



ПРОГРАМНО-ТЕХНІЧНІ КОМПЛЕКСИ

УДК 682.32+537.8

М.А. ПРИМІН

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *priminma@meta.ua*.

І.В. НЕДАЙВОДА

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *igorvlad63@meta.ua*.

АЛГОРИТМИ АНАЛІТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ МАГНІТОСТАТИКИ ДЛЯ ДЖЕРЕЛА СИГНАЛУ ДИПОЛЬНОЇ МОДЕЛІ

Анотація. Запропоновано чотири варіанти алгоритмів аналітичного розв'язання оберненої задачі магнітостатики для джерела поля дипольної моделі. Ці алгоритми ґрунтуються на використанні властивостей тензорів перших та других просторових похідних вектора магнітної індукції. На основі методу розв'язання задачі запропоновано варіанти просторових конфігурацій перетворювачів потоку СКВІД-магнітометричних систем та їхнє можливе розташування у просторі. Для всіх варіантів вимірювальних систем наведено результати чисельного моделювання розв'язання задачі локалізації у просторі джерела магнітного сигналу дипольної моделі.

Ключові слова: обернена задача, магнітостатика, СКВІД-сенсор, магнітометрична система, інформаційна технологія.

ВСТУП

Створення магнітометричних приладів на основі СКВІДів (SQUID — Superconducting QUantum Interference Device), що мають унікальну чутливість і точність, стимулювало дослідження задач просторового аналізу слабких магнітних полів [1, 2]. Важливим для розв'язання задач є інтерпретація даних вимірювань, яка потребує розроблення інформаційної технології (методів та алгоритмів) перетворення отриманої інформації для її зручного аналізу. Інакше кажучи, у дослідженнях магнітних сигналів носієм інформації про об'єкт та його характеристики є магнітне поле, а завданням інформаційної технології в практичних застосуваннях найчастіше є визначення та аналіз за результатами вимірювань місцезнаходження (координат) джерела поля (об'єкта) та його електромагнітних характеристик (наприклад, вектор магнітного моменту або просторовий розподіл струмів, що описують стан об'єкта). Таку задачу називають оберненою.

У цій статті розглянуто аналітичний метод розв'язання оберненої задачі для джерела магнітного поля дипольної моделі та деякі наслідки, що з нього випливають.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Система струмів в об'ємі V , який обмежено замкненою поверхнею S , створює в навколишньому просторі статичне магнітне поле, якщо:

1) повний струм системи відмінний від нуля (провідники зі струмом, електричні ланцюги тощо);

© М.А. Примін, І.В. Недайвода, 2023

2) за умови повного струму, що дорівнює нулю, відмінним від нуля є макроскопічний магнітний дипольний момент (феромагнітні тіла, тіла, що містять феромагнітні включення, або тіла, у яких виникає повний магнітний момент за наявності зовнішнього поля);

3) за умови повного струму та повного магнітного моменту, які дорівнюють нулю, відмінним від нуля є дипольний магнітний момент елементарної «магнітної» комірки.

Джерелами магнітного поля можуть бути також струми магнітогідродинамічного походження (завихрення, воронки тощо), які з'являються, наприклад, з переміщенням об'єкта в морській воді. Іонізоване під впливом реактивного двигуна повітря також є джерелом статичного магнітного поля.

Об'єкти, що рухаються в повітряному (водному) середовищі, стають електрично зарядженими за рахунок ударів по поверхні парів води, пилу, частинок льоду і, таким чином, створюють магнітні поля, які можна зареєструвати СКВІД-магнітометричною апаратурою. Оскільки згідно з результатами експериментів максимальні частоти зміни електромагнітного поля, що виникає, не перевищують 1000 Гц, для оброблення сигналів вимірювача з метою визначення місцезнаходження джерела поля розглянуті задачі потребують розв'язання оберненої задачі магнітостатики. Як обернену задачу в магнітостатиці розуміють знаходження просторового розподілу джерел поля за відомими (наприклад, вимірними) значеннями величин параметрів поля. Функціональні зв'язки між параметрами розподілу, а також типом джерел поля та вимірними значеннями величин поля вважаються невідомими і їх також необхідно визначити.

Розглянемо аналітичне розв'язання оберненої задачі у випадку, коли джерело сигналу можна апроксимувати магнітним диполем. Інакше кажучи, точки простору, де відоме або визначається магнітне поле $\mathbf{B}$, розташовані відносно джерела поля на відстанях r , що значно перевищують розміри джерела. Тоді вектор магнітної індукції у точці спостереження з радіусом-вектором $\mathbf{r}$ визначається за формулою [3]

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{3(\mathbf{M}\mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{M}r^2}{r^5} = \frac{\mu}{4\pi r^5} \begin{pmatrix} 3r_x^2 - r^2 & 3r_x r_y & 3r_x r_z \\ 3r_x r_y & 3r_y^2 - r^2 & 3r_y r_z \\ 3r_x r_z & 3r_y r_z & 3r_z^2 - r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де μ — магнітна проникність середовища у точці спостереження; $\mathbf{M}$ — повний магнітний момент системи струмів.

Цей вираз є справедливим для усіх класів джерел магнітного поля. Тому можна вважати, що незалежно від належності джерела сигналу до того чи іншого класу магнітне поле в точці простору з радіусом-вектором $\mathbf{r}$ створене дипольним джерелом (диполем) з магнітним моментом $\mathbf{M}$, розташованим в точці початку декартової системи координат XZY , та має вигляд (1).

У немагнітному, непровідному середовищі

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — базові вектори системи координат XZY .

Прямим диференціюванням (1) за просторовими координатами можна отримати співвідношення для перших та других похідних (формули (3)–(5) з [4])

вектора магнітної індукції магнітного поля в повітрі, які потрібні для аналізу задачі, а саме

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} = \frac{3\mu_0}{4\pi r^7} \begin{pmatrix} (3r^2 - 5r_x^2)r_x & (r^2 - 5r_x^2)r_y & (r^2 - 5r_x^2)r_z \\ (r^2 - 5r_x^2)r_y & (r^2 - 5r_y^2)r_x & -5r_x r_y r_z \\ (r^2 - 5r_x^2)r_z & -5r_x r_y r_z & (r^2 - 5r_z^2)r_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} = \frac{3\mu_0}{4\pi r^7} \begin{pmatrix} (r^2 - 5r_x^2)r_y & (r^2 - 5r_y^2)r_x & -5r_x r_y r_z \\ (r^2 - 5r_y^2)r_x & (3r^2 - 5r_y^2)r_y & (r^2 - 5r_y^2)r_z \\ -5r_x r_y r_z & (r^2 - 5r_y^2)r_z & (r^2 - 5r_z^2)r_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} = \frac{3\mu_0}{4\pi r^7} \begin{pmatrix} (r^2 - 5r_x^2)r_z & -5r_x r_y r_z & (r^2 - 5r_z^2)r_x \\ -5r_x r_y r_z & (r^2 - 5r_y^2)r_z & (r^2 - 5r_z^2)r_y \\ (r^2 - 5r_z^2)r_x & (r^2 - 5r_z^2)r_y & (3r^2 - 5r_z^2)r_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Обернену задачу для джерела поля дипольної моделі можна сформулювати так: за відомим (вимірним) в одній або декількох точках простору вектором магнітної індукції та його просторовими похідними знайти радіус-вектор цих точок у системі координат, що пов'язана з джерелом магнітного поля, а також дипольний магнітний момент джерела сигналу.

Алгоритм розв'язання оберненої задачі. Аналітичний розв'язок оберненої задачі для дипольного джерела отримаємо за допомогою математичного апарату власних векторів [5]. Спочатку покажемо, що тензори перших $\hat{D}_1$ і других $\hat{D}_2$ просторових похідних вектора $\mathbf{B}$ мають властивості, які дають змогу отримати повний аналітичний розв'язок поставленої задачі.

Отже, тензор $\hat{D}_1$ має вигляд:

$$\hat{D}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

де B_x , B_y , B_z — відповідні компоненти вектора $\mathbf{B}$.

Відомо, що у непровідному, немагнітному середовищі для вектора магнітної індукції виконуються умови (2). Це означає, що тензор перших просторових похідних вектора магнітної індукції $\hat{D}_1$ є симетричним і не має сліду. Інакше кажучи, з дев'яти елементів $\hat{D}_1$ незалежними є тільки п'ять — з них три недіагональні $\frac{\partial B_x}{\partial y}$, $\frac{\partial B_x}{\partial z}$, $\frac{\partial B_y}{\partial z}$ та два діагональні $\frac{\partial B_y}{\partial y}$, $\frac{\partial B_x}{\partial x}$. З симетрії тензора $\hat{D}_1$ та умови $\text{Tr}(\hat{D}_1) = 0$ випливає, що його власні значення λ_i ($i = 1, 2, 3$), які визначаються характеристичним рівнянням

$$\lambda^3 + \lambda(B_{xx}B_{yy} + B_{xx}B_{zz} + B_{yy}B_{zz} - B_{xy}^2 - B_{xz}^2 - B_{yz}^2) + B_{xx}B_{yz}^2 + B_{yy}B_{xz}^2 + B_{zz}B_{xy}^2 - 2B_{xy}B_{xz}B_{yz} - 2B_{xx}B_{yy}B_{zz} = 0, \quad (7)$$

де $B_{ij} = \frac{\partial B_i}{\partial r_j}$, дійсні та різні величини, а їхня сума дорівнює нулю ($\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$).

Це означає, що власні вектори $\mathbf{u}_i$ тензора $\hat{D}_1$,

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{yz}B_{xy} + (\lambda_i - B_{yy})B_{xz} \\ B_{xz}B_{xy} + (\lambda_i - B_{xx})B_{yz} \\ (B_{xx} - \lambda_i)(B_{yy} - \lambda_i) - B_{xy}^2 \end{bmatrix}, \quad i=1, 2, 3, \quad (8)$$

взаємно ортогональні:

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = 0.$$

Після нормування власні вектори можна використати як базис нової системи координат і у цьому новому базисі тензор $\hat{D}_1$ має діагональний вигляд:

$$\hat{D}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

а координати радіуса-вектора довільної точки простору у новій системі координат $(\xi_i, i=1, 2, 3)$ відповідають координатам радіуса-вектора цієї ж точки в декартовій системі координат XYZ $(\xi_j, j=x, y, z)$:

$$\begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 / \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2} & \alpha_2 / \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2} & \alpha_3 / \sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2} \\ \beta_1 / \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2} & \beta_2 / \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2} & \beta_3 / \sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2} \\ \gamma_1 / \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2} & \gamma_2 / \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2} & \gamma_3 / \sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

де $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ визначаються з (8).

Співвідношення (8)–(10) дають змогу отримати розв'язок задачі, якщо у довільній точці простору є відомими незалежні елементи тензора $\hat{D}_1$ і одна з компонентів вектора магнітної індукції, наприклад B_x . Тоді з (3) для $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}$ у новій системі координат, базисом якої є нормовані власні вектори $\hat{D}_1$, знаходимо вектор, пропорційний вектору $\mathbf{M}$:

$$\bar{\mathbf{M}} = \frac{3\mu}{4\pi r^4} \mathbf{M}, \quad \bar{M} = \frac{\lambda_1}{r^3} \begin{pmatrix} (r^2 - 5r_2^2 - 5r_3^2)r_1 \\ (r^2 - 5r_1^2)r_2 \\ (r^2 - 5r_2^2)r_3 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Напрямні косинуси радіуса-вектора $\mathbf{r}$ в новій системі координат отримаємо у вигляді

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{r_1}{r} = \cos(\theta), \quad n_2 = \sin(\theta), \quad n_3 = 0, \\ \sin^2 \theta &= \frac{\lambda_1 + 2\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad \bar{M}_1 = \lambda_1 \frac{5n_2^2 - 1}{1 + n_1^2} n_1, \\ \bar{M}_2 &= \lambda_1 \frac{1 - 5n_1^2}{1 + n_1^2} n_2, \quad \bar{M}_3 = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Із співвідношень (12) можна знайти $n_x, n_y, n_z, M_x, M_y, M_z$ у заданій системі координат XYZ , а потім визначити відстань r за виміряною компонентою B_x :

$$r = \frac{3B_x}{(3\bar{M}_x n_x + 3\bar{M}_y n_y + 3\bar{M}_z n_z)n_x - \bar{M}_x}, \quad (13)$$

що є повним аналітичним розв'язком оберненої задачі.

Алгоритм розв'язання задачі за відомими елементами тензора просторових похідних другого порядку вектора магнітної індукції. Розглянемо властивості тензора просторових похідних другого порядку вектора магнітної індукції:

$$\hat{D}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 B_x}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 B_x}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 B_x}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 B_x}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 B_x}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 B_x}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

У непровідному, немагнітному середовищі вектор магнітної індукції є аналітичною функцією координат. Оскільки для похідних другого порядку аналітичних функцій справедлива умова $\frac{\partial^2 f}{\partial r_i \partial r_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial r_j \partial r_i}$ ($i, j = x, y, z$), то $\hat{D}_2$ є симетричним. З симетричності і того, що слід тензора $\hat{D}_1$ дорівнює нулю, випливає, що слід $\hat{D}_2$ також дорівнює нулю.

Дійсно,

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (15)$$

Тому власні значення і власні вектори тензора $\hat{D}_2$ мають ті самі властивості, що й аналогічні величини для тензора $\hat{D}_1$. Отже, для визначення власних значень, власних векторів, а також матриці переходу з нової системи координат у задану (XYZ) можна використовувати співвідношення (7)–(10), якщо припустити, що $B_{ij} = \frac{\partial^2 B_x}{\partial r_i \partial r_j}$.

Покажемо, що перераховані властивості тензора $\hat{D}_2$ дають змогу знайти повний розв'язок оберненої задачі магнітостатики, якщо в довільній точці простору з радіусом-вектором $\mathbf{r}$ відомі незалежні елементи $\hat{D}_2$ похідних другого порядку x -ї компоненти вектора магнітної індукції, а також одне із значень перших просторових похідних того самого вектора, наприклад $\frac{\partial B_x}{\partial x}$.

Уведемо позначення

$$\overline{M} = \frac{3\mu_0}{4\pi r^5} \mathbf{M}$$

для вектора, пропорційного вектору магнітного моменту, отримаємо в новій системі координат

$$\overline{M} = -\frac{\lambda_1}{12 + 20n_1^4} \begin{pmatrix} -1 - 5n_1^2 + 5(7n_1^2 - 1) \\ -5n_1 n_2 (7n_1^2 - 3) \\ -5n_1 n_3 (7n_1^2 - 3) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Напрямні косинуси радіуса-вектора $\mathbf{r}$ у новій системі координат отримаємо у вигляді

$$(-1 - 5n_1^2 + 10n_1^4)\lambda_1 = (-3 - 5n_1^4)\lambda_2; \quad n_2 = 0; \quad n_3^2 = 1 - n_1^2; \quad (17)$$

$$(4 + 5n_1^2 - 5n_1^4)\lambda_1 = (-3 - 5n_1^4)\lambda_2; \quad n_2^2 = 1 - n_1^2; \quad n_3 = 0. \quad (18)$$

За знайденими в новій системі координат величинами $n_1, n_2, n_3, \bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$, використовуючи співвідношення переходу (10), отримаємо величини $n_x, n_y, n_z, M_x, M_y, M_z$ в заданій системі координат, а після врахування (3) отримаємо відстань до дипольного джерела:

$$r = \frac{\partial B_x}{\partial x} [(3 - 5n_x^2)n_x M_x + (1 - 5n_x^2)n_y M_y + (1 - 5n_x^2)n_z M_z]^{-1}, \quad (19)$$

що і дає повний розв'язок задачі.

Покажемо, що повний розв'язок оберненої задачі магнітостатики для дипольного джерела, аналогічний (17)–(19), існує, якщо в довільній точці простору з радіусом-вектором $\mathbf{r}$ вимірюють незалежні елементи матриці просторових похідних другого порядку y -ї або z -ї компонент вектора магнітної індукції та відмінну від нуля компоненту матриці перших похідних, наприклад $\frac{\partial B_y}{\partial y}$ або $\frac{\partial B_z}{\partial z}$.

У разі вимірювання $\frac{\partial^2 B_y}{\partial r_i \partial r_j}$ маємо

$$n_1^2 = 1 - n_2^2; (4 + 5n_2^2 - 5n_2^4)\lambda_2 = (-3 - 5n_2^4)\lambda_1; n_3 = 0; \quad (20)$$

$$n_1 = 0; (-1 - 5n_2^2 + 10n_2^4)\lambda_2 = (-3 - 5n_2^4)\lambda_1; n_3^2 = 1 - n_2^2; \quad (21)$$

$$\bar{M} = -\frac{\lambda_2}{12 + 20n_2^4} \begin{pmatrix} -5n_1 n_2 (7n_2^2 - 3) \\ 1 - 5n_2^2 + 5(7n_2^2 - 1)(1 - n_2^2) \\ -5n_1 n_3 (7n_2^2 - 3) \end{pmatrix}; \quad (22)$$

$$r = \frac{\partial B_y}{\partial y} [(1 - 5n_y^2)n_x M_x + (3 - 5n_y^2)n_y M_y + (1 - 5n_y^2)n_z M_z]^{-1}. \quad (23)$$

У разі вимірювання $\frac{\partial^2 B_z}{\partial r_i \partial r_j}$ розв'язок запишемо у вигляді

$$n_1^2 = 1 - n_3^2; (4 + 5n_3^2 - 5n_3^4)\lambda_3 = (-3 - 5n_3^4)\lambda_1, n_2 = 0; \quad (24)$$

$$n_1 = 0; (-1 - 5n_3^2 + 10n_3^4)\lambda_3 = (-3 - 5n_3^4)\lambda_1, n_2^2 = 1 - n_3^2; \quad (25)$$

$$\bar{M} = -\frac{\lambda_3}{12 + 20n_3^4} \begin{pmatrix} -5n_1 n_2 (7n_3^2 - 3) \\ -5n_1 n_3 (7n_3^2 - 3) \\ 1 - 5n_3^2 + 5(7n_3^2 - 1)(1 - n_3^2) \end{pmatrix}; \quad (26)$$

$$r = \frac{\partial B_z}{\partial z} [(1 - 5n_z^2)n_x M_x + (1 - 5n_z^2)n_y M_y + (3 - 5n_z^2)n_z M_z]^{-1}. \quad (27)$$

Отже, ми отримали чотири варіанти аналітичного розв'язку задачі відповідно до методу власних векторів, який вперше застосовано нами в роботі [4].

Алгоритм оброблення інформації у загальному вигляді складається з трьох послідовних етапів:

- 1) розрахунок $\lambda_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ та елементів матриці переходу;
- 2) знаходження параметрів джерела магнітного поля $n_1, n_2, n_3, \bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3, n_x, n_y, n_z, M_x, M_y, M_z$;
- 3) обчислення відстані до джерела поля.

Зазначимо деякі особливості алгоритму. Під час опису методу позначення для вимірюваних характеристик вибирають таким чином, щоб співвідношення (7)–(10) для визначення власних значень, власних векторів та матриці переходу

були загальними для всіх чотирьох розв'язків. Це означає, що реалізація першого етапу не залежить від режиму вимірювань параметрів магнітного поля (вимірюють елементи $\hat{D}_1$ або одного з тензорів $\hat{D}_2$), є універсальною і може бути зафіксованою програмними чи апаратними засобами.

Оскільки вектори $\mathbf{n}$ та $\mathbf{M}$ у новій системі координат є функціями лише власних значень, то для визначення параметрів об'єкта (етап 2) виміряні характеристики магнітного поля безпосередньо не використовують.

Для обчислення відстані до джерела використовують характеристики магнітного поля, ступінь однорідності яких на одиницю менший, ніж у характеристик, що застосовуються для визначення напрямних косинусів і вектора $\mathbf{M}$; отже, автоматично зникає неоднозначність, пов'язана з «масштабуванням» характеристик магнітного поля. Цим зумовлено і той факт, що для визначення відстані до об'єкта з чотирьох розв'язків для векторів $\mathbf{n}$ та $\mathbf{M}$ у більшості випадків фізично можливими залишаються лише два, які є симетричними щодо початку координат (два інші призводять до від'ємних значень відстані).

2. АЛГОРИТМИ ОТРИМАННЯ ВИХІДНИХ ДАНИХ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ РОЗТАШУВАННЯ ДЖЕРЕЛА МАГНІТНОГО СИГНАЛУ

Розв'язок оберненої задачі магнітостатики для дипольного джерела поля отримано аналітично з використанням апарату власних векторів. У такому підході передбачається відмова від довільного вибору системи координат (у заданій системі координат задача не має аналітичного розв'язку); переходу у нову систему координат, пов'язану з базисними векторами, що збігаються у напрямку з власними векторами тензора просторових похідних вектора магнітної індукції; розв'язання задачі у новій системі координат та «поверненні» розв'язків у задану (лабораторну) систему координат за допомогою оператора переходу. Для отримання повного аналітичного розв'язку оберненої задачі магнітостатики в такій постановці (джерело — магнітний диполь) необхідна магнітометрична система, яка давала би змогу вимірювати одночасно в одній точці спостереження всі незалежні елементи D_1 (і одну зі складових вектора магнітної індукції) або D_{2i} та одну з відповідних перших похідних. Отже, для локалізації дипольного джерела сигналу потрібна наявність 6-канальної магнітометричної системи або даних вимірювання, з використанням яких можна отримати незалежні елементи тензора просторових похідних D_1 або п'ять незалежних елементів одного з тензорів D_{2i} і відповідну першу похідну.

Зауважимо, що під час виконання вимірювань магнітне поле реєструють СКВІД-сенсором не безпосередньо, а з використанням петлі з надпровідного дроту — трансформатора (антени або перетворювача) магнітного потоку. Розглянемо задачу, де джерело вимірюваного поля є «зовнішнім» і не може бути за екрановано. У цьому випадку основним методом боротьби з завадами є використання приймальної котушки трансформатора потоку у вигляді градієнтометра. Інакше кажучи, антена СКВІД-сенсора являє собою набір ідентичних витків з надпровідного дроту, розташованих на деякій відстані один від одного і з'єднаних назустріч один одному. Магнітне поле від «далеких» джерел (зокрема, геомагнітне поле) є однорідним і, отже, створює у витках магнітні потоки, однакові за величиною і протилежні за напрямком. Поле «близьких» джерел утворює різні потоки через витки і, отже, ненульовий повний потік, який і фіксується СКВІД-магнітометричною системою. Для розв'язання конкретної задачі магнітометрична система може містити, наприклад, тільки багатоканальний вимірювач в одній точці спостереження або трикомпонентні чи інші вимірювачі в кількох точках простору; вимірювачами можуть бути градієнтометри першого або другого порядку тощо.

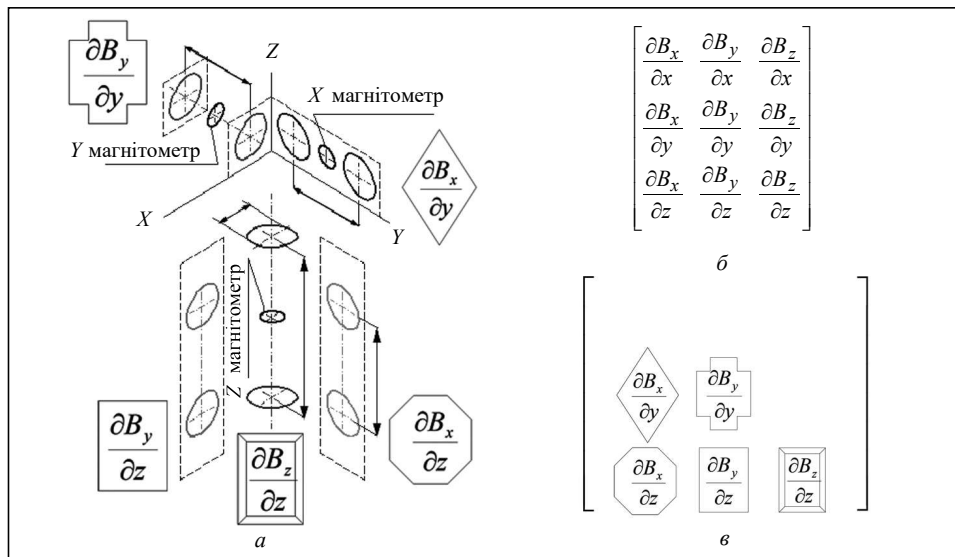


Рис. 1. Варіант просторової конфігурації перетворювачів магнітного потоку СКВІД-магнітометричної системи (а), просторові похідні вектора магнітної індукції, необхідні для розв'язання задачі (б) і вимірювані величини магнітного поля (в)

Вважатимемо, що початок декартової системи координат XYZ знаходиться в об'ємі джерела магнітного сигналу, а напрямок осі OZ збігається з напрямком нормалі до поверхні площини вимірювань. Тоді основні просторові конфігурації дріотяних антен (трансформаторів магнітного потоку) СКВІД-вимірювальних каналів можна однозначно прив'язати до системи координат. На рис. 1 показано один варіант компонування перетворювачів магнітного потоку СКВІД-магнітометричної системи, робота якої дає змогу зареєструвати всі незалежні елементи тензора перших просторових похідних вектора магнітної індукції, необхідних для розв'язання оберненої задачі для дипольного джерела сигналу.

Згідно з аналітичним розв'язанням оберненої задачі магнітостатики у табл. 1 наведено можливі типи вимірювальних систем та розташування перетворювачів магнітного потоку (антен) у заданих точках простору. Реєстрація сигналу в цих точках уможливилує розв'язання оберненої задачі для дипольного джерела поля. При цьому як вимірювачі сигналу можна використовувати градієнтметри лише однієї (для кожного типу) проєкції вектора магнітної індукції.

На рис. 2 показано (починаючи з вимірювальної системи D -типу) просторову конфігурацію перетворювачів магнітного потоку для реєстрації похідних вектора магнітної індукції прямокутної системи координат і розташування у просторі відповідних вимірювальних систем.

У табл. 2 наведено результати чисельного моделювання розв'язання оберненої задачі для всіх типів вимірювальних систем з табл. 1. Джерело магнітного поля має магнітний момент $\mathbf{M} = (0.2; 0.4; 1.0) \cdot 10^4 \text{ A} \cdot \text{m}^2$, радіус-вектор точки спостереження дорівнює $\mathbf{r} = (12, 16, 20) \text{ м}$, відстань між вимірювачами для кожного типу систем $L = 1 \text{ м}$, а співвідношення сигнал/завада стає і дорівнює 25.

До висновку про точність результатів розв'язання оберненої задачі, наведених у табл. 2, можна дійти, враховуючи такі фактори.

— Вимірювання других похідних магнітного поля потребує більш високого ступеня балансу перетворювачів магнітного потоку.

— Обчислення похідних другого порядку за результатами вимірювань перших похідних може бути менш точним, ніж їхнє пряме вимірювання.

Таблиця 1

Типи вимірювальних систем	Вимірювані параметри	Обчислені параметри магнітного сигналу об'єкта
<i>A</i>	$\partial^2 B_x / \partial x^2, \partial^2 B_x / \partial x \partial y, \partial^2 B_x / \partial y^2, \partial^2 B_x / \partial x \partial z, \partial^2 B_x / \partial y \partial z, \partial B_x / \partial x$	Усі необхідні величини параметрів виміряно в одній точці простору
<i>B</i>	$\partial^2 B_y / \partial x^2, \partial^2 B_y / \partial x \partial y, \partial^2 B_y / \partial y^2, \partial^2 B_y / \partial x \partial z, \partial^2 B_y / \partial y \partial z, \partial B_y / \partial y$	Усі необхідні величини параметрів виміряно в одній точці простору
<i>C</i>	$\partial^2 B_z / \partial x^2, \partial^2 B_z / \partial x \partial y, \partial^2 B_z / \partial y^2, \partial^2 B_z / \partial x \partial z, \partial^2 B_z / \partial y \partial z, \partial B_z / \partial z$	Усі необхідні величини параметрів виміряно в одній точці простору
<i>D</i>	$(\partial B_x / \partial x, \partial B_x / \partial y, \partial B_x / \partial z)_{1,2,3,4}, (\partial B_x / \partial x)_5$	$B_{xx} = [(\partial B_x / \partial x)_3 - (\partial B_x / \partial x)_4] / 2L,$ $B_{xy} = [(\partial B_x / \partial y)_3 - (\partial B_x / \partial y)_4] / 2L,$ $B_{xz} = [(\partial B_x / \partial z)_3 - (\partial B_x / \partial z)_4] / 2L,$ $B_{yy} = [(\partial B_x / \partial y)_1 - (\partial B_x / \partial y)_2] / 2L,$ $B_{yz} = [(\partial B_x / \partial z)_1 - (\partial B_x / \partial z)_2] / 2L$
<i>E</i>	$(\partial B_y / \partial x, \partial B_y / \partial y, \partial B_y / \partial z)_{1,2,3,4}, (\partial B_y / \partial y)_5$	$B_{xx} = [(\partial B_y / \partial x)_3 - (\partial B_y / \partial x)_4] / 2L,$ $B_{xy} = [(\partial B_y / \partial y)_3 - (\partial B_y / \partial y)_4] / 2L,$ $B_{xz} = [(\partial B_y / \partial z)_3 - (\partial B_y / \partial z)_4] / 2L,$ $B_{yy} = [(\partial B_y / \partial y)_1 - (\partial B_y / \partial y)_2] / 2L,$ $B_{yz} = [(\partial B_y / \partial z)_1 - (\partial B_y / \partial z)_2] / 2L$
<i>F</i>	$(\partial B_z / \partial x, \partial B_z / \partial y, \partial B_z / \partial z)_{1,2,3,4}, (\partial B_z / \partial z)_5$	$B_{xy} = [(\partial B_z / \partial x)_1 - (\partial B_z / \partial x)_2] / 2L,$ $B_{xz} = [(\partial B_z / \partial x)_3 - (\partial B_z / \partial x)_4] / 2L,$ $B_{yy} = [(\partial B_z / \partial y)_1 - (\partial B_z / \partial y)_2] / 2L,$ $B_{yz} = [(\partial B_z / \partial y)_3 - (\partial B_z / \partial y)_4] / 2L,$ $B_{zz} = [(\partial B_z / \partial z)_3 - (\partial B_z / \partial z)_4] / 2L$
<i>G</i>	$(\partial B_x / \partial x, \partial B_x / \partial y, \partial B_x / \partial z, \partial B_y / \partial y, \partial B_y / \partial z)_{1,2,3,4}, (\partial B_x / \partial x)_5$	Тип <i>D</i> + тип <i>E</i>
<i>H1</i>	$(\partial B_x / \partial x)_{1,2,3}, (\partial B_x / \partial x, \partial B_x / \partial y)_{4,5,6,7}$	$B_{xx} = [(\partial B_x / \partial x)_1 - (\partial B_x / \partial x)_3] / 2L,$ $B_{xy} = [(\partial B_x / \partial x)_4 - (\partial B_x / \partial x)_5] / 2L,$ $B_{xz} = [(\partial B_x / \partial x)_6 - (\partial B_x / \partial x)_7] / 2L,$ $B_{yy} = [(\partial B_x / \partial y)_4 - (\partial B_x / \partial y)_5] / 2L,$ $B_{yz} = [(\partial B_x / \partial y)_6 - (\partial B_x / \partial y)_7] / 2L$
<i>H2</i>	$(\partial B_y / \partial x)_{1,3}, (\partial B_y / \partial x, \partial B_y / \partial y)_{4,5,6,7}, (\partial B_y / \partial y)_2$	$B_{xx} = [(\partial B_y / \partial x)_1 - (\partial B_y / \partial x)_3] / 2L,$ $B_{xy} = [(\partial B_y / \partial x)_4 - (\partial B_y / \partial x)_5] / 2L,$ $B_{xz} = [(\partial B_y / \partial x)_6 - (\partial B_y / \partial x)_7] / 2L,$ $B_{yy} = [(\partial B_y / \partial y)_4 - (\partial B_y / \partial y)_5] / 2L,$ $B_{yz} = [(\partial B_y / \partial y)_6 - (\partial B_y / \partial y)_7] / 2L$

— У вимірювальних системах *D, E, F* СКВІД-градієнтометри розташовані в одній площині, що є важливим для їхнього місцезнаходження стосовно поверхні землі.

Нехай, наприклад, алгоритм вимірювань передбачає вимірювання просторових похідних компонент *x* або *y* вектора **B** у точках простору, розташування яких показано в табл. 1. Тоді за класифікацією табл. 1 можна бачити, що тип вимірювальної системи *G* являє собою два різних алгоритми *D*, а саме

$$1) \left(\frac{\partial B_x}{\partial x}, \frac{\partial B_x}{\partial y}, \frac{\partial B_x}{\partial z} \right)_{3,4}; \left(\frac{\partial B_x}{\partial y}, \frac{\partial B_x}{\partial z} \right)_{1,2}; \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \right)_5;$$

$$2) \left(\frac{\partial B_x}{\partial x}, \frac{\partial B_x}{\partial y}, \frac{\partial B_x}{\partial z} \right)_{7,8}; \left(\frac{\partial B_x}{\partial y}, \frac{\partial B_x}{\partial z} \right)_{5,6}; \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \right)_2.$$

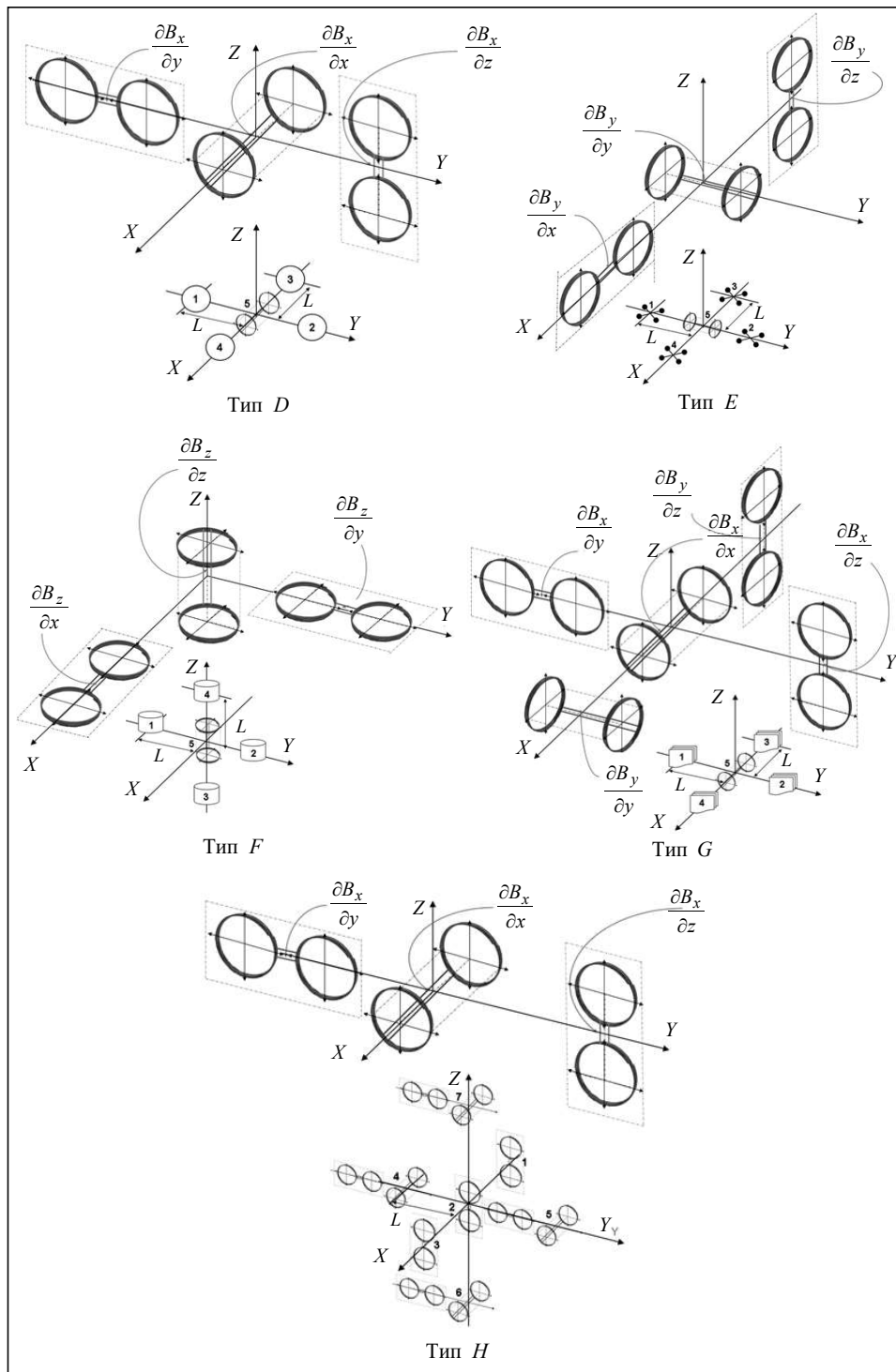


Рис. 2. Варіанти розташування у просторі типів вимірювальних систем та конфігурація перетворювачів магнітного потоку градієнтметрів для реєстрації величин параметрів магнітного поля згідно з табл. 1

Якщо формувати «решітку» (як на рис. 3) з елементарних вимірювальних систем, наведених в табл. 1, то можна синтезувати магнітометричну систему, яка складатиметься з $W_x \cdot W_y$ векторних градієнтметрів (W_x і W_y — кількість рядів прямокутної решітки, паралельних осям OX і OY відповідно).

Таблиця 2

Тип вимірювальних систем	Похибки чисельного моделювання алгоритмів вимірювань за табл. 1 (%)					
	Δx	Δy	Δz	ΔM_x	ΔM_y	ΔM_z
A	0.12	0.41	1.32	2.32	6.73	8.73
B	0.83	0.52	1.41	5.74	1.92	6.75
C	2.15	1.04	0.61	4.11	1.17	1.12
D	0.89	0.51	1.4	4.12	7.43	8.83
E	0.96	0.71	1.37	11.21	2.91	4.42
F	1.11	1.21	1.02	17.12	3.83	3.20
H1	1.04	3.97	2.97	2.49	3.61	13.26
H2	2.74	1.14	1.04	12.28	4.16	4.39

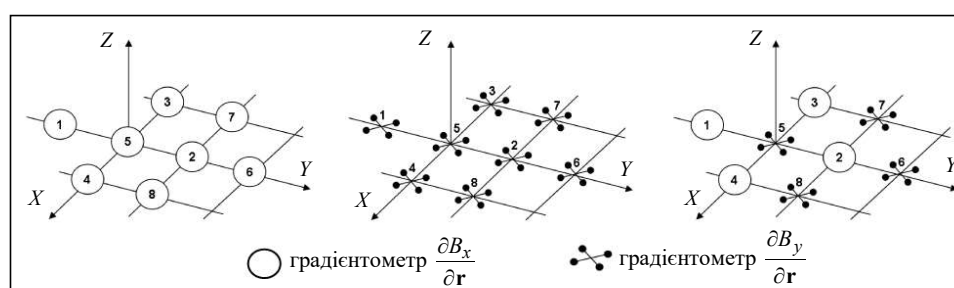


Рис. 3. Варіанти розташування вимірювальних систем у просторі

Такий підхід дає змогу підвищити надійність роботи всієї вимірювальної системи, оскільки вихід з ладу одного або кількох вимірювачів не має негативних наслідків для розв'язання задачі локалізації об'єкта за даними вимірювань його магнітного поля.

ВИСНОВКИ

Розроблений аналітичний метод розв'язання оберненої задачі магнітостатики і алгоритми перетворення інформації в магнітометричних системах можуть слугувати і вже слугують теоретичною базою для створення магнітометричних комплексів різноманітного призначення [6–9]: СКВІД-магнітокардіографія для ранньої діагностики найбільш поширених і тяжких захворювань в кардіології; СКВІД-магнітометричні комплекси для досліджень в біології (контроль доставлення ліків за допомогою спеціальних наноконструкцій до визначених органів), розв'язання задач пошуку магнітних аномалій під землею, вивчення магнітних властивостей матеріалів тощо. Застосування нових аналітичних методів розв'язання оберненої задачі дає змогу обґрунтувати необхідні вимірювальні ресурси (визначити технічні засоби) для виявлення і локалізації джерела поля (об'єкта), отримати результат за час, близький до реального. На основі аналітичного методу розв'язання оберненої задачі магнітостатики можна розробляти нові (з урахуванням заданих вимог чи обмежень) алгоритми отримання вихідних даних і тим самим впливати на склад та зміст технічних засобів. Це уможливило зміну традиційного уявлення про взаємозв'язок «технічні засоби» — «програмне забезпечення» — «за-

дача» і розгляд його в такій послідовності: «задача» — «метод розв'язання і програмне забезпечення» — «технічні засоби».

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Clarke J., Braginski A.I. SQUID handbook. Vol. I. Berlin: Wiley-VCH 2006; Vol. II. Weinheim: Wiley-VCH. 2004. 634 p. <https://doi.org/10.1002/3527603646>.
2. Weinstock H. SQUID sensors: Fundamentals, fabrication and applications. *NATO ASI Series. Series E: Applied Sciences*. 1995. Vol. 329. 703 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-5674-5>.
3. Тамм И.Е. Основы теории электричества. Москва: Наука, 1976. 614 с.
4. Примин М.А., Гуменюк-Сычевский В.И., Недайвода И.В. Методы и алгоритмы локализации источника магнитного поля. Київ: Наук. думка, 1992. 92 с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Москва: Наука, 1968. 720 с.
6. Primin M.A., Nedaivoda I.V., Maslennikov Yu.V., Gulyaev Yu.V. Software for the magnetocardiographic complex for the early diagnostics and monitoring of heart diseases. *J. Commun. Technol. Electron.* 2010. Vol. 55, N 10. P. 1169–1186. <https://doi.org/10.1134/S1064226910100116>.
7. Voitovych I.D., Primin M.A., Sosnytsky V.N. Application of SQUIDS for registration of biomagnetic signals. *Low Temp. Phys.* 2012. Vol. 38, N 4. P. 311–320. <https://doi.org/10.1063/1.3699954>.
8. Primin M.A., Nedayvoda I.V. Method and algorithm for obtaining elements of the tensor of spatial derivatives of the magnetic induction vector in the problem of magnetic anomalies search. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, N 2. P. 336–346. <https://doi.org/10.1007/s10559-019-00139-2>.
9. Primin M.A., Nedayvoda I.V. Non-contact analysis of magnetic fields of biological objects: Algorithms for data recording and processing. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56, N 5. P. 848–862. <https://doi.org/10.1007/s10559-020-00305-x>.

M. Primin, I. Nedayvoda

ALGORITHMS FOR THE ANALYTICAL SOLUTION OF THE MAGNETOSTATICS INVERSE PROBLEM FOR THE SIGNAL SOURCE OF THE DIPOLE MODEL

Abstract. Four variants of algorithms of the analytical solution of the magnetostatics inverse problem for the dipolar model of field source are proposed. The solution algorithms are based on the properties of the tensors of the first and second spatial derivatives of the magnetic induction vector. Based on the method of solving the problem, variants of spatial configurations of flux transformers of SQUID magnetometric systems and their possible spatial location are proposed. For all variants of measuring systems, the results of numerical simulation of the solution to the problem of spatial localization of the dipolar source of the magnetic signal are presented.

Keywords: inverse problem, magnetostatic, SQUID sensor, magnetometric system, information technology.

Надійшла до редакції 24.04.2023