

БАГАТОКРИТЕРІЙНІ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ З ВЕКТОРНИМИ НЕОДНОРІДНИМИ ЗГОРТКАМИ КРИТЕРІЇВ

Анотація. Розглянуто багатокритерійні задачі прийняття рішень з критерійними порядками надання переваги, що є згортками згорток. Досліджено випадки, коли на множині векторних критеріїв задано субординацію рівної важливості або субординацію строгого ранжування. В обох випадках згортки в межах складових векторних критеріїв можуть бути неоднорідними. Доведено еквівалентність розглядуваних задач відповідним багатокритерійним задачам з однорідним (однаковим) ранжуванням у межах часткових векторних критеріїв.

Ключові слова: багатокритерійна задача оптимізації, згортки критеріїв, згортки згорток, векторні критерії, неоднорідні згортки критеріїв.

ВСТУП

У цій роботі розглянуто задачу прийняття рішень багатьма експертами, в якій кожен експерт задає правило надання переваги за допомогою наперед заданого критерію [1–17]. Не зменшуючи загальності міркувань, будемо вважати, що множину допустимих розв'язків $X \subset R^n$ задачі задано лінійними обмеженнями. Критерії експертів є однорідними [1], тобто мають спільну шкалу і відрізняються тільки скалярними лінійними критерійними функціями

$$c_{ki}(x) \geq 0, \quad x \in X, \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad i = 1, 2, \dots, q_k. \quad (1)$$

У кожному критерії (1) порядок надання переваги задано відношенням «більше», тобто для всіх альтернатив $x, y \in X$ альтернатива x краща за y , якщо $c_{ki}(x) > c_{ki}(y)$. За деяким правилом критерії розбито на окремі q груп. У межах кожної групи з використанням деякої субординації s задано згортку критеріїв (векторний критерій κ_k^s) з векторною цільовою функцією

$$c_k = (c_{k1}(x), c_{k2}(x), \dots, c_{kq_k}(x)), \quad k = 1, 2, \dots, q. \quad (2)$$

На множині груп критеріїв також задано деяку субординацію g , що дає змогу отримати згортку згорток — векторний критерій κ^{gs} з векторною критерійною функцією

$$\bar{c}(x) = (c_1(x), c_2(x), \dots, c_q(x)). \quad (3)$$

Деякі такі багатокритерійні задачі оптимізації з векторними критерійними функціями розглянуто в [1]. Залежно від вибору субординацій s та g отримують лексикографічно-лексикографічну, парето-паретівську, парето-лексикографічну або лексикографічно-паретівську задачі оптимізації [1].

ПАРЕТІВСЬКІ ЗАДАЧІ З ВЕКТОРНИМИ НЕОДНОРІДНИМИ ЗГОРТКАМИ КРИТЕРІЇВ

Нехай у межах кожної групи критеріїв (1) задано субординацію строгого ранжування Rg [1], тобто за кожним векторним критерієм κ_k^L альтернатива x краща за альтернативу y , якщо

$$c_k(x) >^L c_k(y), \quad k = 1, 2, \dots, q. \quad (4)$$

Вважатимемо, що на множині цих критеріїв задано субординацію рівної важливості R_v [1], яка визначає векторний критерій κ^{PL} . Згідно з цим критерієм, для всяких допустимих альтернатив $x, y \in X$, альтернатива x краща за y , якщо

$$c_k(x) \geq^L c_k(y), \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad (5)$$

та існує такий індекс t , $1 \leq t \leq q$, що

$$c_t(x) >^L c_t(y). \quad (6)$$

Задачу знаходження оптимальних альтернатив за критерієм κ^{PL} називають задачею парето-лексикографічної оптимізації [1]

$$\max^{PL} \bar{c}(x), \quad x \in X. \quad (7)$$

В [1] доведено, що розв'язок задачі парето-лексикографічної оптимізації (7) можна знайти як розв'язок задачі лексикографічної оптимізації

$$\max^L l(\bar{c}(x)), \quad x \in X, \quad (8)$$

де

$$l(\bar{c}(x)) = \alpha_1 c_1(x) + \alpha_2 c_2(x) + \dots + \alpha_q c_q(x), \quad \alpha_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, q. \quad (9)$$

Розглянемо задачу багатокритерійної оптимізації, де в межах переважної більшості груп критеріїв (1) задано субординацію строгого ранжування R_g , але для деяких груп критеріїв задано субординацію рівної важливості R_v . Не зменшуючи загальності міркувань, будемо вважати, що таким є тільки один векторний критерій κ_r^P , $1 \leq r \leq q$. Згідно з цим критерієм для всяких допустимих альтернатив $x, y \in X$ альтернатива x краща за y , якщо

$$c_r(x) >^P c_r(y), \quad (10)$$

тобто

$$c_{ri}(x) \geq c_{ri}(y), \quad i = 1, 2, \dots, q_r, \quad (11)$$

та існує такий індекс h , $1 \leq h \leq q_r$, що

$$c_{rh}(x) > c_{rh}(y). \quad (12)$$

Позначимо згортку цих неоднорідних критеріїв $\kappa^{P\{L|P\}}$, а відповідну задачу

$$\max^{P\{L|P\}} \bar{c}(x), \quad x \in X, \quad (13)$$

будемо називати паретівською задачею з векторними неоднорідними згортками критеріїв. У задачі (13) для всяких допустимих альтернатив $x, y \in X$ альтернатива x краща за y , якщо

$$c_k(x) \geq^L c_k(y), \quad k \in \{1, 2, \dots, q\} \setminus \{r\}, \quad (14)$$

$$c_r(x) \geq^P c_r(y), \quad (15)$$

і виконується принаймні одна з таких умов:

існує такий індекс t , $t \in \{1, 2, \dots, q\} \setminus \{r\}$, що

$$c_t(x) >^L c_t(y), \quad (16)$$

або

$$c_r(x) >^P c_r(y). \quad (17)$$

Наявність критерію κ_r^P порушує правила, задані у класичній задачі парето-лексикографічної оптимізації [1]. Отже, до неї не можна застосувати відповідні правила її розв'язання.

Нехай критерій κ^E є критерієм байдужості на X з критерійною функцією $E: X \rightarrow R$, тобто

$$E(x) = E(y), \quad \forall x, y \in X.$$

Замінімо критерій κ_r^P послідовністю критеріїв κ_{ri} з цільовими функціями

$$c_{ri}^i(x) = (c_{ri}(x), E(x), \dots, E(x)) \in R^{q^{\max}}, \quad i = 1, 2, \dots, q_r, \\ q^{\max} = \max \{q_k \mid 1 \leq k \leq q\}. \quad (18)$$

Зауважимо, що критерії байдужості можна застосувати тоді, коли потрібно вирівняти кількість критеріїв у групах.

Розглянемо задачу

$$\max^{PL} \bar{c}'(x), \quad x \in X, \quad (19)$$

де

$$\bar{c}'(x) = (c_1(x), c_2(x), \dots, c_{r-1}(x), c_r^1(x), c_r^2(x), \dots, c_r^{q_r}(x), c_{r+1}(x), \dots, c_q(x)). \quad (20)$$

Теорема 1. Задача (19) еквівалентна задачі (13) (їхні множини оптимальних розв'язків збігаються).

Доведення. Для доведення теореми покажемо, що порядки надання переваги у задачах (19) і (13) є еквівалентними, тобто кожен із них є підпорядком іншого за правилами надання переваги й рівноцінності [1].

Нехай деякі допустимі альтернативи $x, y \in X$ є рівноцінними у задачі (13). Це означає, що

$$c_k(x) = c_k(y), \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad (21)$$

отже,

$$c_{ki}(x) = c_{ki}(y), \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad i = 1, 2, \dots, q_k. \quad (22)$$

Оскільки критерій κ^E наводить порядок байдужості на множині X і виконуються умови (22), то

$$c_r^i(x) = c_r^i(y), \quad i = 1, 2, \dots, q_r. \quad (23)$$

З умов (21) і (23) випливає, що альтернативи x та y є рівноцінними у задачі (19).

Розглянемо випадок, коли деякі альтернативи $x, y \in X$ є рівноцінними у задачі (19). Це означає, що

$$c_k(x) = c_k(y), \quad k \in \{1, 2, \dots, q\} \setminus \{r\}, \quad (24)$$

і виконуються умови (23). З рівноцінності альтернатив x і y за критерієм κ^E випливає, що

$$c_{ri}(x) = c_{ri}(y), \quad i = 1, 2, \dots, q_r, \quad (25)$$

тобто $c_r(x) = c_r(y)$. Виконання умов (24) і (25) означає, що альтернативи x та y є рівноцінними у задачі (13). Отже, порядки надання переваги у задачах (13) і (19) є підпорядками один одного за рівноцінністю.

Доведемо, що порядки у задачах (13) і (19) є підпорядками один одного за правилами надання переваги. Нехай альтернатива x є кращою за альтернативу y у задачі (13). Це означає, що виконуються умови (14), (15) і принаймні одна з умов (16), (17). З умови (15) та еквівалентності альтернатив за критерієм κ^E випливає, що

$$c_r^i(x) \geq^L c_r^i(y), i = 1, 2, \dots, q_r. \quad (26)$$

Виконання умов (14), (26) і (16) означає, що альтернатива x є кращою за альтернативу y у задачі (19).

Нехай виконується умова (17), тобто існує такий індекс h , $1 \leq h \leq q_r$, що $c_{rh}(x) > c_{rh}(y)$. Звідси маємо, що $c_r^h(x) >^L c_r^h(y)$. Тому з умов (14), (26) і (17) також отримуємо, що альтернатива x є кращою за y у задачі (19).

Розглянемо випадок, коли альтернатива x є кращою за альтернативу y у задачі (19). Доведемо, що альтернатива x краща за альтернативу y у задачі (13). Якщо альтернатива x є кращою за альтернативу y у задачі (19), то

$$c_k(x) \geq^L c_k(y), k \in \{1, 2, \dots, q\} \setminus \{r\}, \quad (27)$$

$$c_r^i(x) \geq^L c_r^i(y), i = 1, 2, \dots, q_r, \quad (28)$$

і виконується умова (16) або існує такий індекс h , $1 \leq h \leq q_h$, що

$$c_r^h(x) >^L c_r^h(y). \quad (29)$$

З умов (28) і (29) випливає, що

$$c_r(x) >^P c_r(y). \quad (30)$$

Враховуючи умови (27) і (30) отримуємо, що альтернатива x є кращою за альтернативу y у задачі (13).

Нехай виконується нерівність (16). Оскільки з умов (28) випливає виконання умов (15), то з нерівностей (27), (28) і (16) отримуємо, що альтернатива x є кращою за альтернативу y у задачі (13). Отже, порядки у задачах (13) і (19) є підпорядками один одного за правилом надання переваги. Теорему доведено.

З еквівалентності задач (13) і (19) випливає, що розв'язки задачі (13) можна знайти як розв'язки задачі лексикографічної оптимізації

$$\max^L l'(\bar{c}'(x)), x \in X, \quad (31)$$

де

$$l'(\bar{c}'(x)) = \alpha_1 c_1(x) + \alpha_2 c_2(x) + \dots + \alpha_{r-1} c_{r-1}(x) +$$

$$+ \alpha_r^1 c_r^1(x) + \alpha_r^2 c_r^2(x) + \dots + \alpha_r^{q_r} c_r^{q_r}(x) +$$

$$+ \alpha_{r+1} c_{r+1}(x) + \dots + \alpha_r^q c_q(x),$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_r^1, \alpha_r^2, \dots, \alpha_r^{q_r}, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_q > 0.$$

Зазначимо, що згідно з [2, 3] досяжні оптимальні розв'язки задачі (13) можна знайти з використанням відповідних коефіцієнтів додатної згортки критеріїв.

ЛЕКСИКОГРАФІЧНІ ЗАДАЧІ З ВЕКТОРНИМИ НЕОДНОРІДНИМИ ЗГОРТКАМИ КРИТЕРІЇВ

Розглянемо задачу, де в межах кожної групи критеріїв (1) визначено субординацію рівної важливості R_v [1], тобто за кожним векторним критерієм κ_k^P альтернатива x краща за альтернативу y , якщо

$$c_k(x) >^P c_k(y), k = 1, 2, \dots, q. \quad (32)$$

Самі ж групи критеріїв строго впорядковані згідно із субординацією строгого ранжування R_g [1], що визначає векторний критерій κ^{LP} . Відповідно до цього критерію альтернатива x краща за альтернативу y , якщо існує такий індекс t , $1 \leq t \leq q$, що

$$c_t(x) >^P c_t(y), \quad (33)$$

та, якщо $t > 1$, то

$$c_k(x) = c_k(y), k = 1, 2, \dots, t-1. \quad (34)$$

Задачу знаходження оптимальних альтернатив за критерієм κ^{LP} називають задачею лексикографічно-паретівської оптимізації [1]:

$$\max^{LP} \bar{c}(x), x \in X. \quad (35)$$

Як доведено в [1], розв'язки задачі (35) можна знайти як розв'язки задачі лексикографічної оптимізації

$$\max^L f(x), x \in X, \quad (36)$$

де

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x)), \quad (37)$$

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{q_k} \alpha_{ki} c_{ki}(x), \alpha_{ki} > 0, i = 1, 2, \dots, q_k, k = 1, 2, \dots, q. \quad (38)$$

Розглянемо модифікацію задачі (35), коли в межах переважної більшості груп критеріїв (1) задано субординацію рівної важливості R_v , але для деяких груп критеріїв задано субординацію строгого ранжування R_g . Не зменшуючи загальності міркувань, будемо вважати, що таким є тільки один векторний критерій κ_r^L , $1 \leq r \leq q$. Згідно з цим критерієм для всяких допустимих альтернатив $x, y \in X$ альтернатива x краща за y , якщо

$$c_r(x) >^L c_r(y), \quad (39)$$

тобто існує такий індекс t , $1 \leq t \leq q$, що

$$c_{rt}(x) > c_{rt}(y), 1 \leq t \leq q_r, \quad (40)$$

і, якщо $t > 1$, то

$$c_{ri}(x) = c_{ri}(y), i = 1, 2, \dots, t-1. \quad (41)$$

Позначимо згортку таких неоднорідних критеріїв $\kappa^{L\{P\mid L\}}$, а відповідну задачу

$$\max^{L\{P\mid L\}} \bar{c}(x), x \in X \quad (42)$$

будемо називати лексикографічною задачею з векторними неоднорідними

згортками критеріїв. У задачі (42) для всяких допустимих альтернатив $x, y \in X$ альтернатива x краща за y , якщо існує такий індекс $t, 1 \leq t \leq q$, що

$$c_t(x) >^P c_t(y) \text{ для } t \in \{1, 2, \dots, q\} \setminus \{r\}, \quad (43)$$

або

$$c_t(x) >^L c_t(y) \text{ для } t = r, \quad (44)$$

і, якщо $t > 1$, то

$$c_k(x) = c_k(y), \quad k = 1, 2, \dots, t-1. \quad (45)$$

Наявність критерію κ_r^L порушує правила, задані у класичній задачі лексико-графічно-паретівської оптимізації [1]. Отже, до неї не можна застосувати відповідні правила її розв'язання.

Замінімо критерій κ_r^L критерієм κ_r^f з цільовою функцією

$$c_r^f(x) = (\bar{f}_r(x), E(x), \dots, E(x)) \in R^{q^{\max}}, \quad q^{\max} = \max\{q_k \mid 1 \leq k \leq q\}, \quad (46)$$

де $E(x)$ — цільова функція критерію байдужості κ^E на множині допустимих розв'язків X , а функція $\bar{f}_r(x)$ є додатною згорткою критеріїв

$$\bar{f}_r(x) = \sum_{j=1}^{q_r} \bar{\alpha}_j c_{rj}(x). \quad (47)$$

Додатні коефіцієнти $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_{q_r}$ вибрано у такий спосіб, що функціонал (47) задає еквівалентний критерію κ_r^L порядок надання переваги на множині крайніх точок множини допустимих розв'язків X [2, 3, 13]. Використання критерію байдужості κ^E є необхідним тільки у тому разі, коли треба вирівняти кількість критеріїв у кожній групі.

Розглянемо задачу

$$\max^{LP} \bar{c}''(x), \quad x \in X, \quad (48)$$

де

$$\bar{c}''(x) = (c_1(x), c_2(x), \dots, c_{r-1}(x), c_r^f(x), c_{r+1}(x), \dots, c_q(x)). \quad (49)$$

Теорема 2. Розв'язок задачі (48) є розв'язком задачі (42).

Доведення. Для доведення теореми потрібно встановити, що порядок, який задає критерій $\kappa^{L\{P \mid L\}}$ у задачі (42), є підпорядком на X порядку, що задає критерій κ^{LP} у задачі (48) за правилом надання переваги.

Нехай альтернативи $x, y \in X$ є крайніми точками множини допустимих альтернатив X та x є кращою за альтернативу y за критерієм $\kappa^{L\{P \mid L\}}$. Якщо виконуються умови (43), (45), то очевидно, що x є кращою за альтернативу y згідно з критерієм κ^{LP} у задачі (48).

Нехай виконуються умови (44), (45). Враховуючи вибір коефіцієнтів $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_{q_r}$ і правила побудови функціонала (47), одержимо, що

$$\bar{f}_r(x) > \bar{f}_r(y).$$

Оскільки критерій κ^E є критерієм байдужості, то

$$c_r^f(x) >^P c_r^f(y). \quad (50)$$

З умов (45) і (50) випливає, що альтернатива x є кращою за альтернативу y за критерієм κ^{LP} у задачі (48). Теорему доведено.

Згідно з теоремою 2 та [1], розв'язки задачі (42) можна знайти шляхом розв'язання задачі лексикографічної оптимізації

$$\max^L l''(x), \quad x \in X, \quad (51)$$

де

$$l''(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_{r-1}(x), \bar{f}_r(x), f_{r+1}(x), \dots, f_q(x)),$$

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{q_k} \alpha_{ki} c_{ki}(x), \quad \alpha_{ki} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, q_k, \quad k = 1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, q.$$

Розглянемо задачу

$$\max^{LP} \bar{c}'(x), \quad x \in X, \quad (52)$$

де

$$\bar{c}'(x) = (c_1(x), c_2(x), \dots, c_{r-1}(x), c_r^1(x), c_r^2(x), \dots, c_r^{q_r}(x), c_{r+1}(x), \dots, c_q(x)).$$

Теорема 3. Задача (52) еквівалентна задачі (42) (їхні множини оптимальних розв'язків збігаються).

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 1.

На основі [2, 3] та теорем 2, 3 досяжні оптимальні розв'язки задачі (42) можна знайти за зваженою сумою різноважливих критеріїв.

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто багатокритерійні задачі оптимізації з критеріями, що є згортками згорток. Досліджено такі випадки:

- векторний критерій — паретівська згортка неоднорідних згорток критеріїв;
- векторний критерій — лексикографічна згортка неоднорідних згорток критеріїв.

Через зазначену неоднорідність не можна застосувати відомі методи для розв'язання цих задач.

Також доведено еквівалентність розглянутих задач класичним задачам парето-лексикографічної і лексикографічно-паретівської оптимізації, що дає змогу застосовувати методи лексикографічної оптимізації для знаходження їхніх оптимальних розв'язків.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Червак Ю.Ю. Оптимізація. Непокращуемый выбор. Ужгород: Ужгород. нац. унт, 2002. 312 с.
2. Брила А.Ю. Достижимость оптимальных решений линейной задачи многокритериальной оптимизации с альтернативными критериями в транзитивной субординации. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2011. №4. С. 68–72.
3. Брила А.Ю. Достижимость оптимальных решений линейной задачи многокритериальной оптимизации по взвешенной сумме критериев разной важности в транзитивной субординации. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. Т. 44, № 5. С. 135–138.
4. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Алгоритм поиска значений линейной функции на лексикографически упорядоченных перестановках. *Теорія оптимальних рішень: Зб. наук. пр.* 2009. № 8. С. 3–8.

5. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. Киев: Наук. думка, 1988. 472 с.
6. Сергиенко И.В., Лебедева Т.Т., Семенова Н.В. О существовании решений в задачах векторной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ*. 2000. Т. 36, № 6. С. 39–46.
7. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І. Ядро стійкості векторної задачі оптимізації за умов збурень критеріальних функцій. *Доповіді Національної академії наук України*. 2021. № 1. С. 17–23.
8. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І. Стійкість і регуляризація векторних задач оптимізації за можливих збурень критеріїв. *Кибернетика и системный анализ*. 2022. Т. 58, № 5. С. 57–63.
9. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. Киев: Наукова думка, 2003. 264 с.
10. Сергієнко І.В., Шило В.П., Рошин В.О. Дискретна оптимізація. Алгоритми та їхнє ефективне використання. Київ: Наукова думка, 2020. 144 с.
11. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений. *Кибернетика и системный анализ*. 2005. Т. 41, № 4. С. 90–100.
12. Семенова Н.В., Колечкіна Л.М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв'язання. Київ: Наукова думка, 2009. 266 с.
13. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. Москва: Наука, 1982. 256 с.
14. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. Москва: Сов. радио, 1975. 192 с.
15. Ногин В. Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. Москва: Физматлит, 2002. 144 с.
16. Ehrgott M. Multicriteria Optimization. Second edition. Heidelberg: Springer Berlin, 2005. 324 p.
17. Greco S., Ehrgott M., Figueira J.R. Multiple Criteria Decision Analysis — State of the Art Surveys. New York: Springer, 2016. 1346 p.

A.Yu. Bryla

MULTICRITERIA OPTIMIZATION PROBLEMS WITH VECTOR CONVOLUTIONS OF NON-HOMOGENEOUS CONVOLUTIONS OF CRITERIA

Abstract. Multicriteria decision-making problems are considered. Advantage orders are determined by criterial orders, which are convolutions of convolutions. The cases are analyzed where the subordination of equal importance or strict ranking subordination is specified on the set of vector criteria. In both cases, the convolutions within each of the partial vector criteria can be heterogeneous. The equivalence of the considered problems to the corresponding multicriteria decision-making problems with homogeneous (same) ranking within partial vector criteria is proved.

Keywords: multicriteria optimization problem, convolutions of criteria, convolutions of convolutions, vector criteria, heterogeneous convolutions of criteria.

Надійшла до редакції 02.06.2023