

А.О. ЧИКРІЙІнститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: g.chikrii@gmail.com.**Й.С. РАППОПОРТ**Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: jeffrappoport@gmail.com.**ПРЯМИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ІГРОВИХ ЗАДАЧ
ЗБЛИЖЕННЯ КЕРОВАНИХ ОБ'ЄКТІВ¹**

Анотація. Досліджено проблему зближення керованих об'єктів у ігрових задачах динаміки. Отримано достатні умови завершення гри за скінченний гарантований час у випадку, коли не виконується класична умова Понтрягіна. Замість селектора Понтрягіна, якого не існує, розглядається деяка функція зсуву, за допомогою якої вводиться спеціальне багатозначне відображення, що генерує нижню розв'язувальну функцію. Остання відіграє ключову роль у формулюванні результату і дає змогу реалізувати побудову керування на основі теорем типу Філіппова–Кастена. Запропоновано модифіковану схему першого прямого методу Понтрягіна, яка гарантує успішне завершення конфліктно-керованого процесу в класі контркерувань. Для порівняння гарантованих часів введено верхню розв'язувальну функцію та подано відповідну схему методу. Теоретичні результати проілюстровано на модельному прикладі.

Ключові слова: квазілінійна диференціальна гра, багатозначне відображення, вимірний селектор, стробоскопічна стратегія, розв'язувальна функція.

ВСТУП

Динамічні ігри або конфліктно-керовані процеси — це розділ математичної теорії керування, в якому вивчається керування об'єктами в умовах конфлікту або постійно діючих збурень, стосовно яких відсутній статистичний опис, а відомі лише межі зміни. Теорія динамічних ігор, поєднуючи в собі риси теорії керованих процесів, теорії ігор та оптимізації, має важливе практичне значення для прийняття рішень щодо складних ситуацій конфліктної взаємодії рухомих об'єктів, у тому числі груп керованих об'єктів. Ігрові задачі, в яких динаміка задається системою звичайних диференціальних рівнянь, прийнято називати диференціальними іграми. Поштовх до їхнього розвитку дали реальні прикладні задачі у військовій справі, економіці, техніці, біології, медицині тощо. Такими є, зокрема, задачі перехоплення цілей, уникнення сутичок з супротивником.

Теорія конфліктно-керованих процесів має у своєму розпорядженні широкий спектр фундаментальних математичних методів для дослідження різних ситуацій протистояння. З певною часткою суб'єктивізму їх можна поділити на два типи. Перший охоплює конструкції, для яких характерна спроба побудувати оптимальні стратегії гравців та встановити необхідні і достатні умови завершення гри. Це методики, що пов'язані з оберненими процедурами Понтрягіна–Пшеничного [1, 2], альтернативами Красовського [3] та ідеологією Айзекса, яка ґрунтується на основному рівнянні диференціальних ігор — рівнянні Гамільтона–Якобі–Беллмана–Айзекса [4–6]. Кожен з цих підходів так чи інакше пов'язаний з динамічним програмуванням. Інший тип — це методи, що забезпечують гарантований результат. У цьому випадку питання щодо оптимальності не є першорядним. Важливою обставиною є досягнення мети і розв'язання задачі за заданих умов, що з практичної точки зору цілком виправдано. Такими є правило екстремального прицілювання Красовського [7, 8], перший прямий метод Понтрягіна [1] і метод розв'язувальних функцій [9].

¹Роботу виконано за часткової підтримки Національного фонду досліджень України. Грант № 2020.02/0121.

Важливим моментом для дослідження динамічних ігор зближення на основі вищезазначених методів є інформованість її учасників про поточний стан процесу, поточне керування або про всю передісторію керування супротивника, відповідно керування в класі позиційних [3], стробоскопічних [10] та квазістратегій [3, 11].

Зосередимось в цій роботі на двох останніх методах і класах стратегій, оскільки результат позиційної гри зближення з циліндричною термінальною множиною може бути реалізованим з точністю до ε , $\varepsilon > 0$, де ε — як завгодно мала величина, в класі стробоскопічних стратегій, якщо для конфліктно-керованого процесу виконано умову «сідлової точки в маленькій грі» [3].

Перший прямий метод Понтрягіна і метод розв'язувальних функцій для квазілінійних систем об'єднує спільний принцип побудови гарантованих керувань на основі теорем вимірного вибору типу Філіппова–Кастена. Забезпечує цей вибір класична умова Понтрягіна, яка залежить від ресурсів керування гравців.

У певному сенсі метод розв'язувальних функцій є розвитком першого прямого методу Понтрягіна. Зі схеми першого з них випливає, що гарантований час закінчення квазілінійної гри для методу розв'язувальних функцій менше або дорівнює гарантованому часу першого прямого методу Понтрягіна. До того ж першому прямому методу відповідає розв'язувальна функція, що приймає значення $+\infty$. У монографії [9] встановлено умови рівності та строгої нерівності гарантованих часів вищезазначених методів, а також описано структуру екстремальних селекторів функціональної форми першого прямого методу Понтрягіна.

Метод розв'язувальних функцій виник внаслідок розв'язання задачі групового переслідування [12] для простих рухів однаковими областями керування. Умова «оточення» [12] за початковими положеннями давала необхідні і достатні умови завершення групового переслідування за скінченний час. У свою чергу, цей результат був наслідком умови уникнення зустрічі втікача, що прямолінійно рухався, з групою переслідувачів. Згаданий результат дав поштовх розвитку методів групового переслідування [9, 13, 14]. У подальшому в руслі згаданих досліджень розв'язувались задачі з фазовими обмеженнями як зі статичними «лежачими» переслідувачами [9, 14], ігрові задачі почергового зближення — задачі комівояжерного типу [9], багатократна поїмка [9, 13].

Унаслідок своєї універсальності метод розв'язувальних функцій розповсюджено на процеси, що описуються системами різницевих, звичайних диференціальних, диференціально-різницевих, інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь, рівнянь з дробовими та частинними похідними, імпульсними системами.

Оскільки класична умова Понтрягіна не враховує тілесну складову циліндричної термінальної множини і може не виконуватись, то запропоновано її різні модифікації [9]. Зокрема, одна з них полягає у включенні в умову тілесної частин термінальної множини з певним ваговим коефіцієнтом. Інша умова складається з двох частин. Вводиться спеціальна матрична функція для вирівнювання ресурсів керування гравців, а потім доданий ресурс компенсується за рахунок термінальної множини. Ці модифікації ефективні для об'єктів з різною інерційністю. Для коливних систем умова Понтрягіна може виконуватись лише періодично. У цьому випадку ефективним засобом є, зокрема, принцип розтягування часу [15]. Інші модифікації умови Понтрягіна розглянуто в роботах [16, 17].

Важливу роль у розвитку методу розв'язувальних функцій відіграють верхні та нижні розв'язувальні функції, функції зсуву, які орієнтовані на випадок, коли умова Понтрягіна не виконується [16–18] і селектора Понтрягіна не існує.

Апарат розв'язувальних функцій, які в прикладах з еліпсоїдоподібними областями керування гравців є більшими позитивними коренями квадратних рівнянь,

надзвичайно зручний і ефективний для розв'язання конкретних прикладів, що задаються, зокрема, узагальненим контрольним прикладом Понтрягіна [9, 14].

Зауважимо, що розв'язувальні функції в загальному випадку можуть бути визначені через обернені функціонали Мінковського [9] деяких багатозначних відображень, що дає додаткові можливості в дослідженні. Так, зокрема, для обґрунтування схеми методу і побудови керувань переслідувача визначальною є $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$ -вимірність замкненозначних відображень, пов'язаних з конфліктно-керованим процесом [19], а також суперпозиційна вимірність їхніх селекторів [20, 21].

Привабливою рисою методу розв'язувальних функцій є той факт, що він дає повне обґрунтування класичних законів перехоплення цілей, які використовуються проєктувальниками ракетної та космічної техніки: правило паралельного зближення, правило погонної кривої Ейлера, переслідування за променем, пропорційної навігації [22, 23]. Метод дає змогу ефективно використовувати сучасну техніку опуклого аналізу, багатозначних відображень та їхніх селекторів в обґрунтуванні ігрових конструкцій і отриманні на їхній основі змістовних результатів для широкого кола задач [24–29]. Зокрема, це стосується конфліктно-керованих процесів з інтегральними обмеженнями на керування та з термінальним функціоналом [30, 31].

У цій роботі наведено одну із схем першого прямого методу Понтрягіна для узагальнених квазілінійних конфліктно-керованих процесів, а також отримано модифікацію першого прямого методу, яка забезпечує завершення гри в класі стробоскопічних стратегій, коли умова Понтрягіна не виконана. Для порівняння гарантованих часів надається одна зі схем методу розв'язувальних функцій. Результати ілюструються на модельному прикладі систем другого порядку зі спеціальною областю керування переслідувача.

СХЕМА ПЕРШОГО ПРЯМОГО МЕТОДУ ПОНТРЯГІНА

Розглянемо конфліктно-керований процес, еволюція якого описана рівністю

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t, \tau) \varphi(u(\tau), v(\tau)) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Тут $z(t) \in R^n$, функція $g(t)$, $g: R_+ \rightarrow R^n$, вимірна за Лебегом [26, 28] і обмежена для $t > 0$, матрична функція $\Omega(t, \tau)$, $t \geq \tau \geq 0$, вимірна за t , а також є сумовною за τ для кожного $t \in R_+$. Блок керування задається функцією $\varphi(u, v)$, $\varphi: U \times V \rightarrow R^n$, яка вважається неперервною за сукупністю змінних на прямому добутку непорожніх компактів U і V ; m, l, n — натуральні числа.

Керування гравців $u(\tau)$, $u: R_+ \rightarrow U$, і $v(\tau)$, $v: R_+ \rightarrow V$, є вимірними функціями часу.

Крім процесу (1) задано термінальну множину M^* , що має циліндричний вигляд

$$M^* = M_0 + M, \quad (2)$$

де M_0 — лінійний підпростір з R^n , а M — компакт з ортогонального доповнення L до підпростору M_0 у R^n .

Цілі першого (u) і другого (v) гравців протилежні. Перший гравець (переслідувач) намагається вивести траєкторію процесу (1) на термінальну множину (2) за найкоротший час, а другий гравець (втікаюч) — максимально відтягнути момент потрапляння траєкторії на множину M^* або взагалі уникнути зустрічі.

Станемо на бік першого гравця і вважатимемо, що у разі, коли гра (1), (2) триває на інтервалі $[0, T]$, керування першого гравця в момент t вибиратимемо на основі інформації про $g(T)$ і $v_t(\cdot)$, тобто у вигляді вимірної функції

$$u(t) = u(g(T), v_t(\cdot)), \quad t \in [0, T], \quad u(t) \in U, \quad (3)$$

де $v_t(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t]\}$ — передісторія керування другого гравця до моменту t , або у вигляді контркерування

$$u(t) = u(g(T), v(t)), \quad t \in [0, T], \quad u(t) \in U. \quad (4)$$

Якщо, зокрема, $g(t) = e^{At} z_0$, $\Omega(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$, $z(0) = z_0$, а e^{At} — матрична експонента, то вважають, що керування $u(t) = u(z_0, v_t(\cdot))$ реалізує квазістратегію [11], а контркерування [7] $u(t) = u(z_0, v(t))$ є проявом стробоскопічної стратегії Хаска [10].

Сформулюємо необхідні факти з опуклого [27] аналізу у вигляді леми.

Лема 1. Нехай $X \in R^n$ — опуклий компакт, $\omega(\tau)$ — невід’ємна обмежена вимірна числова функція. Тоді $\int_0^T \omega(\tau) X d\tau = \int_0^T \omega(\tau) d\tau X$, $T > 0$. До того ж якщо $0 \in X$, $f(\tau) \in \omega(\tau)X$ і $\int_0^T \omega(\tau) d\tau \leq 1$, то $\int_0^T f(\tau) d\tau \in X$, $f(\tau)$ — вимірна функція, $\tau \in [0, T]$.

Позначимо π оператор ортогонального проєктування з R^n у L . Покладемо $\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v) : u \in U\}$ і розглянемо багатозначні відображення

$$W(t, \tau, v) = \pi \Omega(t, \tau) \varphi(U, v), \quad W(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} W(t, \tau, v)$$

на множинах $\Delta_\Theta \times V$ і Δ_Θ відповідно, де $\Delta_\Theta = \{(t, \tau) : 0 \leq \tau \leq t \leq \Theta < \infty\}$, Θ — деяке позитивне число. Припустимо, що багатозначне відображення $W(t, \tau, v)$ має замкнені значення на множині $\Delta_\Theta \times V$.

Умова Понтрягіна. Багатозначне відображення $W(t, \tau)$ приймає непорожні значення на множині Δ_Θ , Θ — деяке позитивне число.

З урахуванням припущень про матричну функцію $\Omega(t, \tau)$ можна зробити висновки, що для будь-якого фіксованого $t > 0$ вектор-функція $\pi \Omega(t, \tau) \varphi(u, v)$ буде $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірною за $(\tau, v) \in [0, t] \times V$ і неперервною за $u \in U$. Тому на підставі теореми про прямий образ [26] за будь-якого фіксованого $t > 0$ багатозначне відображення $W(t, \tau, v) \in \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірним за $(\tau, v) \in [0, t] \times V$. Якщо умова Понтрягіна виконана, то на множині Δ існує принаймні один селектор $\gamma_0(t, \tau)$ відображення $W(t, \tau)$, $\gamma_0(t, \tau) \in W(t, \tau)$. Такий селектор називають селектором Понтрягіна. Сформулюємо умову Понтрягіна в еквівалентному вигляді.

Умова 1. На множині Δ_Θ , де Θ — деяке позитивне число, існує селектор Понтрягіна $\gamma_0(t, \tau)$, для якого справедливе включення

$$0 \in \bigcap_{v \in V} [W(t, \tau, v) - \gamma_0(t, \tau)].$$

Позначимо $\xi_0(t) = \xi(t, g(t), \gamma_0(t, \cdot)) = \pi g(t) + \int_0^t \gamma_0(t, \tau) d\tau$ і розглянемо множину

$$P_0(g(\cdot), \gamma_0(\cdot, \cdot)) = \{t \in [0, \Theta] : \xi_0(t) \in M\}.$$

Якщо співвідношення у фігурних дужках не виконується для жодних $t \in [0, \Theta]$, то покладемо $P_0(g(\cdot), \gamma_0(\cdot, \cdot)) = \emptyset$.

Наведемо одну із схем першого прямого методу Понтрягіна.

Теорема 1. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2) і деякого позитивного числа Θ на множині Δ_Θ виконано умову 1, для деякого селектора Понтрягіна $\gamma_0(t, \tau)$ множина $P_0(g(\cdot), \gamma_0(\cdot, \cdot))$ не є порожньою та $P_0 \in P_0(g(\cdot), \gamma_0(\cdot, \cdot))$. Тоді гра може бути закінчена в момент P_0 з використанням керування вигляду (4).

Доведення. Нехай $v(\tau)$ — довільний вимірний селектор компакта V , $\tau \in [0, P_0]$. Опишемо спосіб вибору керування переслідувачем.

Розглянемо для $v \in V$, $\tau \in [0, P_0]$ компактнозначне багатозначне відображення

$$U_0(\tau, v) = \{u \in U: \pi\Omega(P_0, \tau)\varphi(u, v) - \gamma(P_0, \tau) = 0\}.$$

З урахуванням властивостей параметрів процесу (1) компактнозначне відображення $U_0(\tau, v) \in \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірним [19] для $v \in V$, $\tau \in [0, P_0]$. Тому за теоремою про вимірний вибір селектора [26] багатозначне відображення $U_0(\tau, v)$ містить $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірний селектор $u_0(\tau, v)$, який є суперпозиційно вимірною функцією [19].

Покладемо керування першого гравця $u_0(\tau) = u_0(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0, P_*]$. З урахуванням формули (1) отримаємо

$$\pi z(P_0) = \xi(P_0) + \int_0^{P_0} (\pi\Omega(P_0, \tau)\varphi(u_0(\tau), v(\tau)) - \gamma(P_0, \tau)) d\tau.$$

За вибором керування і за визначенням моменту P_0 останнє співвідношення визначає $\pi z(P_0) = \xi(P_0) \in M$ і тому $z(P_0) \in M^*$, що завершує доведення теореми.

МОДИФІКАЦІЯ УМОВИ ПОНТРЯГІНА

Нехай $\gamma(t, \tau)$, $\gamma: \Delta_\Theta \rightarrow L$, — деяка (майже всюди) обмежена вимірна за t і сумовна за τ , $\tau \in [0, t]$, для кожного $t > 0$ функція, яку називатимемо функцією зсуву, $\Delta_\Theta = \{(t, \tau): 0 \leq \tau \leq t \leq \Theta < \infty\}$, Θ — деяке позитивне число.

Позначимо $\xi(t) = \xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) = \pi g(t) + \int_0^t \gamma(t, \tau) d\tau$ і розглянемо для

$\tau \in [0, t]$, $t > 0$, $v \in V$ багатозначне відображення

$$\mathfrak{A}(t, \tau, v) = \{\alpha \geq 0: [W(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau)] \cap \alpha[M - \xi(t)] \neq \emptyset\}.$$

Якщо на множині $\Delta_\Theta \times V$ виконано умову $\mathfrak{A}(t, \tau, v) \neq \emptyset$, то розглянемо для $\tau \in [0, t]$, $t > 0$, $v \in V$ верхню та нижню скалярні розв'язувальні функції [16]

$$\alpha^*(t, \tau, v) = \sup\{\alpha: \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)\}, \quad \alpha_*(t, \tau, v) = \inf\{\alpha: \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)\}.$$

Відповідно до [19] багатозначне відображення $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ є замкнено-значним, $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірним за сукупністю (τ, v) , $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, а верхня та нижня розв'язувальні функції $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірні за сукупністю (τ, v) , $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, і тому вони суперпозиційовно вимірні [19], тобто $\alpha^*(t, \tau, v(\tau))$ і $\alpha_*(t, \tau, v(\tau))$ вимірні за τ , $\tau \in [0, t]$, для будь-якої вимірної функції $v(\cdot) \in V(\cdot)$, де $V(\cdot)$ — сукупність вимірних функцій $v(\tau)$, $\tau \in [0, +\infty]$, зі значеннями щодо V . Зазначимо також, що верхня розв'язувальна функція напівнеперервна зверху, а нижня — напівнеперервна знизу за змінної v і функції $\inf_{v \in V} \alpha^*(t, \tau, v)$ та

$\sup_{v \in V} \alpha_*(t, \tau, v)$ вимірні за τ , $\tau \in [0, t]$.

Лема 2. Для конфліктно-керованого процесу (1), (2) виконується умова 1 тоді і тільки тоді, коли існує функція зсуву $\gamma(t, \tau)$ така, що $0 \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)$ на множині $\Delta_\Theta \times V$.

Доведення. Нехай існує функція зсуву $\gamma(t, \tau)$ така, що $0 \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)$ на множині $\Delta_\Theta \times V$. Тоді маємо $0 \in W(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau)$, $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$, $v \in V$, тобто справедлива умова 1.

Виходячі з міркувань про зворотній порядок, дійдемо потрібного висновку.
Розглянемо множину

$$P_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \{t \in [0, \Theta]: \xi(t) \in M\}. \quad (5)$$

Якщо включення в фігурних дужках співвідношення (5) не виконується для жодних $t \in [0, \Theta]$, то покладемо $P_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \emptyset$.

Нехай для певної функції зсуву $\gamma(\cdot, \cdot)$ не виконано умову 1, множина $P_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не є порожньою і $P_* \in P_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$. Тоді з урахуванням леми 2, якщо $\mathfrak{A}(P_*, \tau, v)$ не є порожньою, $\alpha_*(P_*, \tau, v) = \inf \{\alpha: \alpha \in \mathfrak{A}(P_*, \tau, v)\} > 0$, $\tau \in [0, P_*]$, $v \in V$.

Умова 1 є ключовою умовою в першому прямому методі Понтрягіна. Сформулюємо модифіковану умову Понтрягіна.

Умова 2. Для деякого позитивного числа Θ і певної функції зсуву $\gamma(\cdot, \cdot)$ множина $P_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не є порожньою, $P_* \in P_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ і на множині $\Delta_\Theta \times V$ справедливі співвідношення $\mathfrak{A}(P_*, \tau, v) \neq \emptyset$, $\int_0^{P_*} \sup_{v \in V} \alpha_*(P_*, \tau, v) d\tau \leq 1$.

Теорема 2. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2), деякого позитивного числа Θ і певної функції зсуву $\gamma(\cdot, \cdot)$ множина $P_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не є порожньою, $P_* \in P_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$, виконана умова 2 і множина M є опуклою. Тоді гра може бути закінченою в момент P_* з використанням керування вигляду (4).

Доведення. Нехай $v(\tau)$ — довільний вимірний селектор компакта V , $\tau \in [0, P_*]$. Зазначимо спосіб вибору керування переслідуювачем.

Розглянемо для $v \in V$, $\tau \in [0, P_*]$ компактнозначне багатозначне відображення

$$U_*(\tau, v) = \{u \in U: \pi\Omega(P_*, \tau)\varphi(u, v) - \gamma(P_*, \tau) \in \alpha_*(P_*, \tau, v)[M - \xi(P_*)]\}.$$

З урахуванням властивостей параметрів процесу (1) і нижньої розв'язувальної функції $\alpha_*(P_*, \tau, v)$ компактнозначне відображення $U_*(\tau, v) \in \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірним [19] для $v \in V$, $\tau \in [0, P_*]$. Тому за теоремою про вимірний вибір селектора [26] багатозначне відображення $U(\tau, v)$ містить $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірний селектор $u_*(\tau, v)$, який є суперпозиційно вимірною функцією [19].

Покладемо керування першого гравця $u_*(\tau) = u_*(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0, P_*]$. З урахуванням формули (1) отримаємо

$$\pi z(P_*) = \xi(P_*) + \int_0^{P_*} (\pi\Omega(P_*, \tau)\varphi(u_*(\tau), v(\tau)) - \gamma(P_*, \tau)) d\tau. \quad (6)$$

За вибором керування і за визначенням моменту P_* маємо

$$0 \in M - \xi(P_*), \quad \int_0^{P_*} \alpha_*(P_*, \tau, v(\tau)) d\tau \leq \int_0^{P_*} \sup_{v \in V} \alpha_*(P_*, \tau, v) d\tau \leq 1,$$

$$\pi\Omega(P_*, \tau)\varphi(u_*(\tau), v(\tau)) - \gamma(P_*, \tau) \in \alpha_*(P_*, \tau, v(\tau))[M - \xi(P_*)].$$

Тоді з урахуванням леми 1 справедливе включення

$$\int_0^{P_*} [\pi\Omega(P_*, \tau)\varphi(u_*(\tau), v(\tau)) - \gamma(P_*, \tau)] d\tau \in M - \xi(P_*).$$

Таким чином, співвідношення (6) визначає

$$\pi z(P_*) \in \xi(P_*) + M - \xi(P_*) = M.$$

Отже, $z(P_*) \in M^*$, що завершує доведення теореми.

Наслідок. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2), деякого позитивного числа Θ і певної функції зсуву $\gamma(\cdot, \cdot)$ множина $P_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не є порожньою, $P_* \in P_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$, виконана умова 2 і множина M є опуклою. Тоді має місце нерівність

$$\mu_{M-\xi(P_*)} \left(\int_0^{P_*} [\pi\Omega(P_*, \tau)\varphi(u_*(\tau), v(\tau)) - \gamma(P_*, \tau)] d\tau \right) \leq \int_0^{P_*} \alpha_*(P_*, \tau, v(\tau)) d\tau,$$

де $\mu_X(f(t)) = \inf \{\mu \geq 0: f(t) \in \mu X\}$ — функціонал Мінковського, $X \in R^n$ — опуклий компакт, $0 \in X$, $f(t)$ — вимірна функція.

Доведення. За вибором керування в доведенні теореми 2 має місце включення

$$\pi\Omega(P_*, \tau)\varphi(u_*(\tau), v(\tau)) - \gamma(P_*, \tau) \in \alpha_*(P_*, \tau, v(\tau))[M - \xi(P_*)].$$

Тоді з урахуванням леми 1 справедливе включення

$$\int_0^{P_*} [\pi\Omega(P_*, \tau)\varphi(u_*(\tau), v(\tau)) - \gamma(P_*, \tau)] d\tau \in \int_0^{P_*} \alpha_*(P_*, \tau, v(\tau)) d\tau [M - \xi(P_*)].$$

Визначення функціоналу Мінковського дає необхідний результат.

МОДИФІКОВАНА СХЕМА МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Сформулюємо модифіковану схему методу розв'язувальних функцій.

Умова 3. Для деякого позитивного числа Θ на множині $\Delta_\Theta \times V$ мають місце співвідношення $\mathfrak{A}(t, \tau, v) \neq \emptyset$, $\int_0^t \sup_{v \in V} \alpha_*(t, \tau, v) d\tau < 1$ та справедливе включення

$$0 \in \bigcap_{v \in V} \{[W(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau)] - \sup_{v \in V} \alpha_*(t, \tau, v)[M - \xi(t)]\}.$$

Якщо для певної функції зсуву $\gamma(t, \tau)$ на множині Δ_Θ виконана умова 1, то за аналогією з лемою 2 виконано умову 3 і $\sup_{v \in V} \alpha_*(t, \tau, v) = 0$.

Розглянемо множину

$$T(g(t), \gamma(\cdot, \cdot)) = \left\{ \Theta \geq t \geq 0: \int_0^t \inf_{v \in V} \alpha^*(t, \tau, v) d\tau \geq 1 \right\}.$$

Якщо для деякого $\Theta \geq t > 0$ маємо $\alpha^*(t, \tau, v) \equiv +\infty$ за $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, то значення відповідного інтеграла в фігурних дужках природно вважатимемо $+\infty$ і $t \in T(g(t), \gamma(\cdot, \cdot))$. У випадку, коли нерівність не справджується для всіх $\Theta \geq t > 0$, покладемо $T(g(t), \gamma(\cdot, \cdot)) = \emptyset$.

Теорема 3. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2) і деякого позитивного числа Θ на множині Δ_Θ виконано умову 3, множина M є опуклою, для деякої функції зсуву $\gamma(t, \tau)$ множина $T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не є порожньою і $T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$. Тоді якщо $\xi(T) \notin M$, то гра може бути закінчена в момент T з використанням керування вигляду (3). Коли $\xi(T) \in M$, то $T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \subset P_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ і гра може бути закінчена в момент T з використанням керування вигляду (4).

Доведення теореми відповідно до [16]. Отже, якщо гра може бути закінчена за модифікованою схемою методу розв'язувальних функцій в класі стробоскопічних стратегій, то вона може бути закінчена в класі стробоскопічних стратегій згідно зі схемою прямого методу (теорема 2).

МОДЕЛЬНИЙ ПРИКЛАД

Нехай у просторі R^{2n} , $n \geq 2$, об'єкти записано рівняннями

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= u - v.\end{aligned}\tag{7}$$

Тут $a > 0$, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in R^{2n}$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} : u \in S_r^\rho \right\} \subset R^{2n}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} : v \in S_0^1 \right\} \subset R^{2n}$, $S_r^\rho \subset R^n$ — кільце з центром в нулі, зовнішнім радіусом ρ і внутрішнім радіусом r , $\rho > 1 \geq r \geq 0$. Термінальна множина $M^* = \{z: \|z_1\| \leq \varepsilon\}$, причому $M_0 = \{z: z_1 = 0\}$, $M = \{z: \|z_1\| \leq \varepsilon, z_2 = 0\}$. Тоді $L = \{z: z_2 = 0\} = \{R^n, 0\}$. Оператор ортогонального проєктування $\pi: R^{2n} \rightarrow L$ задається матрицею $\pi: \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, де 0 — нульова матриця порядку n . Оператор π виділяє із вектора z його першу компоненту, $\pi z = z_1$. Матриця A і фундаментальна матриця однорідної системи (7) e^{At} мають вигляд $A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e^{At} = \begin{pmatrix} E & tE \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Оскільки $u \in S_r^\rho$ і $v \in S_0^1$, то матимемо $\pi e^{At}U = tS_r^\rho$, $\pi e^{At}V = tS_0^1$ і $W(t) = \pi e^{At}U * \pi e^{At}V = t[S_r^\rho * S_0^1]$, де символ $*$ визначає геометричну різницю Мінковського [1]. Якщо $r > 0$, то умова Понтрягіна не виконується, оскільки $S_r^\rho * S_0^1 = \emptyset$.

Визначимо функцію зсуву $\gamma(t, \tau) \equiv 0$ і покладемо $\xi(t) = z_1 + tz_2$, $\varepsilon > \|\xi(t)\|$. Тоді багатозначне відображення $\mathfrak{U}(t, \tau, v)$ має вигляд:

$$\mathfrak{U}(t, \tau, v) = \{\alpha \geq 0: \alpha[\varepsilon S_0^1 - \xi(t)] \cap (t - \tau)[S_r^\rho - v] \neq \emptyset\}, \quad v \in S_0^1.$$

Вочевидь, що

$$\mathfrak{U}(t, \tau, v) \neq \emptyset.\tag{8}$$

Для $v \in S_0^1$ нижня розв'язувальна функція визначається зі співвідношення $\alpha_*(t, \tau, v) = \inf \{\alpha \geq 0: \alpha[\varepsilon S_0^1 - \xi(t)] \cap (t - \tau)[S_r^\rho - v] \neq \emptyset\}$.

Однак для $v \in S_0^r$ маємо

$$\begin{aligned}\alpha_*(t, \tau, v) &= \alpha_*^r(t, \tau, v) = \sup \{\alpha > 0: \alpha[\varepsilon S_0^1 - \xi(t)] \cap (t - \tau)[S_0^r - v] \neq \emptyset\} = \\ &= \sup \{\alpha > 0: \|(t - \tau)v - \alpha\xi(t)\| = (t - \tau)r + \alpha\varepsilon\}.\end{aligned}$$

Отже, отримаємо для $v \in S_0^r$

$$\alpha_*^r(t, \tau, v) = (t - \tau) \frac{-(v, \xi(t)) + r\varepsilon + \sqrt{[(v, \xi(t)) + r\varepsilon]^2 - (\varepsilon^2 - \|\xi(t)\|^2)(r^2 - \|v\|^2)}}{\varepsilon^2 - \|\xi(t)\|^2}.$$

Оскільки співвідношення $S_r^\rho * S_r^1 = \bigcap_{v \in S_r^1} [S_r^\rho - v] = S_0^{\rho-1}$ є справедливим, то для $v \in S_r^1$ маємо $\alpha_*(t, \tau, v) = \max_{v \in S_r^1} \alpha_*(t, \tau, v) = 0$. Отже, для $v \in S_0^1$ виконується рівність $\alpha_*(t, \tau, v) = \alpha_*^r(t, \tau, v)$ і водночас отримаємо рівність $\max_{v \in S_0^1} \alpha_*(t, \tau, v) = \max_{v \in S_0^r} \alpha_*^r(t, \tau, v) = \frac{2r(t - \tau)}{\varepsilon + \|\xi(t)\|}$, що досягається на векторі $v = -r \frac{\xi(t)}{\|\xi(t)\|}$. Покладемо

$\Theta(z) = \min \left\{ t \geq 0 : \int_0^t \max_{v \in S_0^1} \alpha_*(t, \tau, v) d\tau = 1 \right\}$. Отже, час $\Theta(z)$ — це найменший позитивний корінь рівняння $\frac{\varepsilon + \|\xi(t)\|}{r} = t^2$. Це рівняння за будь-якого z має скінченний позитивний корінь, оскільки для $t=0$ ліва частина рівняння більша за праву, а для $t \rightarrow +\infty$ ліва частина лінійно зростає, а права — зростає квадратично. Зокрема, для $z^0 = (z_1^0, 0)$ маємо $\Theta(z^0) = \sqrt{\frac{\varepsilon + \|z_1^0\|}{r}}$.

Обчислимо для початкового положення $z^0 = (z_1^0, z_2^0)$ множини

$$P_*(z^0) = \{t \in [0, \Theta(z^0)] : \varepsilon > \|z_1^0 + tz_2^0\|\}. \quad (9)$$

Отже, коли $r > 0$, то умова Понтрягіна не виконується, оскільки $W(t) = \pi e^{At} U * \pi e^{At} V = \varphi(t)[S_r^p * S_0^1] = \emptyset$. Але якщо параметри гри задовольняють співвідношення (9), то з урахуванням включення (8) виконуються умови теореми 2.

ВИСНОВКИ

Досліджено проблему зближення керованих об'єктів у ігрових задачах динаміки. Отримано достатні умови завершення гри за скінченний гарантований час у випадку, коли не виконується класична умова Понтрягіна. Замість селектора Понтрягіна, якого не існує, розглядається деяка функція зсуву. За її допомогою уведено спеціальне багатозначне відображення, яке генерує нижню розв'язувальну функцію. Остання відіграє вирішальну роль у формулюванні результату і дає змогу реалізувати побудову керування на основі теорем типу Філіппова–Кастенга. Запропоновано модифіковану схему першого прямого методу Понтрягіна, яка забезпечує успішне завершення конфліктно-керованого процесу в класі контркерувань. Для порівняння гарантованих часів уведено верхню розв'язувальну функцію та подано відповідну схему методу. Теоретичні результати проілюстровано на модельному прикладі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Т. 2. Москва: Наука, 1988. 576 с.
2. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. Киев: Наук. думка, 1992. 263 с.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. Москва: Наука, 1974. 455 с.
4. Isaacs R. Differential games. New York: J. Wiley and Sons, 1965. 416 p.
5. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. Москва: Наука, 1991. 216 с.
6. Melikyan A.A. Generalized characteristics of first order: Applications in optimal control and differential games. Boston: Birghauser, 1998. 385 p.
7. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. Москва: Наука, 1970. 420 с.
8. Пшеничный Б.Н. Линейные дифференциальные игры. *Автоматика и телемеханика*. 1968. № 1. С. 65–78.
9. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Springer Science and Business Media, 2013. 424 p.
10. Hajek O. Pursuit games. New York: Acad. Press, 1975. Vol. 12. 266 p.
11. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. Москва: Наука, 1981. 288 с.

12. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами. *Кибернетика*. 1976. № 3. С. 145–146.
13. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. Москва: Изд-во МГУ, 1996. 198 с.
14. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009. 266 с.
15. Chikri G.Ts. Principle of time stretching for motion control in condition of conflict. *Advanced control systems: Theory and application*. River publisher. 2021. P. 53–82.
16. Чикрій А.О., Раппопорт Й.С. Модифікації умови Понтрягіна у проблемі зближення конфліктно-керованих об'єктів. *Кибернетика та системний аналіз*. 2022. Т. 58, № 6. С. 95–105.
17. Чикрій А.О., Раппопорт Й.С. Модифікований метод розв'язувальних функцій в ігрових задачах зближення керованих об'єктів з різною інерційністю. *Кибернетика та системний аналіз*. 2023. Т. 59, № 2. С. 87–103.
18. Chikri A.A., Chikri V.K. Image structure of multivalued mappings in game problems of motion control. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48, N 3. P. 20–35.
19. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. Т. 48, № 5. С. 40–64.
20. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. Москва: Изд-во МГУ, 1984. 65 с.
21. Никольский М.С. Стробоскопические стратегии и первый прямой метод Л.С. Понтрягина в квазилинейных нестационарных дифференциальных играх преследования-убегания. *Probl. Control Inform. Theory*. 1982. Vol. 11, N 5. P. 373–377.
22. Локк А.С. Управление снарядами. Москва: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1957. 776 с.
23. Siouris G.M. Missile guidance and control systems. New York: Springer, 2004. 666 p.
24. Mordukhovich B.S. Variational analysis and generalized differentiation. Berlin; Heidelberg; New York: Springer. 2006. Basis Theory, I. Vol. 330. 582 p.; Applications, II. Vol. 331. 612 p.
25. Половинкин Е.С. Многозначный анализ и дифференциальные включения. Москва: Физматлит, 2014. 524 с.
26. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.
27. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. Москва: Мир, 1973. 470 с.
28. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. Москва: Наука, 1974. 480 с.
29. Aumann R.J. Integrals of set-valued functions. *J. Math. Anal. Appl.* 1965. Vol. 12. P. 1–12
30. Rappoport J.S. Stroboscopic strategy in dynamic game problems with terminal payoff function and integral constraints on controls. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55. P. 284–297. <https://doi.org/10.1007/s10559-019-00133-8>.
31. Rappoport J.S. The problem of approach of controlled objects in dynamic game problems with a terminal payoff function. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56. P. 820–834. <https://doi.org/10.1007/s10559-020-00303-z>.

A.A Chikrii, I.S. Rappoport

DIRECT METHOD FOR SOLVING GAME PROBLEMS OF APPROACH OF CONTROLLED OBJECTS

Abstract. The issue of approaching controlled objects in game problems of dynamics is analyzed. The sufficient conditions for the game termination in a finite guaranteed time are obtained in the case where the classical Pontryagin condition is not satisfied. Instead of the Pontryagin selection, which does not exist, some shift function is considered. With its help, special set-valued mapping is introduced, which generates a lower resolving function. The latter plays a decisive role in the formulation of the result and allows realizing a control construction based on theorems of the Filippov-Castaing kind. A modified scheme of Pontryagin's first direct method is proposed, which ensures the successful completion of the conflict-controlled process in the class of counter-controls. To compare the guaranteed times, the upper resolving function is introduced and the corresponding scheme of the method is presented. The theoretical results are illustrated with a model example.

Keywords: quasilinear differential game, multi-valued mapping, measurable selector, stroboscopic strategy, resolving function.

Надійшла до редакції 24.03.2023