

Л.С. СТОЙКОВАКиїв, Україна, e-mail: stojk@ukr.net.**В.Є. ЧЕВАРДИН**Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації імені Героїв Крут, Київ, Україна, e-mail: vladyslav.chevardin@viti.edu.ua.

ТОЧНІ ОЦІНКИ ЙМОВІРНОСТІ ПОПАДАННЯ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ В ЗАДАНИЙ ІНТЕРВАЛ В ОДНОМУ КЛАСІ УНІМОДАЛЬНИХ РОЗПОДІЛІВ

Анотація. Розглянуто клас A унімодальних функцій розподілу $F_\mu(x)$ таких, що відомо лише два їхні перші моменти і мода m , яка співпадає з першим моментом. У класі A знайдено точні оцінки ймовірності попадання випадкової величини μ в інтервал $(0, 2m)$. Визначено додаткові параметри α_η і α_μ , які, змінюючись від 0 до ∞ , скеровують увесь процес розв'язання задачі: знаходяться екстремальні функції розподілу, що дають точні оцінки відповідному функціоналу; визначаються області існування екстремальних функцій. Задачу розв'язано для кожного фіксованого значення $\sigma_\mu \in (0, \infty)$ — середнього квадратичного відхилення випадкової величини μ від моди. Знайдено в явному вигляді унімодальні екстремальні функції розподілу $F_\mu(x)$ із класу A , на яких досягаються точні оцінки ймовірності попадання випадкової величини μ в інтервал $(0, 2m)$.

Ключові слова: точні оцінки, лінійні функціонали, класи унімодальних функцій розподілу.

ВСТУП

Запропонуємо деяке застосування розглянутої в цій роботі математичної моделі для оцінювання ймовірності влучення в мішень під час прицільної стрільби.

Нехай ціль (мішень) — це точка або деякий окіл певної точки (інтервал, смуга, коло), куди треба попасти, щоб ціль була збита. В інтервалі $(0, 2m)$ такою точкою є мода m — середина інтервалу, а інтервал — це окіл моди. Смуга має ширину $2m$, а коло — діаметр $2m$. Мода випадкової величини μ — це точка максимуму її щільності розподілу; вона має найвищу ймовірність попадання в деякий малий окіл цієї точки. Вважатимемо, що точкою прицілу є мода або її окіл. Смугою може бути, наприклад, міст, злітно-посадкова смуга, танк, канал або окрема частина дороги. Прицілюються вдовж всієї середньої лінії смуги. Колом може бути, наприклад, залізничний вузол, склади боєприпасів тощо. Прицілюються також в окіл центра кола.

У цій статті розглянуто математичну модель, в якій мінімальна ймовірність попадання в ціль не менша, ніж $2(\sqrt{2} - 1) \approx 0.82843$ для найбільшого середнього

квадратичного відхилення від моди: $\sigma_\mu \leq \sigma_{\mu 1} = \frac{m(\sqrt{2} + 1)^{1/2}}{\sqrt{3}} \approx 0.897m$. Із змен-

шенням σ_μ ця ймовірність збільшується до 1. Таку модель можна використовувати для зброї, що має такі самі показники, як деяку спробу розрахунку ймовірності попадання в ціль. Для цього потрібна лише статистика щодо середнього квадратичного відхилення від цілі на етапі випробовування зброї.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Розглянемо клас A унімодальних функцій розподілу (ф.р.) $F_\mu(x)$. Випадкова величина μ — це відстань від точки її попадання в заданий інтервал до центру m .

У цьому класі $F_\mu(0-) = 0$; відомі лише два моменти: $m_1 = \int_0^\infty x dF_\mu(x)$,

$m_2 = \int_0^\infty x^2 dF_\mu(x)$ і мода m . Середнє квадратичне відхилення σ_μ випадкової

величини μ від моди становить $\sigma_\mu^2 = m_2 - m_1^2$. Існує диференційовна (за винятком однієї або двох точок) щільність $f_\mu(x)$. Вона має моду $m > 0$ і задовольняє умови

$$f_\mu(0-) = 0; \quad x^3 f_\mu(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty; \quad m = m_1. \quad (1)$$

Клас A визначено (детальніше див. [1]).

Задача 1. Знайти точні нижні границі ймовірності $P\{0 < \mu < 2m\}$ в класі $F_\mu(x) \in A$. Позначимо заданий лінійний функціонал $P\{0 < \mu < 2m\} = \int_0^{2m} dF_\mu(x) = I(F_\mu)$. Ця задача легко формулюється і її легко розв'язати, якщо

знати явний вигляд екстремальних ф.р. $F_\mu(x) \in A$. Для знаходження їх застосовують відоме взаємно однозначне перетворення Джонсона–Роджерса [2–4], за допомогою якого задача 1 замінюється еквівалентною задачею з новим функціоналом $J(F_\eta)$ від нової функції $F_\eta(x)$, що має відповідні два моменти, але без обмеження на її унімодальність. Клас ф.р. $F_\eta(x)$ позначимо K . При цьому $I(F_\mu) = J(F_\eta)$. Це перетворення задає взаємно однозначну відповідність між екстремальними ф.р. $F_\mu(x) \in A$ і $F_\eta(x) \in K$. Доведення цього факту для більш загальної задачі (ніж задача 1) дано в [5].

Перетворення з [2] має вигляд

$$F_\eta(x) = F_\mu(x) + (m-x)f_\mu(x), \quad (2)$$

де $F_\eta(x)$ — ф.р. без обмеження на унімодальність. З (2) випливає

$$dF_\eta(x) = (m-x)df_\mu(x). \quad (3)$$

Моменти ф.р. $F_\eta(x)$ обчислюються за моментами $F_\mu(x)$ за допомогою (3), інтегруючи частинами і враховуючи обмеження (1):

$$s_1 = \int_0^\infty x dF_\eta(x) = 2m_1 - m = m, \quad s_2 = \int_0^\infty x^2 dF_\eta(x) = 3m_2 - 2m_1^2; \\ s_1 = m_1 = m, \quad \sigma_\eta = \sigma_\mu \sqrt{3}, \quad (4)$$

де σ_η — середнє квадратичне відхилення випадкової величини η від моди, $\sigma_\eta^2 = s_2 - m^2 = 3\sigma_\mu^2$.

Знаходимо функціонал $J(F_\eta)$, який дорівнює функціоналу $I(F_\mu) = \int_0^{2m} dF_\mu(x)$, за допомогою наступного твердження [2, 1].

Твердження 1. Позначимо $L_1(F_\mu) = P\{u < \mu < v\} = \int_u^v dF_\mu(x)$. Якщо мода $m \in (u, v)$, то

$$L_1(F_\mu) = L_2(F_\eta) = \int_0^u \frac{m-u}{m-x} dF_\eta(x) + \int_u^v dF_\eta(x) + \int_v^\infty \frac{v-m}{x-m} dF_\eta(x).$$

Із твердження 1 і рівностей $u=0, v=2m$ випливає

$$I(F_\mu) = J(F_\eta) = \int_0^{2m} dF_\eta(x) + \int_{2m}^{\infty} \frac{m}{x-m} dF_\eta(x).$$

Отже, K — клас ф.р. $F_\eta(x)$, що мають два фіксованих моменти: $s_1 = m, s_2 = m^2 + \sigma_\eta^2, \sigma_\eta^2 = 3\sigma_\mu^2$ (див. (4)). Представимо функціонал $J(F_\eta)$ в стандартному еквівалентному вигляді

$$J(F_\eta) = \int_0^{\infty} g(x) dF_\eta(x),$$

де

$$\left\{ \begin{array}{l} g(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 2m, \\ g(x) = \frac{m}{x-m}, \quad 2m \leq x < \infty \end{array} \right\}. \quad (5)$$

Тепер можна сформулювати задачу, яка еквівалентна задачі 1.

Задача 2. Знайти точні нижні границі функціонала $J(F_\eta)$ в класі $F_\eta(x) \in K$.

Для розв'язання задачі 2 викладемо стисло основні означення і необхідні важливі факти, що використовуватимемо для доведення основних результатів.

НЕОБХІДНІ ОЗНАЧЕННЯ, ПОНЯТТЯ ТА РЕЗУЛЬТАТИ

У роботах [3, 5] доведено, що для будь-якого лінійного функціонала $J(F_\eta)$

справедлива рівність $\inf_{F_\eta(x) \in K} J(F_\eta) = \inf_{F_\eta(x) \in [E]} J(F_\eta)$, де E — множина крайніх точок

множини K . Легко перевірити, що множина K є опуклою. Відмітимо, що ф.р. $F_\eta(x) \in K$ називають крайньою точкою множини K , якщо її неможливо представити у вигляді $F_\eta(x) = \alpha F_{\eta 1}(x) + (1-\alpha) F_{\eta 2}(x)$, де $0 < \alpha < 1$, $F_{\eta 1}(x)$ і $F_{\eta 2}(x)$ — різні ф.р. з множини K . Множина E складається із східчастих ф.р. Якщо фіксовано k моментів, то кількість точок росту в ф.р. $F_\eta(x) \in E$ не перевищує $k+1$ (в цій роботі $k=2$). Множина $[E]$ — це замикання множини E , тобто окрім множини E вона містить усі її граничні точки, які можуть не належати E . Збіжність до граничних точок розуміють як збіжність за слабкою топологією (збіжність у точках неперервності граничної ф.р.).

Нехай $F_{\eta 0}(x) \in [E]$ має точки росту $x_i, 1 \leq i \leq 3$. Кожній такій ф.р. відповідає многочлен $U_{\eta 0}(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$ не вище другого ступеня, що задовольняє умовам $U_{\eta 0}(x_i) = g(x_i)$ ($g(x)$ див. в (5)). Якщо в деякій точці x_i виконується додатково рівність $U'_{\eta 0}(x_i) = g'(x_i)$, то многочлен $U_{\eta 0}(x)$ можна записати за формулою Тейлора $U_{\eta 0}(x) = g(x_i) + g'(x_i)(x-x_i) + a_3(x-x_i)^2$, а старший коефіцієнт a_3 можна знайти з умов $U_{\eta 0}(x_j) = g(x_j), j \neq i$.

У книгах [3, 6] доведено важливу теорему, яка відіграє основну роль у доведенні теореми 2 цієї статті. Сформулюємо її.

Теорема 1. Для того щоб інфімум (мінімум) функціоналу $J(F) = \int_0^{\infty} g(x) dF(x)$ обчислювався (або досягався) на деякій ф.р. $F_0(x) \in [E]$ з кількістю точок росту не більше трьох, потрібно і достатньо, щоб існував многочлен $U_0(x)$ не вище другого ступеня, для якого виконуються такі умови:

- 1) $U_0(x_i) = g(x_i), i=1,2,3;$
- 2) $\forall x \geq 0: U_0(x) \leq g(x)$ (для інфімуму).

Позначимо $\varphi_0(x) = g(x) - U_0(x)$ і сформулюємо умови 1, 2 в еквівалентному вигляді:

$$1) \varphi_0(x_i) = 0, i = 1, 2, 3, \quad 2) \forall x \geq 0: \varphi_0(x) \geq 0 \quad (\text{для інфімуму}). \quad (6)$$

ДОДАТКОВІ ПАРАМЕТРИ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ 2

Введемо два параметри: $\alpha_\eta = \frac{m}{\sigma_\eta}$ і $\alpha_\mu = \frac{m}{\sigma_\mu}$. Із (4) випливає $\alpha_\mu = \alpha_\eta \sqrt{3}$.

За допомогою введених параметрів сформулюємо теорему 2, яка є розв'язком задачі 2.

Теорема 2. 1. Якщо параметр α_η змінюється в інтервалі $0 < \alpha_\eta \leq (\sqrt{2} - 1)^{1/2}$, то інфімум функціонала $J(F_\eta)$ обчислюється на східчастій ф.р. $F_{\eta 1}(x)$ з точками росту $x_{11} = 0, x_{21} = m(2 + \sqrt{2})$ і стрибками в них $p_{11} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}, p_{21} = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}: \inf_{F_\eta(x) \in [E]} J(F_\eta) = J(F_{\eta 1}) = 2(\sqrt{2} - 1) \approx 0.82843$.

$$\text{Позначимо } \alpha_{\eta 1} = (\sqrt{2} - 1)^{1/2} \approx 0.6436, \alpha_{\eta 2} = \left[\frac{\sqrt{17} - 3}{2} \right]^{1/2} \approx 0.749368.$$

2. Якщо параметр α_η змінюється в інтервалі $\alpha_{\eta 1} \leq \alpha_\eta \leq \alpha_{\eta 2}$, то мінімум функціонала $J(F_\eta)$ обчислюється на східчастій ф.р. $F_{\eta 2}(x)$ з точками росту $x_{12} = 0, x_{22} = s_2 / s_1$ і стрибками в них $p_{12} = \frac{1}{1 + \alpha_\eta^2}, p_{22} = \frac{\alpha_\eta^2}{1 + \alpha_\eta^2}$. Мінімальне значення функціонала $J(F_\eta)$ змінюється разом із змінною α_η :

$$J(F_{\eta 1}) \leq \min_{F_\eta(x) \in [E]} J(F_\eta) = J(F_{\eta 2}) = \frac{1 + \alpha_\eta^4}{1 + \alpha_\eta^2} \leq \frac{1 + \alpha_{\eta 2}^4}{1 + \alpha_{\eta 2}^2} \approx 0.84233.$$

3. Якщо параметр α_η змінюється в інтервалі $\alpha_{\eta 2} \leq \alpha_\eta < \infty$, то із збільшенням α_η від $\alpha_{\eta 2}$ до ∞ кожному α_η буде відповідати своя (єдина) екстремальна ф.р. $F_{\eta 3}(x)$ з точками росту, що мають однаковий вигляд для різних значень α_η : $x_{13} = (m - a\sigma_\eta), x_{13} \in (0, m), x_{23} = (m + \frac{\sigma_\eta}{a}) > 2m$, але відрізняються числовими значеннями параметрів $a = a(\alpha_\eta)$ і $\sigma_\eta = \frac{m}{\alpha_\eta}$. Стрибки у відповідних точках

росту становлять $p_{13} = \frac{1}{1 + a^2}, p_{23} = \frac{a^2}{1 + a^2}$; мінімальні значення функціонала $J(F_\eta)$ змінюються разом із змінною параметрів α_η і a :

$$\min_{F_\eta(x) \in [E]} J(F_\eta) = J(F_{\eta 3}) = \frac{1 + \alpha_\eta a^3}{1 + a^2}.$$

Доведення теореми 2. 1. Нехай $0 < \alpha_\eta \leq (\sqrt{2} - 1)^{1/2}$. Коли α_η прямує до нуля, матимемо великі значення $\sigma_\eta = \frac{m}{\alpha_\eta}$. Побудуємо послідовність ф.р. $F_{\eta n}(x), n \rightarrow \infty$, в якій всі $F_{\eta n}(x) \in E$, тобто зберігають і перший, і другий мо-

менти. Доведемо, що виконуються такі рівності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\eta n}(x) = F_{\eta 1}(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J(F_{\eta n}) = J(F_{\eta 1}).$$

Це і буде доведенням першої частини теореми 2.

Нехай точками росту послідовності ф.р. $F_{\eta n}(x) \in E$ є точки $x_1 = 0$, $x_2 = x_{2n}$, $x_3 = n$. Відповідні стрибки в точках дорівнюватимуть

$$p_{1n} = \frac{(x_{2n} - B(n))(n - m)}{nx_{2n}}, \quad p_{2n} = \frac{m(n - B(0))}{(n - x_{2n})x_{2n}}, \quad p_{3n} = \frac{m(B(0) - x_{2n})}{n(n - x_{2n})},$$

$$\text{де } B(x) = \frac{s_2 - s_1 x}{s_1 - x}.$$

Для того щоб стрибки p_{1n} , p_{2n} , p_{3n} були невід'ємними, достатньо виконання нерівностей $0 < B(n) < s_1 < x_{2n} < B(0) < n$. З цього випливає, що точка x_{2n} знаходиться в скінченних границях, не залежних від n . Тому границя x_{2n} , коли $n \rightarrow \infty$, буде скінченною. Позначимо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = x_{21}$. Звідси

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{1n} = \frac{x_{21} - m}{x_{21}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_{2n} = \frac{m}{x_{21}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_{3n} = 0. \quad (7)$$

Із (7) випливає

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(F_{\eta n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n g(x) dF_{\eta n}(x) = g(0) \frac{x_{21} - m}{x_{21}} + g(x_{21}) \frac{m}{x_{21}} + 0 = J(F_{\eta 1}).$$

Звідси отримаємо слабку збіжність $F_{\eta n}(x) \rightarrow F_{\eta 1}$ за означенням. У результаті граничного переходу маємо граничну ф.р. $F_{\eta 1}(x)$ з двома точками росту: точкою $x_{11} = 0$ і точкою x_{21} , яку знайдемо далі за допомогою граничного многочлена $U_1(x)$.

$$\text{Доведемо, що } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x) = g(x_{21}) + g'(x_{21})(x - x_{21}) = U_1(x).$$

Розглянемо многочлен $U_n(x)$, що відповідає ф.р. $F_{\eta n}(x)$ за умовами теореми 1: $U_n(0) = g(0)$, $U_n(x_{2n}) = g(x_{2n})$, $U_n(n) = g(n)$, $U'_n(x_{2n}) = g'(x_{2n})$ (формулу для функції $g(x)$ див. в (5)). Цей многочлен можна записати за формулою Тейлора: $U_n(x) = g(x_{2n}) + g'(x_{2n})(x - x_{2n}) + a_n(x - x_{2n})^2$. Коефіцієнт a_n знайдемо з умови

$$\begin{aligned} U_n(n) = g(n) &\leftrightarrow g(x_{2n}) + g'(x_{2n})(n - x_{2n}) + a_n(n - x_{2n})^2 = \frac{m}{n - m} \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow a_n(n - x_{2n})^2 = \frac{m}{n - m} - \frac{m}{x_{2n} - m} + \frac{m(n - x_{2n})}{(x_{2n} - m)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Звідси } a_n > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x) = g(x_{21}) + g'(x_{21})(x - x_{21}) = U_1(x).$$

Отже, граничний многочлен $U_1(x)$ — це пряма лінія, що співпадає з функцією $g(x)$ в $x = 0$ і дотична до неї в x_{21} . Точка x_{21} у многочлені $U_1(x)$ знаходиться з умов $U_1(0) = g(0) = 1$; $U_1(x_{21}) = g(x_{21})$, $U'_1(x_{21}) = g'(x_{21})$.

Таким чином, точка x_{21} задовольняє рівняння

$$g'(x_{21}) = \frac{U_1(x_{21}) - U_1(0)}{x_{21}} \leftrightarrow g'(x_{21})x_{21} = g(x_{21}) - 1 \leftrightarrow x_{21}^2 - 4mx_{21} + 2m^2 = 0.$$

Звідси

$$x_{21} = m(2 + \sqrt{2}). \quad (8)$$

Таким чином, гранична (для $n \rightarrow \infty$) ф.р. $F_{\eta 1}(x)$ остаточно знайдена і має точки росту $x_{11} = 0$, $x_{21} = m(2 + \sqrt{2})$. Легко бачити, що для неї виконуються необхідні і достатні умови екстремальності (6) з теореми 1. Тому

$$\inf_{F_{\eta} \in [E]} J(F_{\eta}) = J(F_{\eta 1}) = g(0)p_{11} + g(x_{21})p_{21} = 2(\sqrt{2} - 1).$$

Відмітимо одну особливість знайденої екстремальної ф.р. $F_{\eta 1}(x)$. Внаслідок граничного переходу від ф.р. $F_{\eta n}(x)$ до ф.р. $F_{\eta 1}(x)$ вона зберігає перший момент, але не зберігає другого моменту. Доведемо це: $s_{21} = x_{21}^2$, $p_{21} = m^2(2 + \sqrt{2})$, із умови п. 1 теореми 2 маємо

$$\alpha_{\eta} < (2 - 1)^{1/2} \leftrightarrow \alpha_{\eta}^2(\sqrt{2} + 1) < 1 \leftrightarrow m^2(\sqrt{2} + 1) + m^2 < \sigma_{\eta}^2 + m^2 \leftrightarrow s_{21} < s_2.$$

На цьому перша частина доведення теореми 2 завершена.

2. Для доведення другої частини теореми 2 застосовуємо теорему 1. Побудуємо многочлен $U_2(x)$, що відповідає ф.р. $F_{\eta 2}(x)$. За умови 1 теореми 1 необхідно, щоб виконувались рівності

$$U_2(0) = g(0) = 1, \quad U_2(x_{22}) = g(x_{22}) = \frac{m^2}{\sigma^2} = \alpha_{\eta}^2.$$

Функція $g(x)$ диференційовна в точці $x_{22} > 2m$, тому $U_2'(x_{22}) = g'(x_{22})$ і многочлен $U_2(x)$ можна записати за формулою Тейлора:

$$U_2(x) = g(x_{22}) + g'(x_{22})(x - x_{22}) + a_2(x - x_{22})^2. \quad (9)$$

Коефіцієнт a_2 знаходиться з умови $U_2(0) = 1 \leftrightarrow g(x_{22}) - g'(x_{22})x_{22} + a_2x_{22}^2 = 1$. Після тотожних перетворень отримуємо

$$a_2 = \frac{m^2(2\sigma^4 - s_2^2)}{\sigma^4 s_2^2}. \quad (10)$$

В умові п. 2 теореми 2 нерівність $(\sqrt{2} - 1) \leq \alpha_{\eta}^2$ є еквівалентною нерівності $\sqrt{2}\sigma_{\eta}^2 \leq s_2$, яка є необхідною умовою існування екстремального многочлена $U_2(x)$: $a_2 \leq 0$ (див. (10)). Рівність $(\sqrt{2} - 1) = \alpha_{\eta}^2$ еквівалентна рівності $m^2(\sqrt{2} + 2) = s_2$, звідки випливає рівність моментів, точок росту ф.р. $F_{\eta 1}(x)$ і $F_{\eta 2}(x)$, стрибків в цих точках, рівність відповідних многочленів. Позначимо цю точку $\alpha_{\eta} = \alpha_{\eta 1}$, тобто $\alpha_{\eta 1}$ — це така особлива гранична точка α_{η} , в якій різні ф.р. $F_{\eta 1}(x)$ і $F_{\eta 2}(x)$ стають однаковими. Другою особливою граничною точкою є $\alpha_{\eta 2}$, в якій співпадають ф.р. $F_{\eta 2} = F_{\eta 3}$, $U_2(x) = U_3(x)$. Ця точка буде знайдена під час доведення третьої частини теореми 2.

Тепер доведемо, що для многочлена $U_2(x)$ виконується друга умова теореми 1. Нехай $x \in [0, 2m]$. Тоді (див. (6)) $\{\varphi_2(0) = 0, \varphi_2'(0) = 0, \varphi_2''(x) > 0\} \rightarrow \varphi_2(x) \geq 0$. Для

$\forall x \geq 2m: \{ \varphi_2(2m) > 0, \varphi_2(x_{22}) = 0, \varphi'_2(x_{22}) = 0, \varphi''_2(x) > 0 \} \rightarrow \varphi_2(x) \geq 0$. Отже, для многочлена $U_2(x)$ виконуються всі необхідні і достатні умови теореми 1 і на відповідній йому ф.р. $F_{\eta 2}(x)$ досягається мінімум функціонала $J(F_{\eta})$, $F_{\eta} \in [E]$. Друга частина теореми 2 доведена.

3. Доведемо третю частину теореми 2. Досліджуємо ф.р. $F_{\eta 3}(x)$ і відповідний многочлен $U_3(x)$. Ф.р. $F_{\eta 3}(x)$ має дві точки росту: $x_{13} = (m - a\sigma_{\eta})$, $x_{13} \in (0, m)$, і $x_{23} = (m + \frac{\sigma_{\eta}}{a}) > 2m$, що пов'язані між собою рівностями: $B(x_{13}) = x_{23}$, $B(x_{23}) = x_{13}$, де $B(x) = \frac{s_2 - s_1 x}{s_1 - x}$. Крім того, вони задовольняють рівняння

$$L(x_{13}, x_{23}) = 0 \leftrightarrow g'(x_{13}) + g'(x_{23}) - \frac{2(g(x_{23}) - g(x_{13}))}{x_{23} - x_{13}} = 0.$$

Розглянемо його детальніше. Для цього (див. (5)) обчислимо рівняння $g'(x_{13}) = 0$, $g'(x_{23}) = -\frac{ma^2}{\sigma_{\eta}^2}$, $g(x_{23}) = \frac{ma}{\sigma_{\eta}}$, $g(x_{13}) = 1$, $x_{23} - x_{13} = \frac{\sigma_{\eta}(1 + a^2)}{a}$.

Після тотожних перетворень знаходимо

$$L(x_{13}, x_{23}) = 0 \leftrightarrow ma^3 + 3ma - 2\sigma = 0 \leftrightarrow a^3 + 3a - \frac{2}{\alpha_{\eta}} = 0.$$

Отже,

$$L(x_{13}, x_{23}) = 0 \leftrightarrow a^3 + 3a - \frac{2}{\alpha_{\eta}} = 0. \quad (11)$$

За формулами Кардано [7] це кубічне рівняння має один дійсний корінь і два комплексних кореня. Дійсний розв'язок має вигляд

$$a = a(\alpha_{\eta}) = \left[\sqrt{\frac{1}{\alpha_{\eta}^2} + 1} + \frac{1}{\alpha_{\eta}} \right]^{1/3} - \left[\sqrt{\frac{1}{\alpha_{\eta}^2} + 1} - \frac{1}{\alpha_{\eta}} \right]^{1/3}. \quad (12)$$

Знайдемо $a'(\alpha_{\eta})$:

$$\begin{aligned} a'(\alpha_{\eta}) &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{\alpha_{\eta}} (\sqrt{\frac{1}{\alpha_{\eta}^2} + 1} + 1) \right]^{-2/3} \left[-\frac{\sqrt{\frac{1}{\alpha_{\eta}^2} + 1} + 1}{\alpha_{\eta}^2} + \frac{2\alpha_{\eta}}{2\alpha_{\eta} \sqrt{\frac{1}{\alpha_{\eta}^2} + 1}} \right] - \\ &- \frac{1}{3} \left[\frac{1}{\alpha_{\eta}} (\sqrt{\frac{1}{\alpha_{\eta}^2} + 1} - 1) \right]^{-2/3} \left[-\frac{\sqrt{\frac{1}{\alpha_{\eta}^2} + 1} - 1}{\alpha_{\eta}^2} + \frac{2\alpha_{\eta}}{2\alpha_{\eta} \sqrt{\frac{1}{\alpha_{\eta}^2} + 1}} \right] = \dots \\ &\dots = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{\alpha_{\eta}} (\sqrt{\frac{1}{\alpha_{\eta}^2} + 1} + 1) \right]^{-2/3} \left[-\frac{\sqrt{\frac{1}{\alpha_{\eta}^2} + 1} + 1}{\alpha_{\eta}^2 \sqrt{\frac{1}{\alpha_{\eta}^2} + 1}} \right] - \\ &- \frac{1}{3} \left[\frac{1}{\alpha_{\eta}} (\sqrt{\frac{1}{\alpha_{\eta}^2} + 1} - 1) \right]^{-2/3} \left[\frac{\sqrt{\frac{1}{\alpha_{\eta}^2} + 1} - 1}{\alpha_{\eta}^2 \sqrt{\frac{1}{\alpha_{\eta}^2} + 1}} \right] < 0. \end{aligned}$$

Отже, $a'(\alpha_\eta) < 0$, $\lim_{\alpha_\eta \rightarrow \infty} a(\alpha_\eta) = 0$.

У третій частині теореми 2 параметр α_η змінюється в інтервалі $\alpha_{\eta 2} \leq \alpha_\eta < \infty$. У точці $\alpha_{\eta 2}$ збігаються ф.р.: $F_{\eta 2} = F_{\eta 3}$ та відповідні їм многочлени: $U_2(x) = U_3(x)$. Інакше кажучи, якщо $\alpha_\eta = \alpha_{\eta 2}$, то $x_{12} = x_{13} \leftrightarrow 0 = m - a\sigma \leftrightarrow a = \frac{m}{\sigma} \leftrightarrow a = \alpha_\eta$. Таким чином, маємо рівняння

$a = \alpha_\eta$, з якого можна знайти числове значення $\alpha_{\eta 2}$. Перевіримо, що для $a = \alpha_\eta$ маємо $x_{13} = x_{12} = 0$, $U_3(0) = U_2(0) = 1$, $U'_3(0) = U'_2(0) = 0$, $U''_3(0) < 0$, $U''_2(0) < 0$. З цього випливає, що в точці $x = 0$ обидва многочлени дотикаються до функції $g(x)$ справа і мають в ній максимальне значення, яке дорівнює 1.

Із (9) і рівності $U'_2(0) = 0$ знаходимо $g'(x_{22}) = 2a_2 x_{22} \leftrightarrow a_2^* = -\frac{m^4}{2\sigma_\eta^4 s_2}$. Отже,

для $\alpha_\eta = \alpha_{\eta 2}$ маємо ще одне значення коефіцієнта $a_2 = a_2^*$, яке не дорівнює (10). Знайдемо старший коефіцієнт a_3 многочлена $U_3(x)$ і порівняємо його з $a_2^* = -\frac{m^4}{2\sigma_\eta^4 s_2}$. Многочлен $U_3(x)$ дорівнює $g(x_{13}) + a_3(x - x_{13})^2$. Коефіцієнт a_3

знаходимо за відомою формулою

$$a_3 = \frac{g'(x_{23}) - g'(x_{13})}{2(x_{23} - x_{13})} \rightarrow a_3 = -\frac{ma^3}{2\sigma^3(1+a^2)} < 0,$$

$$a_3 - a_2^* = \frac{m}{2\sigma^3} \left(-\frac{a^3}{1+a^2} + \frac{m^3}{\sigma s_2} \right) = \frac{m}{2\sigma^3} \left(\frac{\alpha_\eta^3}{1+\alpha_\eta^2} - \frac{a^3}{1+a^2} \right).$$

Із цього ланцюжка рівностей випливає, що $a_3 = a_2^*$ тоді і тільки тоді, коли $\exists \alpha_\eta = a$. Щоб знайти числове значення α_η , яке співпадає з a , скористаємося більш простим рівнянням (11) для a , якому повинно задовольняти те значення α_η , що дорівнює a : $\alpha_\eta^3 + 3\alpha_\eta - \frac{2}{\alpha_\eta} = 0 \leftrightarrow \alpha_\eta^4 + 3\alpha_\eta^2 - 2 = 0$. Виконаємо

заміну $\alpha_\eta^2 = z$ і одержимо рівняння $z^2 + 3z - 2 = 0$, звідки $z = \frac{\sqrt{17}-3}{2} \rightarrow \alpha_{\eta 2} = \left[\frac{\sqrt{17}-3}{2} \right]^{1/2}$. Отже, знайдено числове значення α_η , в якому збігаються ф.р.: $F_{\eta 2} = F_{\eta 3}$.

Наостанок доведемо виконання умови 2 теореми 1 для многочлена $U_3(x)$, який розглянемо детальніше: $U_3(x) = 1 + a_3(x - x_{13})^2 \rightarrow U'_3(x) = 2a_3(x - x_{13}) \rightarrow U''_3(x) = 2a_3 \rightarrow \forall x \geq 0: U''_3(x) < 0$, оскільки $a_3 < 0$. Із $U_3(0) = 1 + a_3 x_{13}^2 \rightarrow \rightarrow \varphi_3(0) = -a_3 x_{13}^2 > 0$. Тоді маємо

$$\{\varphi_3(0) > 0, \varphi_3(x_{13}) = \varphi'_3(x_{13}) = 0, \varphi''_3(x) > 0\} \rightarrow \forall x \in [0, 2m]: \varphi_3(x) \geq 0.$$

Для всіх $x \geq 2m$: $\{\varphi_3(2m) > 0, \varphi_3(x_{23}) = \varphi'_3(x_{23}) = 0, \varphi''_3(x) > 0\} \rightarrow \varphi_3(x) \geq 0$. Отже, виконано всі умови теореми 1, тому розглянута сім'я ф.р. $F_{\eta 3}(x)$ є екстремальною і доставляє мінімум функціоналу $J(F_\eta)$ в інтервалі $[\alpha_{\eta 2} \leq \alpha_\eta < \infty)$.

Теорему 2 доведено.

Зауваження 1. Нехай $\alpha_\eta \rightarrow \infty$. Тоді із зростанням параметра α_η величини $a(\alpha_\eta)$ і σ_η зменшуються до нуля і точка $x_{13} = m - a\sigma$ прямує до m . Стрибок в цій точці $p_{13} = \frac{x_{23} - m}{x_{23} - x_{13}}$ прямує до 1. Стрибок у точці x_{23} , якщо $x_{13} \rightarrow m$,

$p_{23} = \frac{m - x_{13}}{x_{23} - x_{13}}$ прямує до нуля. Точку x_{23} можна знайти з рівняння

$L(x_{13}, x_{23}) = 0$, розв'язавши його відносно x_{23} , $L(x_{13}, x_{23}) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow m(x_{23} - x_{13}) = 2(x_{23} - m)(x_{23} - 2m)$. Якщо $x_{13} = m$, то $x_{23} = 2.5m$. Таким чином, якщо $\alpha_\eta \rightarrow \infty$, то ф.р. $F_{\eta 3}(x)$ прямує до одиничної функції розподілу в точці $s_1 = m$. Це означає, що для досить малих значень a і σ_η мінімальна ймовірність влучення випадкової величини μ в інтервал шириною $2m$ може бути як завгодно близькою до 1.

Зауваження 2. Зазначимо той факт, що найменші оцінки ймовірності $P\{0 < \mu < 2m\}$ не залежать від параметра m , оскільки вони обчислюються за формулами $\min_{F_\eta \in E} \int_0^\infty g(x) dF_\eta(x) = \sum_{i=1}^2 g(x_{ij}) p_{ij}$, де j — номер екстремальної ф.р.

$F_{\eta j}(x)$, $j=1,2,3$. Кожна з трьох ф.р. має тільки дві точки росту x_{ij} і відповідні стрибки в них дорівнюють p_{ij} (див. теорему 2), а значення $g(x_{ij})$ (див. (5)) залежать не від m , а тільки від $\alpha_\eta = \frac{m}{\sigma_\eta}$.

Зауваження 3. Верхня оцінка ймовірності $P\{0 < \mu < 2m\}$ завжди дорівнює 1 і досягається на одиничній ф.р. $F_\eta^*(x)$ з точкою росту $x_1^* = m$ і стрибком в ній $p_1^* = 1$. Ця ф.р. зберігає тільки перший момент $s_1 = m$, а другий момент не зберігає. Граничний екстремальний многочлен: $\forall x \geq 0: U^*(x) = 1$.

Задачу 2 розв'язано.

Тепер перейдемо до формулювання результатів розв'язку задачі 1, що випливають із результатів розв'язку задачі 2.

Зауважимо, що:

$$1) \alpha_\mu = \alpha_\eta \sqrt{3}, \sigma_\mu = \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}};$$

2) із перетворення з [2] $dF_\eta(x) = (m - x) df_\mu(x)$ і характеристики крайніх точок множини $[E]$ [3, 5] легко знайти структуру крайніх точок множини $[A]$.

Інакше кажучи, східчастій ф.р. $F_\eta(x) \in [E]$ відповідає кусково-лінійна ф.р. $F_\mu(x) \in [A]$, що має кусково-постійну щільність $f_\mu(x)$ із стрибками в точках росту ф.р. $F_\eta(x) \in [E]$ і, можливо, в точці m (моді). Якщо точка m збігається з однією із точок росту $F_\eta(x) \in [E]$, то відповідна функція $F_\mu(x)$ буде мати в точці m стрибок, а щільність $f_\mu(x)$ — мати δ -функцію. Фактично із цього зауваження і теореми 2 випливає теорема 3 як наслідок теореми 2.

Теорема 3. 1. Якщо параметр α_μ змінюється в інтервалі $0 < \alpha_\mu \leq (\sqrt{2} - 1)^{1/2} \sqrt{3}$, то інфімум функціонала $I(F_\mu)$ обчислюється на ф.р. $F_{\mu 1}(x)$, що визначається таким чином:

$$\{F_{\mu 1}(x) = \frac{x p_{11}}{m}, x \in (0, m); F_{\mu 1}(x) = p_{11} + \frac{(x - m) p_{21}}{x_{21} - m}, x \in (m, x_{21})\},$$

де

$$p_{11} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}, \quad p_{21} = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}, \quad x_{11} = 0, \quad x_{21} = m(2 + \sqrt{2}),$$

$$\inf_{F_\mu(x) \in A} I(F_\mu) = \inf_{F_\mu(x) \in [A]} I(F_{\mu 1}) = \int_0^{2m} dF_{\mu 1}(x) = F_{\mu 1}(2m) = 2(\sqrt{2} - 1) \approx 0.82843.$$

$$\text{Позначимо } \alpha_{\mu 1} = (\sqrt{2} - 1)^{1/2} \sqrt{3} \approx 1.1147, \quad \alpha_{\mu 2} = \sqrt{3} \left[\frac{\sqrt{17} - 3}{2} \right]^{1/2} \approx 1.297947.$$

2. Якщо параметр α_μ змінюється в інтервалі $\alpha_{\mu 1} \leq \alpha_\mu \leq \alpha_{\mu 2}$, то мінімум функціонала $I(F_\mu)$ досягається на ф.р. $F_{\mu 2}(x)$:

$$\{F_{\mu 2}(x) = \frac{xp_{12}}{m}, \quad x \in (0, m); \quad F_{\mu 2}(x) = p_{12} + \frac{(x-m)p_{22}}{x_{22} - m}, \quad x \in (m, x_{22})\},$$

де

$$p_{12} = \frac{1}{1 + \alpha_\eta^2}, \quad p_{22} = \frac{\alpha_\eta^2}{1 + \alpha_\eta^2}, \quad x_{12} = 0, \quad x_{22} = \frac{m^2 + \sigma_\eta^2}{m},$$

$$\begin{aligned} \min_{F_\mu(x) \in A} I(F_\mu) &= I(F_{\mu 2}) = F_{\mu 2}(2m) = p_{12} + \frac{mp_{22}}{x_{22} - m} = \frac{1 + \alpha_\eta^4}{1 + \alpha_\eta^2} = \\ &= J(F_{\eta 2}) \leq \frac{1 + \alpha_\eta^4}{1 + \alpha_\eta^2} \approx 0.84233. \end{aligned}$$

3. Якщо параметр α_μ змінюється в інтервалі $\alpha_{\mu 2} \leq \alpha_\mu < \infty$, то із його збільшенням від $\alpha_{\mu 2}$ кожному α_μ буде відповідати своя (єдина) екстремальна ф.р. $F_{\mu 3}(x)$:

$$\begin{aligned} \{F_{\mu 3}(x) &= \frac{(x - x_{13})p_{13}}{m - x_{13}}, \quad x_{13} \geq 0, \quad x \in (x_{13}, m); \quad F_{\mu 3}(x) = \\ &= p_{13} + \frac{(x - m)p_{23}}{x_{23} - m}, \quad x \in (m, x_{23})\}, \end{aligned}$$

де

$$x_{13} = (m - a\sigma_\eta), \quad x_{13} \in (0, m); \quad x_{23} = (m + \frac{\sigma_\eta}{a}) > 2m; \quad p_{13} = \frac{a^2}{1 + a^2}; \quad p_{23} = \frac{a^2}{1 + a^2};$$

$$\min_{F_\mu(x) \in [A^*]} I(F_\mu) = I(F_{\mu 3}) = F_{\mu 3}(2m) = \frac{1 + \alpha_\eta a^3}{1 + a^2} = J(F_{\eta 3}).$$

З теореми 3 отримуємо важливий результат: $\inf_{F_\mu(x) \in [A]} I(F_\mu) = \inf_{F_\eta(x) \in [E]} J(F_\eta)$.

До теореми 3 можна додати такі самі зауваження, як і до теореми 2.

Представлена тут теоретична частина роботи написана першим автором. Другий автор цієї статті розробив програму під назвою «Sigma», що базується на відомих ідеях стохастичного і лінійного програмування, зокрема симплекс-методу [8, 9]. Ця програма розв'язує задачу знаходження точних оцінок

лінійних функціоналів, що мають загальний вигляд $\int_0^{\infty} g(x) dH(x)$, де функція

$g(x)$ відома, а функція розподілу $H(x)$ належить до класу ф.р. із заданими двома першими моментами. Програма розроблена в середовищі Visual Studio 2019, мова програмування с#. Для програмної реалізації використовували бібліотеку MathNet.Numerics 5.0.0 для матричних обчислень, знаходження екстремальних ф.р., середнього квадратичного відхилення від моди тощо.

Бібліотеку System.ValueTuple 4.4.0 використовували для побудови та відображення графіків функцій $g(x)$, $H(x)$, а також для введення/виведення, оброблення, зберігання і відображення даних у стандартному вікні ОС Windows. Програма також передбачає можливість зберігання обчислень в таблиці Excel для подальшого оброблення та аналізу. Для цього використовували бібліотеку Microsoft.Office.Interop.Excel, яка підключена як додаток Microsoft.Office.Interop.Excel.Application. Програма дозволяє зберігати у файлі обчислення з різними параметрами, будувати різні графіки в одному вікні, виводити розрахункові значення параметрів та функцій $g(x)$ і $H(x)$ з усіма вхідними значеннями як введеними в ручному режимі, так і збереженими у файлі.

ЧИСЛОВИЙ ПРИКЛАД

У табл. 1 наведено розрахунки за програмою «Sigma», що підтверджують математичну модель і демонструють процес збільшення ймовірності попадання у разі збільшення відношення $\alpha_{\eta} = \frac{m}{\sigma_{\eta}}$, де m — мода, а σ_{η} — се-

реднє квадратичне відхилення від моди. Крім того, наведено розрахунки для задачі 2; але табл. 1 легко трансформувати для задачі 1 внаслідок простих співвідношень між параметрами і функціоналами

$$\alpha_{\mu} = \alpha_{\eta} \sqrt{3}, \quad \sigma_{\mu} = \frac{\sigma_{\eta}}{\sqrt{3}}, \quad I(F_{\mu}) = J(F_{\eta}), \quad \inf_{F_{\mu}(x) \in [A]} I(F_{\mu}) = \inf_{F_{\eta}(x) \in [E]} J(F_{\eta}).$$

Мінімуми відповідних функціоналів не залежать від параметра $m = s_1$.

Відмітимо деякі особливості розрахунків за програмою «Sigma».

1. Програма «Sigma» розрахована на пошук екстремальних ф.р. з трьома точками росту X_1, X_2, X_3 та відповідними їм стрибками P_1, P_2, P_3 (для розв'язання задачі 2) для кожного значення параметра α_{η} (табл. 1). З теореми 2 випливає, що в задачі 2 всі три екстремальні ф.р. мають по дві точки росту. Тому програма «роздвоює» одну із двох точок, розміщуючи їх близько одна від одної (рядки 2–10).

2. Потребує пояснення перший рядок табл. 1. Йдеться про ф.р. $F_{\eta 1}(x)$, що є границею послідовності ф.р. $F_{\eta n}(x)$, $n \rightarrow \infty$, які мають такі точки росту: $x_1 = 0$, $x_2 = x_{2n}$, $x_3 = n$ (див. теорему 3, п. 1). В обчисленнях фігурує точка Q , яку можна розглядати як $Q = n$. Із збільшенням Q друга точка росту x_{2n} наближується до $x_{22} = m(2 + \sqrt{2})$. Зазначимо, що для $Q = 8000$ програма зупиняється, оскільки не може виконати граничний перехід. Якщо зафіксувати $s_2 = s_{21} = m^2(2 + \sqrt{2})$, $\sigma_{\eta 1}^2 = s_{21} - m^2$; $\sigma_{\eta 1} = m(1 + \sqrt{2})^{1/2}$ (моменти граничної ф.р. $F_{\eta 1}$) і застосувати до розрахунку будь-яке значення α_{η} із інтервалу $(0, (\sqrt{2} - 1)^{1/2})$, то отримаємо екстремальну граничну ф.р. $F_{\eta 1}$.

Таблиця 1. Екстремальні функції розподілу та найменші значення ймовірностей $P\{0 < \mu < m\}$ в залежності від параметра α_η , якщо $m=10$

Но- мер ряд- ка	Пара- метр α_η	Від- хилення σ_η	Функції розподілу з точками росту X_i та стрибками P_i						$\min$ $P\{0 < \mu < m\}$	Пара- метр $a(\alpha_\eta)$
			X_1	X_2	X_3	P_1	P_2	P_3		
1	0.64 ($Q=$ $=2000$)	15.625	0	34.6375	2000	0.709097	0.290903	9.94E-08	0.828442	—
2	0.643594	15.53775	0	34.14215	34.1875	0.707107	0.292906	-1.3E-05	0.828427	—
3	0.65	15.38462	0	33.66864	33.6709	0.702988	0.296785	0.000227	0.828475	—
4	0.74	13.51351	0	28.26151	28.2627	0.646162	0.35357	0.000268	0.839924	—
5	0.749	13.35113	0	27.82528	27.82617	0.640615	0.358862	0.000524	0.84223	—
6	0.749368	13.34458	0	27.80778	27.80859	0.640388	0.359789	-0.00018	0.84242	0.749368
7	0.7497	13.33867	(0.007789)	(27.80588)	27.79297	(0.640543)	(0.359457)	0.359791	0.842419	0.749116
8	0.76	13.1579	0.1875	0.25	27.75	0.039293	0.606072	0.354635	0.845159	0.741368
9	1	10	4	4.0625	26.78125	0.2620461	0.25377	0.48418	0.8941	0.596071
10	10	1	9.90625	9.9375	25.03125	0.128099	0.867495	0.004406	0.998525	0.066568
11	20	0.5	(9.9833)	(25.00555)	25	(0.99889)	(0.00110)	0.001109	0.999630	0.033321
12	40	0.25	(9.98334)	(25.0015)	25	(0.9997)	(0.000277)	0.000277	0.99990	0.016665
13	200	0.05	(9.99983)	(25.0015)	25	(0.99999)	(0.00001)	1.11E-05	0.999996	0.003333
14	1000	0.01	9.96875	10.00001	25	0.000516	0.999484	4.39E-07	1	0.000667
15	1000	0.01	(9.999993)	(24.9925)	25	(0.9999995)	(0.000000445)	0	(0.9999998)	0.000667

3. Числа, що фігурують в табл. 1 в дужках, обчислено за формулами теореми 2 для порівняння з розрахунками за програмою. Це стосується ф.р. $F_{\eta 3}(x)$, які мають точки росту $x_{13} = m - a \sigma_\eta$, $x_{23} = m + \frac{\sigma_\eta}{a}$. Для цього в табл. 1 наведено результати обчислень a і σ_η для відповідних α_η .

4. Числа $\alpha_{\eta 1}$ і $\alpha_{\eta 2}$ визначають умови існування ф.р. Якщо $\alpha_\eta = \alpha_{\eta 1}$, то $F_{\eta 1}(x) = F_{\eta 2}(x)$. Якщо $\alpha_\eta = \alpha_{\eta 2}$, то $F_{\eta 2}(x) = F_{\eta 3}(x)$. Це точки розбиття всієї області параметра $\alpha_\eta: 0 < \alpha_\eta < \infty$ на три підобласті і не залежать від параметра m . Від m не залежать також стрибки в точках росту екстремальних ф.р. і значення $g(x)$ у відповідних точках росту. Звідси випливає незалежність від m (а залежність тільки від α_η) всіх відповідних $\min P\{0 < \mu < 2m\}$. У табл. 1 показники $\alpha_{\eta 1}$ і $\alpha_{\eta 2}$ виділені напівжирним шрифтом.

Розглянемо приклади розрахунків з використанням показників табл. 1.

Приклад 1. Ширина танка дорівнює 3.5 м. Яким може бути максимальне середнє квадратичне відхилення σ_μ від точки прицілу m до точки попадання, щоб снаряд улучив у танк з імовірністю $\min P = 0.894$?

Розв'язок. З табл. 1 знаходимо в стовпці $\min$ число 0.8941 і відповідне йому $\alpha_\eta = 1$. Ширина танка визначає моду $m = 3.5:2 = 1.75$. За формулою

$$\sigma_\eta = \frac{m}{\alpha_\eta} = \frac{1.75}{1} = 1.75, \quad \sigma_\mu = \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}} = \frac{1.75}{\sqrt{3}} = 1.01. \quad \text{Відповідь: } 1.01\text{м.}$$

Приклад 2. Виконуються три незалежних постріли по об'єкту, що має вигляд полоси шириною $2m$. З кожним пострілом середнє квадратичне відхилення від точки влучення снаряду до моди m дорівнює $\sigma_\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$. З використанням

показників табл. 1 знайти ймовірність p влучення снаряду в об'єкт за один постріл і ймовірності таких подій:

A — хоча б одне влучання снаряду в об'єкт з трьох пострілів.

B — не менше двох попадань снаряду в об'єкт.

Розв'язок. З рівності $\sigma_\mu = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \sigma_\eta = 1 \rightarrow \alpha_\eta = m$ випливає

$p = 0.9985 \rightarrow 1 - p = q = 0.0015$. Звідси $P(A) = 1 - q^3 = 0.9999999663$, $P(B) = 3p^2q + p^3 = 0.0044865 + 0.9955 = 0.9999865 < P(A)$.

ВИСНОВКИ

У цій статті розв'язано складну параметричну математичну задачу для оцінки ймовірності влучення снаряду в смугу заданої ширини, маючи інформацію тільки про величину середнього квадратичного відхилення σ_μ . Створено програму для чисельних розрахунків для конкретних значень параметрів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Stoikova L.S., Kovalchuk L.V. Exact estimates for some linear functionals of unimodal distribution functions under incomplete information. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, N 6. P. 914–925. <https://doi.org/10.1007/s10559-019-00201-z>.
2. Johnson N.L., Rogers C.A. The moment problem for unimodal distribution. *Ann. Math. Stat.* 1951. Vol. 22. P. 433–439.
3. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. Москва: Наука, 1976. 568 с.
4. Stoikova L.S. An alternative proof of Gauss's inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2023. Vol. 59, N 2. <https://doi.org/10.1007/s10559-023-00557-3>.
5. Mulholland H.P., Rogers C.A. Representation theorems for distribution functions. *Proc. London Math. Soc.* 1958. Vol. 8, N 3, P. 177–223.
6. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Москва: Наука, 1973. 551 с.
7. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. Москва: Госиздат технико-теоретической литературы, 1956. 608 с.
8. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. Москва: Наука, 1975. 239 с.
9. Голодников А.Н., Стойкова Л.С. Численный метод оценки некоторых функционалов, характеризующих надежность. Киев: *Кибернетика*. 1978. № 2, С. 73–77.

L.S. Stoikova, V.E. Chevardin

ACCURATE ESTIMATES OF THE PROBABILITY OF A RANDOM VARIABLE FALLING INTO A GIVEN INTERVAL IN ONE CLASS OF UNIMODAL DISTRIBUTIONS

Abstract. A class A of unimodal distribution functions is considered, for which only the first two moments and the mode m , which coincides with the first moment, are known. In this class, accurate estimates of the probability of a random variable μ falling into the interval $(0, 2m)$ are found. Defined supplemental parameters α_η and α_μ , changing from 0 to ∞ , guide the entire process of solving the problem: extremal distribution functions are found that give accurate estimates to the corresponding functional; highlighting the areas of existence of these distribution functions with numbers; the problem turns out to be solved for all possible values of the mean square deviations σ_μ of the random variable μ . Unimodal extremal distribution functions from class A were found in an explicit form.

Keywords: exact estimates, linear functionals, classes of unimodal distribution functions.

Надійшла до редакції 15.04.2023