

М-ОЦІНКИ: ОГЛЯД ТА ЗАСТОСУВАННЯ ДЛЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ЗА УМОВ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ¹

Анотація. Розглянуто еволюцію методу робастних оцінок, зокрема основні концепції методів М-оцінок та їхні переваги під час роботи з даними, що містять статистичні викиди. Проведено порівняння методів М-оцінок Хубера, Хампела та методу біквадратних ваг Тьюкі на реальних економічних даних регіонів України. Отримано емпіричне підтвердження ефективності їхнього застосування. Результати порівняння всіх побудованих моделей свідчать про суттєве зміщення оцінок параметрів у разі застосування підходу «наївного» видалення статистичних викидів. На основі побудованих робастних моделей можна з більшою точністю порівняти регіони країни за ефективністю факторів праці та капіталу та відповідно визначити пріоритетність інвестицій, які більшою мірою стимулюватимуть економічний розвиток регіону.

Ключові слова: децентралізація, прийняття рішень, М-оцінки, регіональний розвиток, робастність, невизначеність.

ВСТУП

М-оцінки та їхнє застосування є досить ефективним аналітичним методом, який науковці використовують у своїх емпіричних дослідженнях. Цей метод дає змогу отримати більш точні та стійкі оцінки ключових параметрів моделі навіть за наявності статистичних викидів (outliers) та спостережень з аномальними значеннями, які значно зміщують оцінки, отримані традиційним методом найменших квадратів (МНК) (ordinary least squares). Звичним підходом аналітиків-практиків є видалення спостережень, значення яких є статистичними викидами. Проте цей підхід не завжди є виправданим. По-перше, внаслідок видалення частини спостережень втрачається частина реального сигналу від даних, а відповідно погіршується якість побудованих моделей. По-друге, сама кількість спостережень, доступна досліднику для аналізу, може бути досить обмеженою. Наприклад, можуть бути наявними лише чотири щоквартальних спостереження протягом року для кожного з близько десяти адміністративних районів. Для статистичної значущості побудованих моделей потрібно щонайменше 30 точок даних. Відповідно, у зазначеній ситуації потрібно застосувати кращий метод, ніж «наївне» видалення викидів. На сьогодні розроблено методи оцінювання, які мають майже таку саму ефективність, як МНК (на очищених від статистичних викидів даних) і водночас проявляють високу стійкість до викидів у разі їхнього застосування на неочищених наборах даних. У цій статті наведено короткий огляд еволюції методу робастних оцінок та проведено аналіз на реальних економічних даних регіонів України з порівнянням результатів застосування методів М-оцінок Хубера [1], Хампела [2], та методу біквадратних ваг Тьюкі. Для аналізу та моделювання використано мову програмування R та середовище розробки RStudio [3].

ОГЛЯД МЕТОДІВ М-ОЦІНОК

Загалом, є декілька підходів до знаходження статистично стійких значень параметрів моделей, однак найчастіше використовують саме метод зважених

¹ Роботу виконано за часткової підтримки Національного фонду досліджень України. Грант № 2020.02/0121.

найменших квадратів. Він ґрунтується на фундаментальному припущенні про те, що під час оцінювання параметрів моделі відповідні помилки мають розподіл, максимально наближений до нормального. Модель нормального розподілу ґрунтовно розвинено у праці англійського математика французького походження А. де Муавра [4]. Далі основні результати узагальнено французьким математиком та астрономом П.-С. Лапласом. На сьогодні нормальний розподіл відомий як розподіл Гауса. Він має зрозумілі властивості, є загальноприйнятим і його просто обчислити. Зокрема, якщо середнє та дисперсію вибірки спостережень визначають, спираючись на концепції варіаційного числення, можна довести, що інформація щодо інших параметрів розподілу не потрібна. Корисною властивістю є те, що вибірка зі збільшенням кількості спостережень, навіть тих, що включають в себе достатньо волатильні значення, наближається до нормального розподілу (центральна гранична теорема). Та й загалом, саму волатильність на вибірках з великою кількістю спостережень можна добре описати нормальним розподілом.

Власне, через те, що нормальний розподіл є загальноприйнятим, науковці широко застосовують метод зважених найменших квадратів. Проте американський математик та статистик Дж. Тьюкі на початку 60-х рр. XX ст. зазначив, що навіть у тому разі, коли більшість даних узгоджуються з нормальним розподілом, припущення про нормальність розподілу можуть бути порушені наявністю статистичних викидів, що призводить до слабких та зміщених оцінок [5]. Дж. Тьюкі на різних наборах даних продемонстрував, що багато підходів статистичної оцінки втрачали свою оптимальність, якщо замість чистої вибірки з нормальним розподілом оцінку проводили на вибірках із доданими високоволатильними значеннями. Варто зауважити, що потребу в очищенні вибірки від статистичних викидів перед проведенням оцінювання параметрів передбачив ще на початку XIX ст. автор методу найменших квадратів А.-М. Лежандр.

Від початку 60-х років XX ст. науковці дедалі частіше наголошують на потребі у розробленні робастних методів оцінювання. Джон Тьюкі в 1962 р. опублікував статтю [6], в якій є відома фраза «Нам варто вирішити давно відому проблему новою більш реалістичною парадигмою» («We need to tackle old problems in more realistic framework»). Відтак зароджується нова галузь математичної статистики — робастна статистика. Її фундаментом є праці Б. Гріна та Дж. Тьюкі [5], П. Хубера [7], та докторська дисертація Ф. Хампела [8].

Вперше термін «робастність» уведено у праці Дж. Бокса в 1953 р. [9]. Концепція робастності залишається центральною і для сучасної статистики. Її можна розуміти як «нечутливість до невеликих відхилень від ідеалізованих гіпотез» [10]. Власне, саме незначні реалістичні відхилення від припущень щодо ідеальності розподілу дають змогу будувати достатньо надійні працюючі моделі, що й узагальнено у відомій цитаті Дж. Бокса «Всі моделі неправильні, але деякі з них корисні» («All models are wrong, some are useful»).

Незважаючи на існування багатьох класів робастних оцінок, у дослідженнях найчастіше застосовують L-, R- та M-оцінки. L-оцінки є лінійними комбінаціями порядкових статистик, R-оцінки враховують ранг залишків, M-оцінки узагальнюють оцінки максимальної ймовірності. M-оцінки більш складно обчислювати, проте вони мають фіксований профіль функції оцінки. Завдяки цьому вони є більш ефективними у застосуванні, ніж L- та R-оцінки, які доцільно використовувати у непараметричних статистичних підходах. До того ж, основною перевагою M-оцінок є те, що розв'язання проблеми статистичних викидів у даних та побудову регресійної моделі здійснюють одночасно на відміну від послідовних підходів. У разі застосування останніх спочатку будують регресійну модель, а потім вносять коригування, виходячи з аналізу залишків. M-оцінки є робастними через притаманну їм математичну структуру,

яка забезпечує меншу чутливість статистичної оцінки до випадкових відхилень. Отже, застосовуючи М-оцінки, можна побудувати достатньо точну регресійну модель, навіть апіорі нічого не знаючи про наявність статистичних викидів у даних чи їхній розподіл, відмінний від нормального. У будь-якому разі після етапу моделювання завжди можна проаналізувати залишки та ступінь відхилення від очікуваного розподілу. Метод робастних М-оцінок успішно застосовують як для оцінювання параметрів, так і для верифікації ключових метрик наборів даних у галузі економіки, будівництва, астрономії, біомедицини.

Метод М-ваг, які отримують шляхом мінімізації функції, що зростає повільніше, ніж традиційна функція найменших квадратів, запропонував П. Хубер для зменшення впливу викидів під час побудови регресійних моделей [10]. В основу методу М-оцінок покладено мінімізацію певної функції залишків. Робастність підходу залежить від вибору вагової функції. У разі традиційного підходу МНК параметри коефіцієнтів [11] отримують шляхом мінімізації суми квадратів залишків з використанням методу найбільшої ймовірності:

$$\min \sum_{i=1}^n (r_i)^2. \quad (1)$$

Згідно з підходом М-оцінок, запропонованим П. Хубером, функцію (1) заміняють функцією, яка зростає повільніше і стає цільовою функцією:

$$\min \sum_{i=1}^n \rho(r_i). \quad (2)$$

Функція (2) є неперервною, диференційовною та набуває додатних значень. Вона має такі властивості:

$$\rho(r_i) = \rho(-r_i), \quad (3)$$

$$\rho(r_i) \geq \rho(r_j) \text{ для } |r_i| \geq |r_j|. \quad (4)$$

З похідної цільової функції за коефіцієнтами $\hat{\beta}$ отримують скорингову функцію ψ . Прирівнявши її до 0, отримують рівняння для оцінки коефіцієнтів регресії:

$$\sum_{i=1}^n \psi(r_i) = 0. \quad (5)$$

Далі отримують функцію ваг шляхом ділення скорингової функції на відповідні залишки:

$$\omega(r_i) = \frac{\psi(r_i)}{r_i}. \quad (6)$$

За припущення $\omega_i = \omega(r_i)$ рівняння (5) можна представити у такому вигляді:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(r_i) x_i' = 0. \quad (7)$$

Обчислення М-оцінок здійснюють ітеративним методом. Найчастіше використовують метод ітеративно перезважених найменших квадратів (iterated re-weighted least squares, IWLS).

Цільовою функцією у разі застосування методу М-оцінок Хампела є кусково-лінійна функція (трикомпонентний повторно спадний оцінювач), задана такою формулою [12]:

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{r^2}{2} & \text{для } |r| \leq a, \\ a|r| - \frac{1}{2}a^2 & \text{для } a < |r| \leq b, \\ ab - \frac{a^2}{2} + \frac{a(c-b)}{2} \left[1 - \left(\frac{c-|r|}{c-b} \right)^2 \right] & \text{для } b < |r| \leq c, \\ ab - \frac{a^2}{2} + \frac{a(c-b)}{2} & \text{для } |r| > c. \end{cases} \quad (8)$$

Відповідну їй похідну (повторно спадну скорингову функцію) задають такою формулою:

$$\psi(r) = \begin{cases} r & \text{для } |r| \leq a, \\ a \operatorname{sign}(r) & \text{для } a < |r| \leq b, \\ a \frac{c-|r|}{c-b} \operatorname{sign}(r) & \text{для } b < |r| \leq c, \\ 0 & \text{для } |r| > c. \end{cases} \quad (9)$$

Вагову функцію можна представити так:

$$\omega(r) = \begin{cases} 1 & \text{для } |r| \leq a, \\ \frac{a}{|r|} & \text{для } a < |r| \leq b, \\ a \frac{c-|r|}{(c-b)|r|} & \text{для } b < |r| \leq c, \\ 0 & \text{для } |r| > c. \end{cases} \quad (10)$$

де a , b та c — задані константи, які набувають значень у такому співвідношенні: $0 < a \leq b < c < \infty$.

Функція біквадратних ваг Тьюкі є гладкою і має багато застосувань. Цільову функцію, скорингову функцію та вагову функцію для методу Тьюкі представляють відповідно такими формулами:

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{c^2}{6} \left[1 - \left(1 - \left(\frac{r}{c} \right)^2 \right)^3 \right] & \text{для } |r| \leq c, \\ \frac{c^2}{6} & \text{для } |r| > c; \end{cases} \quad (11)$$

$$\psi(r) = \begin{cases} r \left[1 - \left(\frac{r}{c} \right)^2 \right]^2 & \text{для } |r| \leq c, \\ 0 & \text{для } |r| > c; \end{cases} \quad (12)$$

$$\omega(r) = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{r}{c} \right)^2 \right)^2 & \text{для } |r| \leq c, \\ 0 & \text{для } |r| > c. \end{cases} \quad (13)$$

Вітчизняні вчені також розвивали методи розрахунку робастних оцінок [13–16] та, зокрема, метод М-оцінок [17–19], який вони використовують у сучасних дослідженнях [20, 21].

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ М-ОЦІНОК

Проведемо аналіз ефективності факторів праці та капіталу на основі реальних економічних даних регіонів України та оцінимо результати для різних підходів до моделювання. Більш детально алгоритм оцінювання ефективності регіонів описано у [22–25]. Підготовлені статистичні дані, використані у цьому дослідженні, є щоквартальними та охоплюють період 2017 р. та першого півріччя 2018 р. (первинні дані оприлюднено Державною службою статистики України [26]). Вони містять дані про середньомісячну заробітну плату за квартал (фактор праці L), поквартальний обсяг освоєних капітальних інвестицій (фактор капіталу K) на душу населення та відповідний обсяг випуску товарів і наданих послуг (Y) (на душу населення) для адміністративно-територіальних одиниць (АТО) регіону. Назви регіонів та АТО розкривати не будемо, оскільки дані певною мірою втратили свою актуальність з часом та через укрупнення АТО регіонів України під час реалізації реформи децентралізації відповідно до Постанови Верховної Ради України [27]. До того ж метою дослідження є не проведення економічного аналізу як такого, а демонстрація застосування концепції М-оцінок та їхнє порівняння.

Аналітично-економічним завданням є побудова моделі Кобба–Дугласа, яка дає змогу оцінити вплив факторів праці та капіталу на обсяг випуску продукції та наданих послуг:

$$\ln Y = \ln \gamma + \alpha \ln K + \beta \ln L. \quad (14)$$

Коефіцієнти при змінних факторів праці та капіталу допомагають краще зрозуміти віддачу інвестицій у фактори виробництва та відповідно визначити пріоритет інвестування та підтримки під час розвитку чи відновлення регіону. До того ж, порівняння отриманих параметрів моделі між кількома регіонами дає змогу визначити їхню відносну ефективність та надалі дослідити, які кращі практики організації економічного життя можна перенести на менш успішні регіони для стимулювання їхнього розвитку. Для цього потрібно отримати максимально робастні оцінки, інакше точність порівняння буде низькою та знижуватиметься через наявність статистичних викидів у даних.

Для аналізу та моделювання використано мову програмування R (зокрема бібліотеку MASS) та середовище розробки RStudio. Далі застосовано таку термінологію. Залишками (residuals) названо різницю між оціненими вихідними значеннями (оцінена лінія регресії) та фактичним значеннями. Викид (outlier) — це спостереження з великим значенням залишку. Важіль (leverage) — це міра того, наскільки сильно спостереження впливає на зміщення незалежної змінної від її середнього значення. Спостереження з великим важелем мають суттєвий вплив на оцінку коефіцієнтів. Вплив (influence) — це міра того, наскільки сильно зміниться оцінка коефіцієнтів, якщо виключити певне спостереження (комбінація ефектів важеля та ступеня віддаленості викиду). Відстань Кука — це міра, яка об'єднує вплив ефектів важеля та залишку певного спостереження.

Загалом, будь-яку модель, побудовану МНК, можна замінити на альтернативний робастний варіант. Варто пересвідчитись у тому, що статистичні викиди, наявні в даних, є теоретично можливими та не є помилково внесеними значеннями. Водночас важливо зберегти максимально можливу кількість спостережень, оскільки кожне містить певний інформаційний сигнал щодо моделі роботи економіки досліджуваного регіону.

Далі розглянемо версії робастних регресій (на основі М-оцінок) Хубера, Хампела та метод біквадратних ваг Тьюкі. За своєю суттю робастна регресія — це підхід, за якого різні спостереження отримують різні ваги залежно від того,

наскільки впливовими вони виявляються. М-оцінки задають таку вагову функцію, що оцінювана функція набуває вигляду $\sum_{i=1}^n \omega_i (y_i - x' b) x'_i = 0$. Ваги залежать від залишків, а ті, зі свого боку — від ваг. Відповідно рівняння розв'язують методом ітеративно перезважених найменших квадратів (iterated re-weighted least squares). Матриця коефіцієнтів на ітерації j має вигляд $B_j = [X' W_{j-1} X]^{-1} X' W_{j-1} Y$. Процес продовжують до збіжності. Оптимізація методом Хубера є задачею опуклої оптимізації та має єдиний розв'язок. У разі оптимізації методами Хампела та Тьюкі ця задача може мати кілька локальних мінімумів та відповідно потребує хорошого стартового розв'язку. Під час зважування методом Хубера спостереження з низькими значеннями залишків отримують вагу 1, водночас зі зростанням величини залишку знижується величина ваг:

$$\omega(e) = \begin{cases} 1 & \text{для } |e| \leq k, \\ \frac{k}{|e|} & \text{для } |e| > k. \end{cases} \quad (15)$$

У методі біквadratних ваг Тьюкі всі спостереження, що мають ненульовий залишок, будуть скориговані знижувальними вагами.

Розглянемо детальніше описову статистику для першого досліджуваного регіону (табл. 1).

Зауважимо, що під час інтерпретації результатів застосування моделей та, зокрема, коефіцієнтів слід розуміти, що вплив факторів виробництва оцінено саме в тих діапазонах (обмежених мінімальними та максимальними значеннями), в яких вони були наявні у даних. Наприклад, некоректно використовувати побудовану модель для пояснення впливу фактору праці нижче значення 12015 чи вище значення 26880. Дослідимо наявність статистичних викидів у даних (рис. 1). На рис. 1 наведено графічне представлення спостережуваних величин з табл. 1. По осі абсцис відкладено шкалу в грн/душу населення, візуалізацію побудовано в RStudio IDE.

Статистичними викидами традиційно вважатимемо значення з розподілу, що є більшими за $3Q + 1.5IQR$ чи меншими за $1Q - 1.5IQR$, де $IQR = Q3 - Q1$ (міжквартильний розмах). Як бачимо, у даних є спостереження з аномально великими значеннями. Спробуємо очистити дані від них та побудувати модель, використовуючи звичайний МНК. Також оцінимо модель на даних як є, тобто без видалення викидів, та порівняємо ключові параметри (табл. 2).

Як бачимо, «наївний» метод видалення статистичних викидів суттєво зміщує оцінки коефіцієнтів. Також зауважимо, що статистично значущим для порогового значення p , що дорівнює 0.05, для першого регіону виявився лише

Таблиця 1. Описова статистика досліджуваних даних

Статистика	Фактор праці, L (грн/душу населення)	Фактор капіталу, K (грн/душу населення)	Випуск, Y (грн/душу населення)
Мінімум	12015	165	88
1Q	15598	448	1462
Медіана	17151	905	3782
Середнє	17920	1030	8207
3Q	19999	1289	10684
Максимум	26880	4085	32660

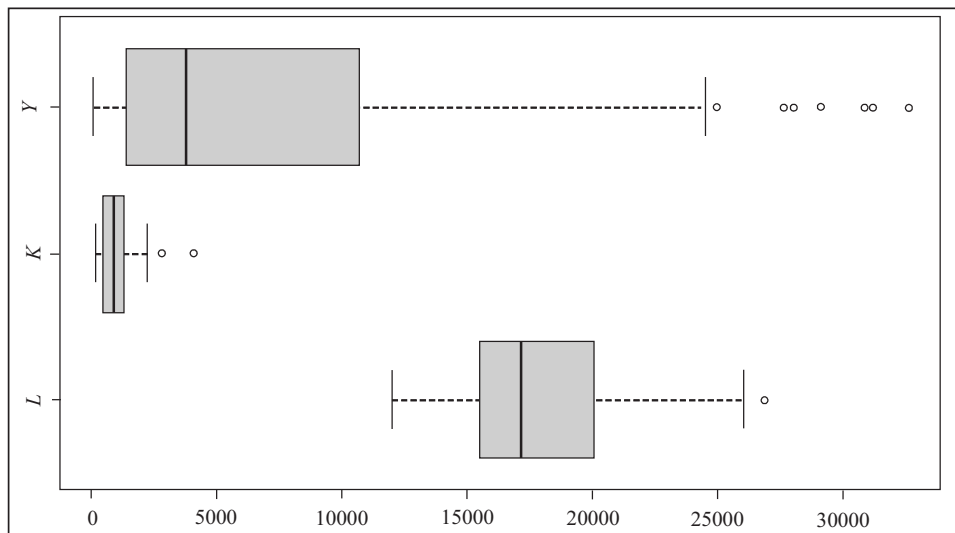


Рис. 1. Дослідження наявності статистичних викидів набору даних

Таблиця 2. Порівняння ключових параметрів моделей на даних за наявності викидів та за їхньої відсутності

Дані для моделі	Коефіцієнт перетину	Статистична помилка оцінки коефіцієнта перетину	Коефіцієнт L	Статистична помилка оцінки коефіцієнта L	Коефіцієнт K	Статистична помилка оцінки коефіцієнта K
Дані з викидами	-37.2492	8.4676	4.6383	0.8611	0.0084	0.2060
Дані, очищені від викидів	-32.1955	10.7309	3.9800	1.0755	0.1957	0.2268
Різниця	-14 %		-14 %		>> 100 %	

коефіцієнт перетину (значення -37.2492 і -32.1955) та коефіцієнт фактору праці (значення 4.6383 і 3.98). Реальна економічна модель регіону є безумовно складнішою за розглянуту концептуальну теоретичну модель.

Побудуємо діагностичні графіки та проаналізуємо залишки, оцінені значення, важелі та відстані Кука (рис. 2).

З рис. 2 видно, що проблемними є спостереження 5, 22, 34 та 70 (позначені індексами), які мають завеликі залишки чи значення важелів. Досить рівномірний розподіл залишків відносно 0 на графіку «Залишки — Оцінені значення» свідчить про те, що загалом модель взаємодії факторів та результативної змінної є коректною (зокрема цьому сприяє застосування логарифмічної трансформації). Q-Q графік нормального розподілу загалом підтверджує нормальність розподілу залишків моделі, однак можна виділити спостереження 22, 34 та 70, які все-таки мають значні відхилення від очікуваних значень. Ці самі спостереження позначені на графіку «Масштаб — Локація» (інша відома назва «Розкид — Значення»), який вказує на певний низхідний тренд зниження величини розкиду значень залишків зі зростанням величини оцінених значень. Статистичні викиди мають різний ступінь впливу на зміщення параметрів побудованої моделі, що і відображає графік «Залишки — Важелі». Найбільш впливови-

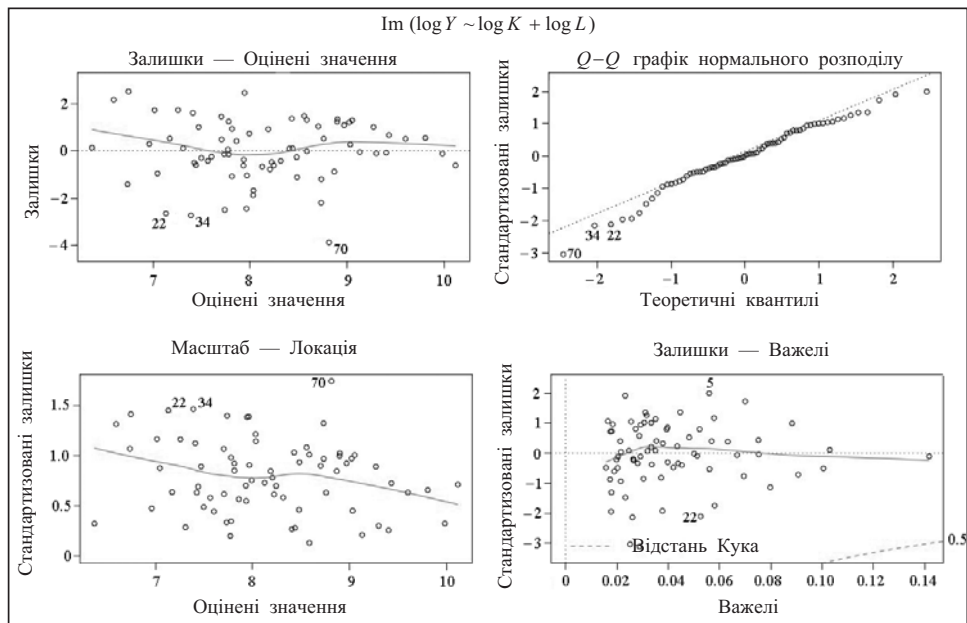


Рис. 2. Діагностичні графіки для оцінки впливовості викидів

Таблиця 3. Відстані Кука найбільш проблемних спостережень

Індекс	АТО та квартал	Фактор праці, L (грн/душу населення)	Фактор капіталу, K (грн/душу населення)	Випуск, Y (грн/душу населення)	Відстань Кука	Залишки
22	ато_10_17р_2кв	14157	336	88	0.0821	-2.1066
5	ато_5_17р_1кв	13002	927	10494	0.0789	1.9975
70	ато_10_18р_2кв	20325	622	139	0.0782	-3.0348
6	ато_6_17р_1кв	12576	1204	6342	0.0752	1.7311
72	ато_12_18р_2кв	19917	2792	687	0.0630	1.7515

ми у цьому контексті є спостереження 5 та 22. Зазначимо, що в даних немає спостережень, для яких відстань Кука була б більшою за 0.5. Інакше кажучи, загалом отримані дані лише незначною мірою відхиляються від очікуваних значень. Розрахуємо значення відстаней Кука, беручи за поріг відсікання загальноприйняте значення $4/n$, де n — кількість спостережень у наборі даних (табл. 3).

Оцінимо також десять спостережень з найбільшими абсолютними величинами залишків (табл. 4).

З наведених таблиць видно, що найбільш впливовими спостереженнями з аномальними значеннями є адміністративно-територіальні одиниці 10, 5 (2017 р., 1-й квартал), 6 (2017 р., 1-й квартал), 12 (2017 р., 3-й квартал та 2018 р., 2-й квартал) та 7 (2017 р., 1-й квартал). Побудуємо робастну регресію з вагами Хубера та розглянемо їхні значення, встановлені цим алгоритмом (табл. 5).

З табл. 5 видно, що найбільш проблемні спостереження отримали найбільші знижувальні ваги. Спостереження із залишками в допустимих межах зберегли вагу 1. Нагадаємо, що у разі застосування традиційного МНК усі спостереження мають однакову вагу 1. Коефіцієнти робастної регресії відрізняються від коефіцієнтів звичайної, проте за наявності викидів саме оцінки коефіцієнтів

Таблиця 4. Спостереження з найбільшими абсолютними величинами залишків

Індекс	АТО та квартал	Фактор праці, L (грн/душу населення)	Фактор капіталу, K (грн/душу населення)	Випуск, Y (грн/душу населення)	Відстань Кука	Абсолютні залишки
70	ато_10_18р_2кв	20325	622	139	0.0782	3.0348
34	ато_10_17р_3кв	14943	771	105	0.0408	2.1410
22	ато_10_17р_2кв	14157	336	88	0.0821	2.1066
5	ато_5_17р_1кв	13002	927	10494	0.0789	1.9975
46	ато_10_17р_4кв	16107	858	187	0.0229	1.9540
58	ато_10_18р_1кв	16935	307	248	0.0486	1.9282
7	ато_7_17р_1кв	16854	448	32660	0.0291	1.9152
72	ато_12_18р_2кв	19917	2792	687	0.0630	1.7515
6	ато_6_17р_1кв	12576	1204	6342	0.0752	1.7311
36	ато_12_17р_3кв	17142	1453	466	0.0173	1.4752

Таблиця 5. Коригування впливовості аномальних значень М-вагами Хубера

Індекс	АТО та квартал	Залишки	М-ваги Хубера
70	ато_10_18р_2кв	-3.9783	0.4263
34	ато_10_17р_3кв	-2.7846	0.6090
22	ато_10_17р_2кв	-2.7263	0.6221
46	ато_10_17р_4кв	-2.5625	0.6618
58	ато_10_18р_1кв	-2.5479	0.6656
5	ато_5_17р_1кв	2.4892	0.6813
7	ато_7_17р_1кв	2.3659	0.7168
72	ато_12_18р_2кв	-2.2420	0.7564
6	ато_6_17р_1кв	2.1518	0.7881
36	ато_12_17р_3кв	-1.9321	0.8778
24	ато_12_17р_2кв	-1.7365	0.9767
11	ато_11_17р_1кв	1.6974	0.9991
1	ато_1_17р_1кв	0.3720	1.0000
2	ато_2_17р_1кв	1.3470	1.0000
3	ато_3_17р_1кв	1.2461	1.0000

робастної регресії, є більш надійними. У підсумковій табл. 6 наведено коефіцієнти моделей, побудованих за М-вагами Хампела та Тьюкі (біквадратне зважування). Далі розширимо порівняльний аналіз даними двох інших регіонів.

Зауважимо, що для регіону 2 ваги Хампела дають такий самий результат, як МНК. Цей результат є у чомусь очікуваним, оскільки дані цього регіону мають менш впливові викиди. Відносна різниця оцінок коефіцієнтів регіону 2 за результатами порівняння підходу МНК з кожним методом М-оцінок також є нижчою. Для регіону 3 статистично значущим виявився фактор капіталу. Порівняння всіх побудованих моделей свідчить про суттєве зміщення оцінок параметрів, якщо застосовувати підхід «наївного» видалення статистичних викидів. Отже, маємо емпіричне підтвердження ефективності застосування М-оцінок.

Таблиця 6. Оцінки за різними підходами моделювання

Регіон	Модель (та дані)	Коефіцієнт перетину	Статистична помилка оцінки коефіцієнта перетину	Коефіцієнт L	Статистична помилка оцінки коефіцієнта L	Коефіцієнт K	Статистична помилка оцінки коефіцієнта K
1	МНК, дані очищені від викидів	-32.1955	10.7309	3.9800	1.0755	0.1957	0.2268
	МНК, дані з викидами	-37.2492	8.4676	4.6383	0.8611	0.0084	0.2060
	М-ваги Хубера	-38.2557	8.2770	4.7730	0.8417	-0.0277	0.2013
	М-ваги Хампела	-37.7042	8.5531	4.6965	0.8698	-0.005	0.2080
	М-ваги Тьюкі	-38.9371	8.4175	4.8465	0.856	-0.0343	0.2047
2	МНК, дані очищені від викидів	-23.4078	12.3426	2.9389	1.2664	0.2059	0.2406
	МНК, дані з викидами	-24.8100	11.2659	3.3633	1.1338	-0.1544	0.2246
	М-ваги Хубера	-24.8919	11.3363	3.3706	1.1409	-0.1530	0.2260
	М-ваги Хампела	-24.8100	11.2659	3.3633	1.1338	-0.1544	0.2246
	М-ваги Тьюкі	-25.7030	12.1162	3.4620	1.2194	-0.1663	0.2416
3	МНК, дані очищені від викидів	7.7662	6.6895	-0.1599	0.7064	0.2250	0.1140
	МНК, дані з викидами	-1.7389	6.0022	0.6716	0.6470	0.4782	0.1008
	М-ваги Хубера	-4.0290	5.5921	0.9124	0.6028	0.4831	0.0940
	М-ваги Хампела	-2.8202	5.9015	0.7791	0.6362	0.4890	0.0992
	М-ваги Тьюкі	-4.0422	5.8063	0.9118	0.6259	0.4866	0.0976

Розглянемо економічну інтерпретацію. Умовно порівняємо віддачу регіонів 1 та 2 на фактор праці. Для порівняння виберемо моделі, побудовані з використанням М-ваг Хубера. Регіон 1 з коефіцієнтом 4.77 біля фактора праці є більш ефективним відносно регіону 2 з аналогічним коефіцієнтом 3.37. Використання логарифмічної форми моделі випуску дає змогу припустити, що потенційний приріст обсягів випуску продукції та наданих послуг регіону 1 становитиме 4.77 в. п. зі зростанням інвестицій у фактор праці на 1 %. Для регіону 3 інвестиції у (більш пріоритетний) фактор капіталу, збільшені на 1 %, потенційно дають змогу наростити обсяг випуску продукції та наданих послуг регіону 3 на 0.48 в. п. Зазначимо, що абсолютна величина обсягу освоєних капітальних інвестицій у перерахунку на душу населення зазвичай є нижчою за обсяг заробітної плати, тому нижчі рівні потенційного зростання випуску є очікуваними. Інвестиції у фактор праці можна інтерпретувати як заходи, спрямовані на підвищення кваліфікації працівників, стимулювання підприємницької ініціативи, покращення освітньої інфраструктури регіонів. Метою інвестицій в основний капітал на рівні держави є покращення транспортної, енергетичної та

інформаційно-комунікаційної інфраструктури регіонів. На рівні підприємств ці інвестиції здійснюють у сучасні основні засоби, які дають змогу випускати конкурентну продукцію та підвищувати рівень її технологічності. Розвиток регіонів пов'язаний не тільки зі зростанням внутрішнього випуску, а й з нарощуванням експортного потенціалу. Успішний розвиток регіонів України є фундаментом ефективної децентралізованої економіки європейського типу, що забезпечує стабільність розвитку та зростання добробуту населення країни. Наведені моделі є занадто узагальненими та висококонцептуальними. Безумовно, для проведення детального аналізу варто враховувати більш розширені статистичні дані та відповідно інші додаткові фактори впливу на економічну систему країни. Зазначене дослідження виходить за межі цієї статті. Прийняття економічних рішень на основі наявних обмежених даних в умовах високодинамічних змін в економічній системі країни є по суті прийняттям рішень в умовах невизначеності.

ВИСНОВКИ

М-оцінки та їхнє застосування є досить ефективним аналітичним методом. Вони дають змогу отримати більш точні та стійкі оцінки ключових параметрів моделі навіть за наявності статистичних викидів та спостережень з аномальними значеннями, які значно зміщують оцінки, отримані традиційним МНК. Про це також свідчить порівняльний аналіз, проведений на основі реальних економічних даних регіонів України методами М-оцінок Хубера, Хампела та біквадратних ваг Тьюкі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Huber P.J. Robust statistics. New York: John Wiley & Sons, 1981. 317 p.
2. Hampel F.R., Ronchetti E.M., Rousseeuw P.J., Stahel W.A. Robust statistics: The approach based on influence functions. New York: John Wiley & Sons, 1986. 536 p.
3. Marazzi A. Algorithms, routines and S functions for robust statistics. Wadsworth & Brooks/Cole, 1993. 440 p.
4. De Moivre A. The doctrine of chances: or, A method for calculating the probabilities of events in play. 3rd ed. London: A. Millar, 1756. 348 p.
5. Green Jr. B.F., Tukey J.W. Complex analyses of variance: General problems. *Psychometrika*. 1960. Vol. 25, Iss. 2. P. 127–152. <https://doi.org/10.1007/BF02288577>.
6. Tukey J.W. The future of data analysis. *The Annals of Mathematical Statistics*. 1962. Vol. 33, N 1. P. 1–67. <http://www.jstor.org/stable/2237638>.
7. Huber P.J. Robust estimation of a location parameter. *The Annals of Mathematical Statistics*. 1964. Vol. 35, N 1. P. 73–101. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177703732>.
8. Hampel F.R. Contributions to the theory of robust estimation: PhD thesis. University of California, 1968. 206 p.
9. Box G.E.P. Non-normality and tests on variances. *Biometrika*. 1953. Vol. 40, Iss. 3–4. P. 318–335. <https://doi.org/10.2307/2333350>.
10. Huber P.J., Ronchetti E.M. Robust statistics. Wiley & Sons, Inc., 2009. 384 p. <https://doi.org/10.1002/9780470434697>.
11. Beaton A.E., Tukey J.W. The fitting of power series, meaning polynomials, illustrated on band-spectroscopic data. *Technometrics*. 1974. Vol. 16, Iss. 2. P. 147–185.
12. Andrews D.F., Bickel P.J., Hampel F.R., Huber P.J., Rogers W.H., Tukey J.W. Robust estimates of location: Survey and advances. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1972. 374 p.
13. Горбачук В.М., Єрмольєв Ю.М., Єрмольєва Т.Ю., Дунаєвський М.С. Застосування квантильної регресії для оцінювання еколого-економічних ризиків. *V Міжнародна науково-практична конференція «Обчислювальний інтелект»* (15–20 квітня 2019, Ужгород, Україна). Ужгород, 2019. С. 188–189.
14. Ermoliev Yu.M., Knopov P.S. Method of empirical means in stochastic programming problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2006. Vol. 42, N 6. P. 773–785. <https://doi.org/10.1007/s10559-006-0118-z>.

15. Дороговцев А.Я. Теория оценок параметров случайных процессов. Киев: Вища шк., 1982. 192 с.
16. Корхин А.С. О некоторых свойствах оценок параметров регрессии при априорных ограничениях-неравенствах. *Кибернетика*. 1985. № 6. С. 106–114.
17. Knopov P.S. Asymptotic properties of some classes of M-estimates. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1997. Vol. 33, N. 4. P. 468–481. <https://doi.org/10.1007/BF02733103>.
18. Mikhalevich V.S., Knopov P.S., Golodnikov A.N. Mathematical models and methods of risk assessment in ecologically hazardous industries. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1994. Vol. 30, N 2. P. 259–273. <https://doi.org/10.1007/BF02366429>.
19. Knopov P.S., Kasitskaya E.J. Empirical estimates in stochastic optimization and identification. NY: Springer New York, 2002. VIII, 250 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3567-3>
20. Knopov P.S., Norkin V.I. Stochastic optimization of the stochastic storage processes. *Proc. International Conference «Modern Stochastics: Theory and Applications V» (MSTA-V)* (1–4 June 2021, Kyiv, Ukraine). Kyiv, 2021. P. 68–69.
21. Дунаєвський М.С. Емпіричні середні в задачах стохастичного програмування. *Збірник матеріалів симпозиуму «Інтелектуальні рішення», школа-семінар «Теорія прийняття рішень»* (28–30 вересня 2021, Ужгород, Україна). Ужгород, 2021. С. 111–112. URL: <https://intsol.knu.ua/conference-proceedings/>.
22. Горбачук В.М., Дунаєвський М.С., Сулейманов С.-Б. Модель зростання децентралізованої економіки з виробничими функціями Кобба–Дугласа. *Східна Європа: економіка, бізнес та управління*. 2019. Вип. 6 (23). С. 738–746.
23. Горбачук В.М., Макаренко О.С., Дунаєвський М.С., Новодережкін В.І., Сулейманов С.-Б. Вимірювання економічної ефективності регіонів України за перші квартали 2017 р. *Матеріали конференції «Сучасна інформатика: проблеми, досягнення та перспективи розвитку»* (13–15 грудня 2017, Київ, Україна). Київ, 2017. С. 258–260.
24. Дунаєвський М.С. Економічне зростання суміжних районів за децентралізації. *Теорія оптимальних рішень*. 2019. № 18. С. 94–99.
25. Gorbachuk V., Dunaievskiy M., Suleimanov S.-B. Modeling of agency problems in complex decentralized systems under information asymmetry. *Proc. 2019 IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT)* (18–19 December 2019, Kyiv, Ukraine). Kyiv, 2019. P. 449–454. <https://doi.org/10.1109/ATIT49449.2019.9030498>.
26. Державна служба статистики України. Статистичний бюлетень «Соціально-економічне становище регіону» (по кожному регіону окремо). URL: https://ukrstat.gov.ua/druk/publicat/kat_u/2017/soc_ek_reg/publ_arch_reg_u.htm (дата звернення: 01.09.2023).
27. Про утворення та ліквідацію районів: Постанова ВРУ від 17.07.2020 р. № 807-IX: станом на 1 вересня 2023 р. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/807-20#Text> (дата звернення: 01.09.2023).

M.S. Dunaievskiy

M-ESTIMATES: A REVIEW AND APPLICATION FOR DECISION-MAKING UNDER UNCERTAINTY

Abstract. A brief overview of the evolution of the robust estimate methods is presented, in particular, the main concepts of m-estimation methods and their advantages when working with data containing statistical outliers. The comparison of the results of the methods of M-estimates by P. Huber, F. Hampel, and the method of biquadratic weights by J. Tukey was held on real economic data of the regions of Ukraine. We have got empirical confirmation of the efficiency of using M-estimates. The comparison of all the generated models indicates a significant shift in parameter estimates, in case, the approach of naive removal of statistical outliers has been applied. Based on the constructed robust models, we can more accurately compare the regions of the country in terms of the labor and capital factors efficiency, and accordingly determine the priority of investments that will stimulate the economic development of the region to a greater extent.

Keywords: decentralization, decision-making, M-estimates, regional development, robustness, uncertainty.

Надійшла до редакції 26.05.2023