{M}_{\infty}$. Застосуємо до (14) функціонал $f(\cdot)$. Після аналогічних до наведених раніше перетворень та з урахуванням припущень 1–3 теореми 1 одержимо, що

$$\int_0^{\infty} \mu_f(t) dt = \int_0^{\infty} \mathbf{E}\{f^2(y_t(\theta, \omega))\} dt + \\ + \mathbf{E}\{\psi^2(\omega)\} \int_0^{\infty} \mathbf{E}\{f^2(H_t(\theta, \omega))\} dt \int_0^{\infty} \mu_b(t) dt. \quad (22)$$

Для досить малих $\delta > 0$ та $\varepsilon > 0$ з урахуванням згаданих властивостей очевидна нерівність

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathbf{E} \{f^2(H_t(\theta, \omega))\} dt \int_0^\infty \mu_f(t) dt &\geq \mathbf{E} \{\psi^2(\omega)\} \int_0^\delta \mathbf{E} \{f^2(H_t(\theta, \omega))\} dt \int_0^\infty \mu_f(t) dt \geq \\ &\geq \mathbf{E} \{\psi^2(\omega)\} \frac{\delta}{2} \int_0^\infty \mu_f(t) dt. \end{aligned}$$

За цими нерівностями співвідношення (22) дає $f(\cdot) \notin \mathfrak{M}_\infty$, що суперечить припущенню теореми 2.

Випадок $\lambda_0 > 1$. Доведемо, що матричне рівняння (21) має необмежений розв'язок. Якщо припустити протилежне, тоді матричне рівняння (21) матиме обмежений розв'язок $\frac{\bar{b}_0}{1-\lambda_0}$, координати якого від'ємні. А це неможливо,

оскільки координати розв'язку матричного рівняння (21) невід'ємні [14]. Таким чином, припущення хибне.

Аналогічно і для випадку $\lambda_0 > 1$ можна довести [14], що $f(\cdot) \notin \mathfrak{M}_\infty$.

Отже, необхідність доведено.

Доведемо достатність. Нехай $\rho(\mathbf{B}) < 1$. Доведемо, що для довільного функціонала $f(\cdot)$ виконується $f(\cdot) \in \mathfrak{M}_\infty$.

Застосуємо метод послідовних наближень [10] для розв'язання матричного рівняння (16), яке еквівалентне (18).

Якщо вибрати $M_0 = 0_{n \times n}$, тоді $M_m = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{B}^i N$. Оскільки [14]

$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\|\mathbf{B}\|^m} = \max_i \lambda_i$, умова теореми 2 дає $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\|\mathbf{B}\|^m} = d < 1$. Отже, для досить великих $m \geq m_1$ отримуємо, що $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\|\mathbf{B}\|^m} < d + \varepsilon < 1$ та $\|\mathbf{B}\|^m < (d + \varepsilon)^m$.

Це означатиме, що для $m \geq m_1$

$$\|M_m\| \leq \sum_{i=0}^{m-1} (d + \varepsilon)^i \|N\|,$$

а отже,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|M_m\| \leq \frac{\|N\|}{(1-d)}.$$

Інакше кажучи, $b(x_t) \in \mathfrak{M}_\infty$. Тоді за (22) маємо $f(\cdot) \in \mathfrak{M}_\infty$.

Теорему 2 повністю доведено.

АСИМПТОТИЧНА СТІЙКІСТЬ ТА НЕСТІЙКІСТЬ У СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ (l.i.m.) РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ СДФР

За умови виконання накладених раніше умов можна отримати такі твердження про стійкість та нестійкість у l.i.m. розв'язків систем лінійних СДФР (1)–(3).

Теорема 3. Нехай виконуються умови теореми 1 для лінійного автономного СДФР (1)–(3), а також $\rho(\mathbf{B}) < 1$ для матриці $\mathbf{B}$, яка задана (16). Тоді тривіальний розв'язок $x(t) \equiv x(t, \omega): [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ задачі (2), (3) асимптотично стійкий у l.i.m.

Доведення. Застосуємо перетворення Лапласа [3] $\mathcal{L}(\cdot)$ до рівняння (18). У результаті отримаємо рівняння в зображеннях

$$M_b(\lambda) = F_b(\lambda) + \mathbf{E} \{\psi^2(\omega)\} H_b(\lambda) M_b(\lambda),$$

де $M_b(\lambda) \equiv \mathcal{L}\{\mu_b(t)\}$; $H_b(\lambda) \equiv \mathcal{L}\{\mathbf{E}\{b^2(H_t(\theta, \omega))\}\}$; $F_b(\lambda) \equiv \mathcal{L}\{\mathbf{E}\{b^2(y_t(\theta, \omega))\}\}$.

З попереднього рівняння для зображень матимемо

$$M_b(\lambda) = [I - H_b(\lambda)]^{-1} F_b(\lambda). \quad (23)$$

З умов теореми 3 випливає, що розв'язок $y(t)$ СДФР (1), (2) експоненціально стійкий. Тоді $F(\lambda)$ як перетворення Лапласа $\mathcal{L}\{\mathbf{E}\{b^2(y_t(\theta, \omega))\}\}$ не має полюсів у напівплощині $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$.

Позначимо $\gamma(\lambda)$ корінь Перрона матриці $H_b(\lambda)$. Тоді побудова матриці $H_b(\lambda)$ дає властивість

$$\max_{\operatorname{Re} \lambda \rightarrow d} \gamma(\lambda) = \gamma(d). \quad (24)$$

Доведемо, що рівняння

$$\Phi(\lambda) \equiv \det[I - M_b(\lambda) \mathbf{E}\{\psi^2(\omega)\}] = 0$$

має нулі в лівій півплощині $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Дійсно, припустимо протилежне, тобто що $\Phi(\lambda_0) = 0$, де $\operatorname{Re} \lambda_0 \geq 0$. Це означатиме, що $H_b(\lambda_0)$ матиме власне значення, рівне одиниці. Тоді $\gamma(\operatorname{Re} \lambda_0) \geq 1$. Однак елементи матриці $H_b(\lambda)$ з урахуванням (24) для дійсних λ ($\operatorname{Re} \lambda$) спадають, тобто $\gamma(\operatorname{Re} \lambda)$ є спадною функцією. Отже, $\gamma(0) \geq 1$, а матриця $H_b(0) = \mathbf{B}$ має власне значення за модулем, не меншим за одиницю. А це суперечить умовам теореми 3, за яких $\rho(\mathbf{B}) < 1$.

Отже, полюси $M_b(\lambda)$ лежать у півплощині $\operatorname{Re} \lambda < 0$, а оригінал $\mu_b(t)$ поводить себе для $t \rightarrow +\infty$ як $\exp(rt)$, де $r < 0$ (r — дійсна частина найбільш віддаленого праворуч від полюса зображення $M_b(\lambda)$ [3]). Тоді

$$|\mu_b(t)| \leq C \exp(-rt) \|d\|_0,$$

де $r > 0$, $C > 0$.

За твердженням теореми 2, для довільного лінійного функціонала $f(\cdot)$ має місце оцінка

$$\mathbf{E}\{|f^2(y_t(\theta))|\} \leq C_1 (\exp(-\eta_1 t)) \|d\|_0,$$

де $\eta_1 > 0$, $C_1 > 0$. А це приводить до стійкості в l.i.m. розв'язку $x(t)$ СДФР (1), (2).

Асимптотична стійкість у l.i.m. цього розв'язку впливає з нерівності

$$\mathbf{E}\{|x(t)|^2\} \leq C_1 (\exp(-\eta_1 t)) \|d\|_0 + \mathbf{E}\{\|H(t)\|^2\} \int_0^\infty |\mu_b(t)|^2 dt.$$

Теорему 3 доведено.

Наслідок 1. Якщо підставити вираз (12) для $H_b(t)$ у вираз (16) для матриці $\mathbf{B}$ та застосувати теорему Планшереля [13], то формула для $\mathbf{B}$ набуде вигляду

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\pi} \mathbf{E}\{\psi^2(\omega)\} \int_0^\infty |b(e^{is\theta})|^2 [V^{-1}(is)]_+^2 ds, \quad (25)$$

де $i = \sqrt{-1}$.

Теорема 4. Нехай тривіальний розв'язок $y(t) \equiv 0$ диференціального рівняння (7) експоненціально стійкий, при цьому

$$\rho(\mathbf{B}) > 1. \quad (26)$$

Тоді в околі нуля знайдеться така початкова функція $d(t) \in \mathbf{R}^n$, що розв'язок $x(t, \omega) \in \mathbf{R}^n$ СДФР (1), (2) поводить себе в l.i.m., як $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}\{|x(t, \omega)|^2\} = +\infty$.

Доведення. Використаємо співвідношення (23) для визначення

$$M_b(\lambda) = [I - \mathbf{E}\{\varphi^2(\omega)\}H(\lambda)]^{-1} \cdot F(\lambda),$$

де $F(\lambda)$ за умов теореми 4 не має особливостей у півплощині $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$.

Тоді полюси комплексного вектора $M_b(\lambda)$ збігаються з нулями визначника $\det[I \cdot H_b(\lambda)\mathbf{E}\{\varphi^2(\omega)\}]$. Матриця $H_b(\lambda)$, як функція комплексної змінної, має додатне власне значення $\gamma(\lambda) > 0$, модуль якого не менший за модулі решти власних значень, тобто $\max_{\operatorname{Re} \lambda = d} \gamma(\lambda) = \gamma(d)$. За умови теореми 4 $\gamma(0) \geq 1$. Однак

$\gamma(\lambda)$ є неперервною функцією дійсної змінної λ і такою, що $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \gamma(\lambda) = 0$.

Таким чином, знайдеться таке дійсне $\lambda_0 > 0$, що $\gamma(\lambda_0) = 1$. Тоді $|\mu_b(t)|$ зростатиме для $t \rightarrow +\infty$ не повільніше за $\exp(\lambda_0 t)$, $\lambda_0 > 0$.

Теорему 4 доведено.

Зауваження 1. Оскільки умова (26) вимагає обчислення найбільшого за модулем власного значення матриці $\mathbf{B}$ (25), для побудови якої потрібно знайти обернену матрицю $[V^{-1}(is)]_+^2$ до матриці $[V(is)]_+^2$, а потім почленно інтегрувати кожен елемент цієї оберненої матриці від 0 до $+\infty$ за аргументом s , то виникає запитання, чи можна уникнути обчислення власних значень та побудови оберненої матриці, тому що це призводить до великої кількості додаткових обчислень і використання значних обчислювальних ресурсів комп'ютера під час розв'язання прикладних задач.

Обчислення $\max \rho(\mathbf{B})$ можна уникнути, якщо від системи (1), (2) перейти до покоординатного запису

$$dx_i(t, \omega) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(\omega) a_{ij}(x_{ijt}(\theta)) dt + \sum_{j=1}^n \psi_j(\omega) b_{ij}(x_{ijt}(\theta)) dw_{ij}(t, \omega) \quad (27)$$

за початковими умовами

$$x_i(t) = \alpha_i(t), \quad (28)$$

де $a_{ij}(\cdot), b_{ij}(\cdot): \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}^1$ — лінійні неперервні функціонали, $w_{ij}(t, \omega)$, $i, j = \overline{1, n}$, — попарно незалежні та F_t -вимірні для $t \geq 0$.

Тоді в теоремі 4 з урахуванням (27), (28) потрібно перевіряти таку умову:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^\infty \mathbf{E}\{b_{ij}^2(H_{kl}(t+\theta))\} dt < 1. \quad (29)$$

За малих $n \leq 10$ доцільно обчислювати $\rho(\mathbf{B})$, а за більших n можна скористатися формулою (29).

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА НА БЕЗМЕЖНОСТІ ДРУГОГО МОМЕНТУ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ СДФР ЗАГАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНІХ ЗБУРЕНЬ ТИПУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ задано n -вимірний випадковий процес $x(t, \omega): [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$, який є розв'язком СДФР вигляду

$$\begin{aligned} I \cdot \frac{d^N x(t, \omega)}{dt^N} + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^m \varphi_{jk}(\omega) A_{jk} \frac{d^j x(t, \omega)}{dt^j} = \\ = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^m \psi_{jk}(\omega) B_{jk} \frac{dw_{jk}(t, \omega)}{dt} \frac{d^j x(t, \omega)}{dt^j} \end{aligned} \quad (30)$$

за початкових умов

$$\left. \frac{d^j x(t, \omega)}{dt^j} \right|_{t \in [-r, 0]} = \alpha(t), \quad j = \overline{1, N-1}, \quad (31)$$

де $x(t, \omega) \in \mathbf{R}^n$, I — матриця розміру $n \times n$; $w_{jk}(t, \omega) \equiv \{w_{jk}^{lq}(t, \omega)\}$ — незалежні попарно Вінерові процеси з нульовими зносами і матрицями параметрів дифузії $S_{jk} \equiv \{s_{jk}^{lq}\}$ ($l = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, N-1}$); $A_{jk} \equiv \{a_{jk}^{lq}\}$, $B_{jk} \equiv \{b_{jk}^{lq}\}$, $l = \overline{1, N}$, $q = \overline{1, N-1}$, — матриці з дійсними елементами; $\varphi_{jk}(\omega)$, $j = \overline{1, N-1}$, $k = \overline{0, m}$, — попарно незалежні зовнішні випадкові величини зі скінченними першими та другими моментами $\mathbf{E}\{\varphi_{jk}(\omega)\} \leq K_1 < \infty$; $\mathbf{E}\{\varphi_{jk}^2(\omega)\} \leq K_2 < \infty$.

Позначимо $H(t, \omega)$ матричний розв'язок з імовірністю 1 системи

$$I \cdot \frac{d^N y(t, \omega)}{dt^N} + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^m \varphi_{jk}(\omega) A_{jk} \frac{d^j y(t + \theta, \omega)}{dt^j} = 0 \quad (32)$$

такий, що $H(t, \omega) = 0$ для $t < 0$,

$$H(0, \omega) = \frac{dH(0, \omega)}{dt} = \dots = \frac{d^{N-2}H(0, \omega)}{dt^{N-2}} = 0; \quad \frac{d^{N-1}H(0, \omega)}{dt^{N-1}} = I, \quad (33)$$

а за умови $t > 0$

$$\frac{d^j H(t, \omega)}{dt^j} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^j e^{\lambda t} V^{-1}(\lambda, \omega) d\lambda,$$

де контур Γ охоплює всі нулі ймовірнісного квазіполінома системи (32), а саме

$$\det V(\lambda, \omega) = \det \left[I \lambda^N + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^m \varphi_{jk}(\omega) A_{jk} \lambda^j e^{-\lambda \theta} \right] \quad (34)$$

з імовірністю 1.

Використовуючи формули (14), (33), (34), можна перейти від (30) до інтегральної системи

$$x^j(t, \omega) = y^j(t) + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^m \int_0^t \left[\frac{d^j H(t-\tau)}{dt^j} dw_{jk}(t, \omega) \right] B_{jk} \frac{d^j x(t, \omega)}{dt^j}, \quad (35)$$

де $j = \overline{0, 1, \dots, N-1}$, а $y(t)$ — розв'язок (32) у детермінованому випадку.

Теорема 5. Нехай на ймовірнісному базисі задана задача Коші для СДФР (30), (31), для якого виконано умови:

- 1) A_{jk}, B_{jk} — дійсні матриці;
- 2) $\varphi_{jk}(\omega), \psi_{jk}(\omega), w_{jk}(\omega)$ — попарно незалежні;
- 3) $\mathbf{E}\{\varphi_{jk}(\omega)\} \leq K_1 < \infty$; $\mathbf{E}\{\varphi_{jk}^2(\omega)\} \leq K_2 < \infty$;
- 4) $\mathbf{E}\{\psi_{jk}(\omega)\} \leq K_3 < \infty$; $\mathbf{E}\{\psi_{jk}^2(\omega)\} \leq K_4 < \infty$;
- 5) корені квазіполінома $\det V_+(\lambda)$ лежать у лівій півплощині $\operatorname{Re} \lambda < 0$;
- 6) спектральний радіус $\rho(\mathbf{B}) < 1$ для матриці

$$\mathbf{B}(\omega) \equiv \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^m \int_0^\infty \mathbf{E}\{\psi_{jk}^2(\omega)\} S_{jk} |(is)^j|^2 \cdot [V^{-1}(is, \omega)]_+^2 ds, \quad \omega \in \Omega. \quad (36)$$

Тоді тривіальний розв'язок СДФР (30), (31) є асимптотично стійким, а саме $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \{ |x(t, \omega)|^2 \} = 0$, якщо $\rho(\mathbf{B}) < 1$. Якщо $\rho(\mathbf{B}) > 1$, тоді $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \{ |x(t, \omega)|^2 \} = +\infty$. Як і раніше, 2 у верхньому індексі біля матриці (вектора) означає піднесення до квадрата кожного елемента матриці (вектора), а + у нижньому індексі формули (36) означає, що кожний елемент матриці (вектора) потрібно брати за модулем.

Доведення. Використаємо відому [12, 13] властивість математичного сподівання від квадрата інтеграла зі змінною для $t \geq 0$ верхньою межею, яка дорівнює звичайному інтегралу від математичного сподівання квадрата підінтегральної функції, та попарну незалежність елементів матриць $w_{jk}(t, \omega)$. Після піднесення за рядками до квадрата обох частин (35) і застосування операції математичного сподівання $\mathbf{E}\{\cdot\}$ отримаємо систему рівнянь $(N \cdot m)$ -го порядку вигляду

$$\mu_l(t, \omega) = \left[\frac{d^l y(t, \omega)}{dt^l} \right]^2 + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^m \mathbf{E} \{ \psi_{jk}^2(\omega) \} \left[\frac{d^l H(t - \tau, \omega)}{dt^l} \right]^2 S_{jk}^2 \cdot \mu_j(\tau + \theta) d\tau, \quad (37)$$

$$\text{де } \mu_l \in \mathbf{R}^n, \quad l=0, 1, \dots, N-1; \quad \mu_l(t) \equiv \mathbf{E} \left\{ \left[\frac{d^l x(t)}{dt^l} \right]^2 \right\}.$$

Після застосування до обох частин (37) перетворення Лапласа $\mathcal{L}\{\cdot\}$ за змінною λ матимемо

$$M_l(\lambda) = Y_l(\lambda) + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^m \mathbf{E} \{ \psi_{jk}^2(\omega) \} \mathbf{E} \{ H_l(\lambda, \omega) \} S_{jk} e^{-\tau\lambda} M_j(\lambda), \quad (38)$$

$$\text{де } M_l(\lambda) \equiv \mathcal{L}\{\mu_l(t)\}; \quad Y_l(\lambda) \equiv \mathcal{L} \left\{ \mathbf{E} \left\{ \left[\frac{d^l y(t)}{dt^l} \right]^2 \right\} \right\}; \quad H_l(\lambda, \omega) \equiv \mathcal{L} \left\{ \left[\frac{d^l H(t, \omega)}{dt^l} \right]^2 \right\}.$$

Якщо $\rho(\mathbf{B}) < 1$, то довільний розв'язок $y(t, \omega)$ рівняння (32) за модулем прямує до нуля для $t \rightarrow +\infty$ не швидше за $\exp\{\varepsilon t\}$ з $\varepsilon < 0$ [13]. Тоді $Y_l(\lambda)$ не має особливостей у півплощині $\text{Re } \lambda \geq 0$ [10].

Отже, особливості вектора $M_l(\lambda)$ збігаються з нулями визначника $F(\lambda)$ системи (38).

Для продовження доведення спочатку слід провести елементарні перетворення, а саме спочатку домножити зліва перший рядок системи (38) на $-H(\lambda)H_0^{-1}(\lambda)$ і додати до r -го рядка, потім домножити зліва r -й рядок на $H_0(\lambda) \sum_{k=0}^m S_{jk}$ і додати до першого рядка ($r=2, 3, \dots, N-2$).

Отже, одержуємо $F(\lambda, \omega) = \det(I - L(\lambda, \omega))$, де

$$L(\lambda) = H_0(\lambda, \omega) \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^m \psi_{jk}^2(\omega) S_{jk} \mathbf{E} \{ H_j(\lambda, \omega) \} e^{-\tau\lambda} H_0^{-1}(\lambda, \omega), \quad \omega \in \Omega. \quad (39)$$

Згідно з [14] матриця $L_+(\lambda)$ має корінь Перрона, який за модулем не менший від решти власних значень. Позначимо цей корінь Перрона $p(\lambda)$. Відомо, що

всі власні значення $L(\lambda)$ не перевищують за модулем $p(\lambda)$, тобто $\max_{\operatorname{Re} \lambda=c} p(z) = p(c)$.

Першу частину теореми 5 доведемо від супротивного. Нехай $F(\lambda_0) = 0$, але $\operatorname{Re} \lambda_0 > 0$. Тоді $L(\lambda)$ має власне значення, яке дорівнює одиниці і $p(\operatorname{Re} \lambda_0) \geq 1$. З урахуванням (39) одержуємо, що $p(\operatorname{Re} \lambda)$ не зростає у випадку зростання $\operatorname{Re} \lambda$, оскільки елементи матриці $L_+(\operatorname{Re} \lambda)$ не зростають [14]. Це означає, що $p(0) \geq 1$.

Використовуючи співвідношення

$$\frac{d^j H(t)}{dt^j} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^j e^{\lambda t} V^{-1}(\lambda) d\lambda,$$

одержуємо

$$H_j(0, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |(is)^j|^2 \varphi_{jk}^2(\omega) [V^{-1}(is, \omega)]_+^2 ds.$$

Тоді очевидно, що матриця $L(0)$ подібна до матриці $\mathbf{B}$ за умови (36) теореми 5. Таким чином, матриця $\mathbf{B}$ має власні значення $p(0) \geq 1$, що суперечить умові $\rho(\mathbf{B}) < 1$ з першої частини теореми 5.

Доведемо друге твердження теореми. Нехай корінь Перрона $p(\mathbf{B}) > 1$. Тоді $p(0) > 1$. Зауважимо, що для дійсних $s > 0$ межа $\lim_{s \rightarrow +\infty} p(s) = 0$ і $p(s)$ — неперервна функція дійсного аргументу s [14]. Отже, існує дійсне $s_0 > 1$ таке, що $p(s_0) = 1$. А це означає, що $F(s_0) = 0$ для $s_0 > 0$. Таким чином, $\mu_l(t)$, $l = 0, 1, \dots, N-1$, зростає для $t \rightarrow +\infty$ не повільніше за $\exp(st)$ [14], що й доводить остаточно теорему 5.

СТОХАСТИЧНА ЗАДАЧА СТАБІЛІЗАЦІЇ КУРСУ ОКЕАНСЬКОГО ЛАЙНЕРА ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНІХ ЗБУРЕНЬ ТИПУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Розглянемо на ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ систему дифузійних диференціально-різницьових рівнянь вигляду [11]

$$\begin{cases} \dot{x}(t, \omega) + \varphi(\omega) H \dot{x}(t, \omega) + \psi(\omega) K y(t, \omega) = \\ = y_1(\omega) \dot{x}(t, \omega) w_1(t, \omega) + y_2(\omega) y(t, \omega) w_2(t, \omega), \\ \dot{y}(t, \omega) + \psi(\omega) \frac{1}{T} y(t, \omega) + \varphi(\omega) [Bx(t, \omega) + Lx(t - \tau, \omega)] = \\ = \gamma_1(\omega) x(t, \omega) w_3(t, \omega) + \gamma_2(\omega) x(t - \tau, \omega) w_4(t, \omega) \end{cases} \quad (40)$$

за початкових даних

$$\begin{cases} \dot{x}(t, \omega)|_{0 \leq t \leq \tau} = \alpha_1(\omega), \\ x(t, \omega)|_{0 \leq t \leq \tau} = \alpha_2(\omega), \\ y(t, \omega)|_{0 \leq t \leq \tau} = \beta(\omega), \end{cases} \quad (41)$$

де $x(t, \omega)$ — кут відхилення лайнера від теоретичного курсу за кутом повороту керма $y(t, \omega)$; $w_j(t, \omega): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$, $j = \overline{1, 4}$, — задані Вінерові процеси; $\varphi(\omega), \psi(\omega): \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ — одновимірні задані зовнішні збурення типу випадкових величин (мінливість морських течій, нерівномірна інтенсивність потоків); $\gamma_1(\omega), \gamma_2(\omega), \alpha_1(\omega), \alpha_2(\omega), \beta(\omega)$ — одновимірні відомі зовнішні збурення типу випадкових величин із заданими законами розподілу, які визначаються серією обчислень методами математичної статистики [8]; $H > 0$, $K > 0$, $T > 0$, B , L — сталі, що характеризують найпростішу модель курсу лайнера [15].

Квазіполіном системи (40) має вигляд

$$\det V(\lambda, \omega) \equiv \det \left[R \lambda^2 + \sum_{j=0}^1 \sum_{r=0}^1 A_{jr}(\omega) \lambda^j e^{-\Delta_r \lambda} \right], \quad (42)$$

де матриці

$$R \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_{00} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \psi(\omega)R \\ \varphi(\omega)B & T^{-1} \end{bmatrix}; \quad A_{01} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varphi(\omega)L & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_{10} \equiv \begin{bmatrix} \varphi(\omega)H & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_{11} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Обчислимо квазіполіном для (42):

$$\det V(\lambda, \omega) \equiv \lambda^2 R + H \lambda \varphi^2(\omega) (T^{-1} + \lambda) -$$

$$-R \psi^2(\omega) [-\mathbf{E} \{\varphi^2(\omega)\} B + L e^{-\tau \lambda} \mathbf{E} \{\varphi^2(\omega)\}].$$

У просторі параметрів H, T, K, B, L, R, τ за фіксованих $\varphi(\omega), \psi(\omega)$ з $\mathbf{E} \{\varphi^2(\omega)\} \leq K_1 < \infty$, $\mathbf{E} \{\psi^2(\omega)\} \leq K_2 < \infty$ можна побудувати межі D -розбиття за Беллманом, а також області, де корені квазіполінома мають від'ємні дійсні частини ($\operatorname{Re} \lambda < 0$). Отже,

$$V^{-1}(is, \omega) = \frac{1}{\det V(is, \omega)} \begin{bmatrix} -s^2 + is \varphi^2(\omega) H & \psi^2(\omega) B + L \varphi^2(\omega) \\ \psi^2(\omega) K & T^{-1} + is \end{bmatrix},$$

де

$$|\det V(is, \omega)|^2 = [(is)^2 + (T^{-1} + H \varphi^2(\omega)) + H(is)(T^{-1} + is) \psi^2(\omega) -$$

$$-B^2 \psi^2(\omega) + R \varphi^2(\omega) \psi^2(\omega) L \sin is]^2.$$

Матриця $\mathbf{B}$ має вигляд

$$\mathbf{B}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \sum_{j=0}^1 \sum_{r=0}^1 S_{jr}^+ \right\} |is|^2 [V^{-1}(is, \omega)]_+^2 ds,$$

де

$$S_{00}^+ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad S_{01}^+ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad S_{10}^+ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad S_{11}^+ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Позначимо $I_{11}(\omega), I_{12}(\omega), I_{21}(\omega), I_{22}(\omega)$ відповідні випадкові інтеграли у матриці $\mathbf{B}(\omega)$. Тоді власні значення (як випадкові величини) матриці $\mathbf{B}(\omega)$ дорівнюють

$$\lambda_1(\omega) = (I_{11}(\omega) + I_{22}(\omega) + \sqrt{D(\omega)}); \quad \lambda_2(\omega) = (I_{11}(\omega) + I_{22}(\omega) - \sqrt{D(\omega)}),$$

де $D(\omega) = (I_{11}(\omega) + I_{22}(\omega))^2 - 4(I_{11}(\omega)I_{22}(\omega) + I_{12}(\omega)I_{21}(\omega))$.

Тривіальний розв'язок системи (40), (41) асимптотично стійкий у l.i.m., якщо $|\lambda_i(\omega)| < 1$, $i=1,2$. Це і є умовою стабілізації курсу лайнера.

ВИСНОВКИ

У статті доведено умови асимптотичної стійкості у середньому квадратичному тривіального розв'язку дифузійних стохастичних диференціальних функціональних рівнянь Гіхмана–Іто. Умови сформульовано в термінах власних значень матриці $\mathbf{B}$, яка побудована з коефіцієнтів цих рівнянь. Наведені умови застосовано до дослідження стохастичної задачі стабілізації курсу океанського лайнера під дією зовнішніх збурень типу випадкових величин.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ясинський В.К., Ясинський Є.В. Задачі стійкості та стабілізації динамічних систем зі скінченною післядією. Київ: ТВіМС, 2005. 586 с.
2. Ясинський В.К., Лукашів Т.О. Стабілізація стохастичних дифузійних динамічних систем випадкової структури. Чернівці: ЧНУ, 2013. 136 с.
3. Ясинський В.К., Юрченко І.В., Кисілюк У.М. Існування та єдиність сильного розв'язку стохастичного диференціально-функціонального рівняння із зовнішніми випадковими збуреннями. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика і інформатика*. 2017. Вип. №1 (30). С.143–153.
4. Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. Existence of Lyapunov–Krasovskii functionals for stochastic differential-functional Ito–Skorokhod equations under the condition of solutions' stability on probability with finite aftereffect. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 6. P. 957–970. <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0099-8>.
5. Ясинський В.К., Довгунь А.Я. Стабілізація стохастичних динамічних систем автоматичного регулювання. Чернівці: ЧНУ, 2015. 142 с.
6. Кушнер Г.Дж. Стохастическая устойчивость и управление. Москва: Мир, 1969. 200 с.
7. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 612 с.
8. Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. У 3-х томах. Т. 3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. Чернівці: Золоті литаври, 2009. 798 с.
9. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. Москва: Наука, 1992. 336 с.
10. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. Москва: Мир, 1984. 421 с.
11. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. Рига: Зинатне, 1989. 421 с.
12. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. Рига: Ориентир, 1990. 328 с.
13. Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Стійкість у стохастичному моделюванні складних динамічних систем. Снятин: Над Прутом, 1996. 448 с.
14. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Москва: Наука, 1967. 575 с.
15. Korolyuk V.S., Musurivskii V.I., Yurchenko I.V. Stability of dynamic systems with aftereffect with due regard for Markov perturbations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2007. Vol. 43, N 6. P. 876–885. <https://doi.org/10.1007/s10559-007-0112-0>.

V.K. Yasynskyy, I.V. Yurchenko

MEAN SQUARE STABILITY AND INSTABILITY CRITERIA FOR THE GIKHMAN–ITO STOCHASTIC DIFFUSION FUNCTIONAL DIFFERENTIAL SYSTEMS SUBJECT TO EXTERNAL DISTURBANCES OF THE TYPE OF RANDOM VARIABLES

Abstract. The authors investigate the asymptotic stability in the mean square of the trivial solution of the stochastic diffusion Gikhman–Ito functional differential equations in terms of the eigenvalues of the matrix constructed from the coefficients of these equations.

Keywords: criterion, stability of the solution, stochastic functional differential Gikhman–Ito equations, external disturbances.

Надійшла до редакції 19.07.2022