

Д.А. КЛЮШИН

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: dokmed5@gmail.com.

С.І. ЛЯШКО

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: lyashko.serg@gmail.com.

Н.І. ЛЯШКО

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: Lyashko@nas.gov.ua.

А.А. ТИМОШЕНКО

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: inna-andry@ukr.net.

ОПТИМАЛЬНЕ ЗОСЕРЕДЖЕНЕ КЕРУВАННЯ ПЕРЕНЕСЕННЯМ ВОЛОГИ В ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Анотація. У роботі запропоновано алгоритм знаходження оптимальної потужності джерел для двовимірного квазілінійного рівняння Річардса у прямокутній області. Використано перетворення Кірхгофа з масштабуванням координат та потужностей занурених джерел, що дає змогу сформулювати безрозмірну задачу. Обґрунтовано існування розв'язку для задачі оптимізації вологоперенесення в ненасиченому пористому середовищі. Завданням цього дослідження є пошук такої потужності джерел, занурених у пористе середовище, що у кінцевий момент часу розподіл вологості буде близьким до заданих показників або цільової функції. Чисельний розв'язок призводить до наближення оптимальних значень джерел.

Ключові слова: рівняння Річардса, керування, оптимізація, пористе середовище, перенесення вологи.

ВСТУП

Зростання дефіциту водних ресурсів на цей час є загальновизнаною світовою проблемою. У середньому в світі на зрошування витрачається близько 70% запасу води, а в засушливих регіонах цей показник сягає 90% [1]. З цієї причини акцентується увага на застосуванні таких економних методів, як крапельне зрошування. У свою чергу, ця технічна проблема породжує низку складних математичних задач.

Рух рідини в ненасичених пористих середовищах описують нелінійним рівнянням Річардса щодо вологості або напору [2]. Не зважаючи на зовнішнє простий вигляд цього рівняння, його розв'язання пов'язане зі складнощами, які зумовлені залежністю ступеню його нелінійності від насиченості в тріщинках. Зокрема, у разі виникнення зон насичення нелінійне параболічне рівняння Річардса вироджується в лінійне еліптичне рівняння. З іншого боку, у надмірно сухих зонах виникають великі градієнти розв'язку, що також ускладнює чисельне моделювання. Для підвищення ефективності алгоритмів розв'язання рівняння Річардса його розглядають або у дивергентній формі відносно напору, або у вигляді рівняння конвективної дифузії стосовно вологості [3]. В окремих випадках це дає змогу значно покращити характеристики алгоритмів, але в цілому не усуває основних проблем. Останнім часом рівняння Річардса розв'язують зазвичай за допомогою чисельних методів, наприклад методом скінченних різниць, скінченних елементів і скінченних об'ємів [3–13] із застосуванням ітераційних методів типу Ньютона. Однак, не зважаючи на високу точність та універсальність таких методів, їхнє застосування потребує великих обчислювальних потужностей. Це стимулювало застосування чисельних методів, засно-

ваних на повній або частковій лінеаризації нелінійного рівняння Річардса за допомогою інтегрального перетворення Кірхгофа [5, 14–16]. У деяких типових випадках поєднання перетворення Кірхгофа з поширеними співвідношеннями, що використовуються в гідрології, дає змогу повністю лінеаризувати нелінійне рівняння Річардса. Така лінеаризація дозволяє значно спростити моделювання руху рідини в пористому середовищі, знизити вимоги до обчислювальних потужностей та розв'язати низку нових постановок задач. До таких задач належить, наприклад, оптимальне керування зосередженими джерелами вологи в пористому середовищі, за допомогою якого можна підвищити ефективність систем краплинного зрошення. Існування узагальненого розв'язка та оптимальне керування параболічними системами досліджено, зокрема, у [17].

Метою статті є розроблення та обґрунтування нового чисельного методу розв'язання задачі оптимального керування зосередженими джерелами в ненасиченому пористому середовищі методом лінеаризації рівняння Річардса за допомогою інтегрального перетворення Кірхгофа.

ДВОВИМІРНА ЗАДАЧА МОДЕЛЮВАННЯ

Розглянемо задачу вертикального перенесення вологи в області ґрунту $\Omega = \{(x, y): 0 < x < l_1, 0 < y < l_2\}$, де l_1 і l_2 — ширина і глибина області відповідно з відомою початковою вологістю, фіксованою вологістю на межі та заданим цільовим розподілом вологості $\varphi(x, y)$ у кінцевий момент часу. Рідина вважається нестискуваною, тиск на систему є постійним.

Запишемо рівняння Річардса з межовими умовами першого роду:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[K_x(\omega) \frac{\partial H}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[K_y(\omega) \frac{\partial H}{\partial y} \right] = \sum_{m=1}^M Q_m F(x - x_m, y - y_m), \quad (1)$$

$$(x, y) \in \Omega, t \in (0, T];$$

$$\omega|_{\partial\Omega} = \omega_0, \quad \omega|_{t=0} = \omega_0. \quad (2)$$

Тут ω — вологість, ω_0 — неусувна вологість, ψ — висота тиску, $H = \psi(\omega) - y$ — напір, $K_x(\omega)$ — водопроникність середовища уздовж осі Ox , $K_y(\omega)$ — водопроникність середовища уздовж осі Oy , $F(x - x_m, y - y_m) \in L_2((0, T) \times \Omega)$ — функція, що задає вплив на систему джерела, розташованого в точці (x_m, y_m) . Для функції дифузійності уздовж осі Oy вибрано

$$D_y(\omega) = K_y(\omega) \frac{d\psi}{d\omega} = e^{0.5\omega}.$$

У правій частині рівняння (1) представлено сукупність джерел потужності Q_m , де $0 \leq Q_m \leq Q_{\max}$, $m = 1, \dots, M$. Розглянемо задачу для ненасиченого випадку.

Далі вважатимемо, що водопроникність за осями можна подати у вигляді $K_x(\omega) = k_1 \cdot k(\omega)$, $K_y(\omega) = k_2 \cdot k(\omega)$, де k_1, k_2 — коефіцієнти водопроникності уздовж осей Ox, Oy , а $k(\omega)$ — вологопровідність. Не обмежуючи загальності, покладемо $k_1 = k_2$. Припустимо, що [16]

$$\frac{1}{D_y(\omega)} \cdot \frac{dK_y(\omega)}{d\omega} = \ell = \text{const};$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{Q^* k_2 \beta_2}{4\pi k_1} \frac{1}{D_y(\omega)} \frac{\partial \Theta}{\partial t} \equiv \frac{k_2 \beta_2^3 Q^*}{4\pi k_1} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau},$$

де $\beta_2 = 0.5\ell$, $\beta_1 = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \beta_2$, $\alpha = \frac{\langle D_y \rangle \beta_2^2}{T}$, $\xi = \frac{\beta_1}{l_1} x$, $\zeta = \frac{\beta_2}{l_2} y$, $\tau = at$, $\langle D_y \rangle$ — середнє значення $D_y(\omega)$ у наведеній області.

Застосуємо перетворення Кірхгофа:

$$\Theta(\omega) = \frac{4\pi k_1}{Q^* k_2 \beta_2} \int_{\omega_0}^{\omega} D_y(\omega) d\omega, \quad (3)$$

де уведено масштабний множник Q^* для масштабування потужності джерела.

Уведемо позначення для масштабованої потужності джерел: $q_j = \frac{Q_j}{Q^*}$,

$\Omega_0 = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ — масштабована область Ω , $\partial\Omega_0$ — її межа. Далі розглядатимемо область $U = [0, 1] \times \Omega_0$. Відповідно перетворене рівняння буде розглянуто відносно Θ .

Застосовуючи перетворення Кірхгофа (3), для початкової та межових умов (2) отримаємо $\frac{4\pi k_1}{Q^* k_2 \beta_2} \int_{\omega_0}^{\omega_0} D_y(\omega) d\omega = 0$. Усередині області рівняння (1) перетворюється на таке [9]:

$$L(\Theta) \equiv \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} = \sum_{m=1}^M q_m \cdot F(\xi - \xi_m, \zeta - \zeta_m), \quad (4)$$

$$(\xi, \zeta) \in \Omega_0, \tau \in (0, 1];$$

$$\Theta|_{\partial\Omega_0} = 0, \Theta|_{\tau=0} = 0. \quad (5)$$

Запишемо спряжену задачу відносно Ψ :

$$L^*(\Psi) \equiv -\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} = 2(\Theta(\tau, \xi, \zeta) - \varphi(\tau, \xi, \zeta)), \quad (6)$$

$$(\xi, \zeta) \in \Omega_0, \tau \in (0, 1];$$

$$\Psi|_{\partial\Omega_0} = 0, \Psi|_{\tau=1} = 0. \quad (7)$$

Визначимо простір $W_{2bd}^1(U)$ як поповнення простору гладких в U функцій, що задовольняють початкові та межові умови за нормою

$$\|\Theta\|_{W_{2bd}^1} = \left(\int_U (\Theta_\tau^2 + \Theta_\xi^2 + \Theta_\zeta^2) dU \right)^{1/2}.$$

Аналогічно уведемо $W_{2bd+}^1(U)$ — поповнення гладких в U функцій, що задовольняють початкові та межові умови спряженої задачі за тією самою нормою. Тоді $W_{2bd}^{-1}(U)$ та $W_{2bd+}^{-1}(U)$ — негативні простори, $W_{2bd}^{-1}(U)$ побудований за $W_{2bd}^1(U)$ та $L_2(U)$, а $W_{2bd+}^{-1}(U)$ побудований за $W_{2bd+}^1(U)$ та $L_2(U)$. Уведемо норми:

$$\|\Theta\|_{W_{2bd}^{-1}(U)} = \sup_{\Psi \neq 0, \Psi \in W_{2bd}^1(U)} \frac{|\langle \Theta, \Psi \rangle|}{\|\Psi\|_{W_{2bd}^1(U)}},$$

$$\|\Psi\|_{W_{2bd+}^{-1}(U)} = \sup_{\Theta \neq 0, \Theta \in W_{2bd+}^1(U)} \frac{|\langle \Psi, \Theta \rangle|}{\|\Theta\|_{W_{2bd+}^1(U)}},$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — білінійні форми, побудовані за відповідними позитивними та негативними просторами. За оцінками в негативних нормах [17] маємо, що $\Theta \in W_{2bd}^1(U)$ і $\Psi \in W_{2bd+}^1(U)$, якщо права частина (1) належить $L_2(U)$.

ЗАДАЧА ОПТИМІЗАЦІЇ

Для постановки задачі оптимізації скористаємось усередненням вологості навколо точок. Позначимо r_m , $m=1, \dots, M$, координати центрів джерел потужності q_m . Цільові значення вологості $\varphi(1, \xi, \zeta)$ розглядаємо, як усереднення вологості $\Theta(1, \xi, \zeta)$ в околі вибраних точок $(\xi_s, \zeta_s) \in \Omega$, $s=1, \dots, S$. Метою дослідження є пошук значень q_m , $m=1, \dots, M$, що мінімізують значення квадрата різниці між $\Theta(1, \xi_s, \zeta_s)$ (розв'язком прямої задачі (4) за обраними значеннями потужності джерел $\tilde{q}$) та $\varphi(1, \xi_s, \zeta_s)$. Відповідно оптимальне керування є M -вимірним вектором потужності джерел з множини

$$\left[0, \frac{Q_{\max}}{Q^*}\right]^M \subset \mathbb{R}^M. \text{ Цільовий функціонал розглянемо у вигляді}$$

$$J(\bar{q}) = \int_U ((\Theta(1, \xi, \zeta) - \varphi(1, \xi, \zeta))^2) dU, \quad (8)$$

де $\bar{q} = (q_1, \dots, q_M)^T$ — вектор потужності джерел, за допомогою якого здійснюється керування. Отже, оптимальний вибір потужності джерел зводиться до мінімізації функціонала

$$J(\bar{q}^*) = \min_{\tilde{q} \in \left[0, \frac{Q_{\max}}{Q^*}\right]^M} J(\bar{q}). \quad (9)$$

Узагальненим розв'язком [17] задачі (4) з правою частиною $\tilde{F} = \sum_{m=1}^M q_m \times F(\xi - \xi_m, \zeta - \zeta_m) \in L_2(U)$ вважатимемо функцію $\Theta(\tau, \xi, \zeta) \in W_{2bd}^1(U)$, для якої існує послідовність функцій $\Theta_i(\tau, \xi, \zeta) \in C_{bd}^\infty(\bar{U})$, $i=1, 2, \dots$, таких, що

$$\|\Theta_i - \Theta\|_{W_{2bd}^1} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0, \quad \|L\Theta_i - \tilde{F}\|_{W_{2bd}^{-1}} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$

Відповідно до [17] для будь-якої функції $\tilde{F} \in L_2(U)$ існує єдиний розв'язок рівняння (4), (5) за зазначеним вище визначенням.

Розглянемо метод уточнення потужності джерел. Нехай $\bar{q} = (q_1, \dots, q_M) \in \left[0, \frac{Q_{\max}}{Q^*}\right]^M$ і $(\bar{q} + \lambda \Delta \bar{q}) \in \left[0, \frac{Q_{\max}}{Q^*}\right]^M$ — довільні керування з множини допустимих керувань, $\Delta q = (\Delta q_1, \dots, \Delta q_M)$, $\lambda > 0$, а $\Theta(\bar{q})$, $\Theta(\bar{q} + \lambda \Delta \bar{q})$ — відповідні розв'язки крайової задачі (4), (5).

Позначимо $\Delta \Theta(\bar{q}) = \Theta(\bar{q} + \lambda \Delta \bar{q}) - \Theta(\bar{q})$. Тоді $\Delta \Theta(\bar{q})$ є розв'язком задачі

$$L(\Delta \Theta(\bar{q})) = \sum_{m=1}^M \lambda \Delta q_m \cdot F(\xi - \xi_m, \zeta - \zeta_m), \quad (10)$$

$$\Delta \Theta(\bar{q})|_{\partial \Omega_0} = 0, \quad \Delta \Theta(\bar{q})|_{\tau=0} = 0. \quad (11)$$

З отриманих оцінок в негативних нормах $\|\Theta\|_{L_2} \leq c_1 \|L\Theta\|_{W_{2bd}^{-1}} \leq c_2 \|\Theta\|_{W_{2bd}^1}$, $c_1, c_2 = \text{const}$, для оператора задачі (10), (11) впливає існування та єдиність

узагальненого розв'язку цієї задачі в тому розумінні, що для будь-яких $\Psi(\tau, \xi, \zeta)$ з області визначення оператора спряженої задачі (6), (7) має місце рівність

$$(L^* \Psi, \Delta \Theta(\bar{q})) = \lambda \int_U \sum_{m=1}^M \Delta q_m \cdot F(\xi - \xi_m, \zeta - \zeta_m) \cdot \Psi(\tau, \xi, \zeta) dU, \quad (12)$$

де $U = [0, 1] \times \Omega_0$.

Поділимо обидві частини виразу (12) на λ і спрямуємо λ до 0. Отримаємо співвідношення

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(L^* \Psi, \frac{\Delta \Theta(\bar{q})}{\lambda} \right) = \int_U \sum_{m=1}^M \Delta q_m \cdot F(\xi - \xi_m, \zeta - \zeta_m) \cdot \Psi(\tau, \xi, \zeta) dU. \quad (13)$$

Позначимо $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \Theta(\bar{q})}{\lambda} \right) = \Theta'(\bar{q})$. Маємо

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (L^* \Psi, \Theta'(\bar{q})) = \int_U \sum_{m=1}^M \Delta q_m \cdot F(\xi - \xi_m, \zeta - \zeta_m) \cdot \Psi(\tau, \xi, \zeta) dU. \quad (14)$$

З апіорних оцінок у негативних нормах $\|\Psi\|_{L_2} \leq c_1 \|L^* \Psi\|_{W_{2bd+}^{-1}} \leq c_2 \|\Psi\|_{W_{2bd+}^1}$, $c_1, c_2 = \text{const}$, випливає існування єдиного узагальненого розв'язку $\Psi(\tau, \xi, \zeta)$ задачі (6), (7), який підставимо у співвідношення (14). Розглянемо відповідний приріст функціонала якості

$$J(\bar{q}) = \int_U ((\varphi(\tau, \xi, \zeta) - \Theta(\tau, \xi, \zeta))^2) dU;$$

$$\Delta J(\bar{q}) = J(\bar{q} + \lambda \Delta \bar{q}) - J(\bar{q}) = \int_U \Delta \Theta(\bar{q}) [\Theta(\bar{q} + \lambda \Delta \bar{q}) + \Theta(\bar{q}) - 2\varphi(\tau, \xi, \zeta)] dU. \quad (15)$$

Зі співвідношення (15) граничним переходом за $\lambda \rightarrow 0$ отримаємо

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta J(\bar{q})}{\lambda} = 2 \int_U \Delta \Theta'(\bar{q}) [\Theta(\bar{q}) - \varphi(\tau, \xi, \zeta)] dU. \quad (16)$$

Співставляючи вирази (14) і (16), отримаємо

$$(J'(\bar{q}), \Delta \bar{q}) = \sum_{m=1}^M \Delta q_m \cdot \int_U F(\xi - \xi_m, \zeta - \zeta_m) \cdot \Psi(\tau, \xi, \zeta) dU,$$

а отже функціонал якості диференційовний за Гато і його похідна має вигляд

$$\frac{\partial J}{\partial q_m} = \int_U F(\xi - \xi_m, \zeta - \zeta_m) \cdot \Psi(\tau, \xi, \zeta) dU, \quad m = 1, \dots, M, \quad (17)$$

де $\Psi(\tau, \xi, \zeta)$ — розв'язок задачі (6), (7).

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ЗВОЛОЖЕННЯ

Після переходу до постановки задачі з лінійним оператором виконуємо дискретизацію за часом та просторовими координатами. Основою для розв'язання поставленої задачі слугує варіаційний метод за Тихоновим. Такий підхід дає змогу перейти до системи рівнянь, що поєднують моделювання та оптимізацію, включаючи побудову спряженої системи та спряжених операторів.

Для дослідження враховуємо умову стійкості явної схеми $\tilde{\tau} \leq \frac{h^2}{2}$ для дискретизації. Обчислення проводились з просторовим кроком $h = \frac{1}{20}$ та часовим кроком $\tilde{\tau} = 10^{-4}$. Далі будемо вважати Θ^n , φ^n усередненими за просторовою областю навколо вузла сітки значеннями в момент часу $\tilde{\tau} \cdot n$.

Застосуємо варіаційний алгоритм на основі використаного у [15] для двовимірної задачі, замінюючи похідні за простором та часом на їхнє різницеве наближення (наведемо явну схему).

1. Розв'язати пряму задачу: за відомим поточним наближенням потужності кожного джерела q_m , $m = 1, \dots, M$, знайти розподіл безрозмірного аналога вологи $\Theta_{i,j}^n = \Theta\left(\frac{i}{20}, \frac{j}{20}, n \cdot 10^{-4}\right)$, $i, j = 0, \dots, 20$, на кожному часовому кроці $n = 1, \dots, N$, за розподілом вологи в початковий момент часу:

$$\frac{\Theta_{ik}^{n+1} - \Theta_{ik}^n}{\tilde{\tau}} = \frac{\Theta_{i+1k}^n - 2\Theta_{ik}^n + \Theta_{i-1k}^n}{h^2} + \frac{\Theta_{ik+1}^n - 2\Theta_{ik}^n + \Theta_{ik-1}^n}{h^2} - 2 \frac{\Theta_{ik+1}^n - \Theta_{ik-1}^n}{2h} + 4\pi \sum_{m=1}^M F(\xi_i, \zeta_k) \cdot q_m, \quad \Theta_{ik}^0 = 0. \quad (18)$$

2. Розв'язати спряжену задачу: у правій частині виконується порівняння отриманих значень безрозмірного аналога вологості у кінцевий або однаковий із цільовою функцією момент часу:

$$-\frac{\Psi_{ik}^{n+1} - \Psi_{ik}^n}{\tilde{\tau}} = \frac{\Psi_{i+1k}^{n+1} - 2\Psi_{ik}^{n+1} + \Psi_{i-1k}^{n+1}}{h^2} + \frac{\Psi_{ik+1}^{n+1} - 2\Psi_{ik}^{n+1} + \Psi_{ik-1}^{n+1}}{h^2} + 2 \frac{\Psi_{ik+1}^{n+1} - \Psi_{ik-1}^{n+1}}{2h} + 2(\Theta_{ik}^n - \varphi_{ik}^n), \quad \Psi_{ik}^N = 0. \quad (19)$$

3. Визначити нову апроксимацію потужності джерел q_m , $m = 1, \dots, M$, з урахуванням розв'язку спряженої задачі. Нове наближення значення інтенсивності джерел обчислимо двома способами.

Перший спосіб аналогічний до запропонованого у [15]:

$$\frac{q_m^{r+1} - q_m^r}{\hat{\tau}^r} + \Psi_m^0 = 0, \quad r = 0, 1, \dots \quad (20)$$

Другий спосіб враховує похідну від правої частини за потужністю з першого рівняння та апроксимацію функції розв'язку спряженого рівняння на основі отриманих точкових значень. Апроксимація будується аналогічно до (17) для кожної потужності джерела, інтеграл обчислюється чисельним наближенням за відомими значеннями в точках:

$$q_m^{r+1} = q_m^r - \hat{\tau}^r \cdot \int_U F(\xi - \xi_m, \zeta - \zeta_m) \cdot \Psi(\xi, \zeta) dU. \quad (21)$$

Крок $\hat{\tau}^r$ є ітераційним кроком переходу до нового наближення і може змінюватись. Доданок Ψ_m^0 є розв'язком спряженого рівняння у тій самій точці, де розташоване m -те джерело для початкового моменту часу. Зупинка алгоритму може відбутись за точністю або за кількістю ітерацій, коли можемо записати для номера ітерації $r = 0, 1, \dots, r_{\max}$.

ЧИСЕЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

Не обмежуючи загальності, продемонструємо роботу алгоритму для одновимірного випадку з цільовою функцією, заданою в останній момент часу, щоб зменшити кількість обчислень, не змінюючи при цьому ідею методу. Для моделювання джерел уведемо функції, що відповідають розташуванню джерела у точці 0.5:

$$F_1(x) = \begin{cases} 5, & x \geq 0.4 \text{ та } x \leq 0.6, \\ 0 & \text{інакше;} \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} \frac{200 \cdot \sqrt{\left| \frac{1}{100} - (x - 0.5)^2 \right|}}{\pi}, & x \geq 0.4 \text{ та } x \leq 0.6, \\ 0 & \text{інакше;} \end{cases}$$

$$F_3(x) = \begin{cases} 100 \cdot x - 40, & x \geq 0.4 \text{ та } x \leq 0.5, \\ -100 \cdot x + 60, & x > 0.5 \text{ та } x \leq 0.6, \\ 0 & \text{інакше.} \end{cases}$$

Вочевидь, що ці функції є обмеженими та належать до простору $L_2(U)$, до того ж друга та третя є неперервними. Для іншого розташування джерел використаємо зміщення аргументу під час підстановки.

Вважатимемо, що перше джерело знаходиться у точці 0.75 та має оптимальну потужність 0.2, друге джерело розташоване у точці 0.25 та має оптимальну потужність 0.4. На основі цих потужностей будується функція $\varphi(l, \zeta)$ як результат моделювання з цими потужностями. У результаті чисельного експерименту з початковим наближенням до потужності, яка дорівнює нулю, та множником $\hat{\tau}^r = 10$ отримано такі результати: показники табл. 1 відповідають підходу за формулами (18), (19) та (21), табл. 2 — за формулами (18), (19) та (20). Функцію для моделювання джерел вибирали одну і ту саму для обох джерел. Умовою зупинки за точністю є досягнення функціоналом $\sum_{i=0}^{20} (\varphi_i^N - \Theta_i^N)^2$ значення 10^{-6} або меншого

за точками розбиття відрізка з кроком $h = \frac{1}{20}$.

З таблиць 1 та 2 випливає, що в обох варіантах отримано достатньо точний розв'язок, але градієнтний метод потребує меншої кількості ітерацій до зупинки за точністю.

Таблиця 1. Результати обчислення за варіаційним методом з розрахунком інтеграла

Функція $F(\xi_i, \zeta_k)$ з (18)	Кількість ітерацій до зупинки алгоритму за точністю	Отримане значення потужності у разі зупинки за точністю (оптимальна потужність 0.2 та 0.4)	Значення потужності після 100 ітерацій (оптимальна потужність 0.2 та 0.4)	Значення функціонала якості після 100 ітерацій
Функція- сходінка $F_1(\zeta)$	49	0.2024938857 0.3974886516	0.2000141915 0.3999826870	$3.925637374 \cdot 10^{-11}$
Функція- півеліпс $F_2(\zeta)$	43	0.2029929565 0.3966800860	0.2001288328 0.3998275281	$2.510580483 \cdot 10^{-9}$
Трикутник $F_3(\zeta)$	43	0.2025014188 0.3969245786	0.2002821324 0.3997040769	$9.941294655 \cdot 10^{-9}$

Таблиця 2. Результати обчислення за варіаційним методом з кроком, пропорційним розв'язку спряженої задачі

Функція $F(\xi_i, \zeta_k)$ з (18)	Кількість ітерацій до зупинки алгоритму за точністю	Отримане значення потужності у разі зупинки за точністю (оптимальна потужність 0.2 та 0.4)	Значення потужності після 100 ітерацій (оптимальна потужність 0.2 та 0.4)	Значення функціонала якості після 100 ітерацій
Функція сходінка $F_1(\zeta)$	60	0.2026283994 0.3972272561	0.2002884369 0.3996957226	$1.186517145 \cdot 10^{-9}$
Функція-півеліпс $F_2(\zeta)$	99	0.2033587205 0.3967971291	0.2032609354 0.3968903768	$9.320878200 \cdot 10^{-7}$
Трикутник $F_3(\zeta)$	66	0.2030909344 0.3967949145	0.2006064956 0.3993711061	$3.841269904 \cdot 10^{-8}$

Для двовимірної задачі було визначено джерела з координатами (0.25, 0.25) та (0.75, 0.75) відповідно. Значення функції $\varphi(1, \xi, \zeta)$ у вузлах сітки отримано як результат моделювання з потужністю джерел 0.1 та 0.2 відповідно. Множник $\hat{\tau}^r$ дорівнює 400, а функція у правій частині представляється у вигляді

$$F(\xi - \xi_1, \zeta - \zeta_1) = F_1(\xi - 0.25) \cdot F_1(\zeta - 0.25),$$

$$F(\xi - \xi_2, \zeta - \zeta_2) = F_1(\xi + 0.25) \cdot F_1(\zeta + 0.25)$$

для першого експерименту та

$$F(\xi - \xi_1, \zeta - \zeta_1) = 0.75 \cdot F_2(\xi - 0.25) \cdot F_2(\zeta - 0.25),$$

$$F(\xi - \xi_2, \zeta - \zeta_2) = 0.75 \cdot F_2(\xi + 0.25) \cdot F_2(\zeta + 0.25)$$

— для другого експерименту.

Умовою зупинки за точністю є досягнення функціоналом $\sum_{i,k=0}^{20} (\varphi_{ik}^N - \Theta_{ik}^N)^2$

значення 10^{-6} або меншого значення за точками сітки розбиття площини. У першому випадку зупинка за точністю відбулась на 15-й ітерації з результатом потужності джерел 0.10028 та 0.19979, у другому випадку — на 29-й ітерації з результатом 0.10059 та 0.1994. Отже, в обох випадках отримано значення, близьке до оптимальної потужності 0.1 та 0.2 відповідно.

ВИСНОВКИ

Досліджено задачу оптимального керування зосередженими джерелами для рівняння Річардса вертикального переносу вологи у пористому середовищі для розглянутої задачі. Запропонований варіаційно-градієнтний метод дає змогу досягти оптимальної потужності джерела з високою точністю, модифікація пришвидшує збіжність порівняно з ітераційним процесом на основі лише розв'язку спряженої задачі. Запропонований підхід легко поширити на задачу керування координатами джерел.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Baeza R., Contreras J.I. Evaluation of thirty-eight models of drippers using reclaimed water: effect on distribution uniformity and emitter clogging. *Water*. 2020. Vol. 12. <https://doi.org/10.3390/w12051463>.
2. Farthing M.W., Ogden F.L. Numerical solution of Richards' equation: A review of advances and challenges. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 2017. Vol. 81. P. 1257–1269. <https://doi.org/10.2136/sssaj2017.02.0058>.
3. Li N., Yue X., Ren L. Numerical homogenization of the Richards equation for unsaturated water flow through heterogeneous soils. *Water Resour. Res.* 2016. Vol. 52, N 11. P. 8500–8525. <https://doi.org/10.1002/2015WR018508>.

4. Zeng J., Zha Y., Yang J. Switching the Richards' equation for modeling soil water movement under unfavorable conditions. *J. Hydrol.* 2018. Vol. 563. P. 942–949. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2018.06.069>.
5. Zhang Z., Wang W., Yeh T.-C.J., Chen L., Wang Z., Duan L., An K., Gong C. Finite analytic method based on mixed-form Richards' equation for simulating water flow in vadose zone. *J. Hydrol.* 2016. Vol. 537. P. 146–156. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2016.03.035>.
6. Kumar K., List F., Pop I., Radu F. Formal upscaling and numerical validation of fractured flow models for Richards equation. *J. Comput. Phys.* 2019. Vol. 407. 109138. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.109138>.
7. Keita S., Beljadid A., Bourgault Y. Implicit and semi-implicit second-order time stepping methods for the Richards equation. *Advances in Water Resources*. 2021. Vol. 148. 103841. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.05224>.
8. Bassetto S., Cancès C., Enchéry G., Tran Q.H. Robust Newton solver based on variable switch for a finite volume discretization of Richards equation. In: *Finite Volumes for Complex Applications IX — Methods, Theoretical Aspects, Examples*. 2020. P. 385–393. https://doi.org/10.1007/978-3-030-43651-3_35.
9. Younes A., Hoteit H., Helmig R., Fahs M. A robust fully Mixed Finite Element model for flow and transport in unsaturated fractured porous media. *Advances in Water Resources*. 2022. Vol. 166. <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2022.104259>.
10. Shuairun Zhu, Lizhou Wu, Ping Cheng, Jianting Zhou. Application of modified iterative method to simulate rainfall infiltration in unsaturated soils. *Computers and Geotechnics*. 2022. Vol. 148. 104816. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2022.104816>.
11. Bohaienko V.O., Gladky, A.V. Multithreading performance simulating fractional-order moisture transport on AMD EPYC. *Journal of Numerical and Applied Mathematics*. 2022. N 2. P. 174–182.
12. Bulavatsky V.M., Bohaienko V.O. Boundary-value problems for space-time fractional differential filtration dynamics in fractured-porous media. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2022. Vol. 58. P. 358–371. <https://doi.org/10.1007/s10559-022-00468-9>.
13. Gladky A.V., Gladka Y.A. On one splitting scheme in the problems of diffusion and heat conduction. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, N 6. P. 122–133.
14. Suk H., Park E. Numerical solution of the Kirchhoff-transformed Richards equation for simulating variably saturated flow in heterogeneous layered porous media. *Journal of Hydrology*. 2019. Vol. 579. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2019.124213>.
15. Tymoshenko A., Klyushin D., Lyashko S. Optimal control of point sources in Richards-Klute equation. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2019. N 754. P. 194–203. https://doi.org/10.1007/978-3-319-91008-6_20.
16. Шульгин Д.Ф., Новосельский С.Н. Математические модели и методы расчета влагопереноса при внутрипочвенном орошении. *Математика и проблемы водного хозяйства*. Київ: Наук. думка, 1986. С. 73–89.
17. Lyashko S.I., Nomirovski D.A. The generalized solvability and optimization of parabolic systems in domains with thin low-permeable inclusions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2003. Vol. 39, N 5. P. 737–745. <https://doi.org/10.1023/B:CASA.0000012094.62199.de>.

D.A. Klyushin, S.I. Lyashko, N.I. Lyashko, A.A. Tymoshenko

OPTIMAL LUMPED CONTROL OF WATER TRANSPORT IN POROUS MEDIA

Abstract. An algorithm for finding the optimal source power for the two-dimensional quasi-linear Richards equation for a rectangular region is proposed. The Kirchhoff transformation with scaling of coordinates and powers of buried sources is used, which allows formulating a dimensionless problem. The existence of the solution for the problem of optimizing moisture transfer in an unsaturated porous medium is substantiated. The task of this study is to find the power of sources buried in a porous medium — such that at the final moment of time the distribution of humidity will be close to the given indicators or the objective function. The numerical solution leads to an approximation of the optimal values of the sources.

Keywords: Richards equation, control, optimization, porous medium, moisture transfer.

Надійшла до редакції 22.05.2023