



НОВІ ЗАСОБИ КІБЕРНЕТИКИ, ІНФОРМАТИКИ, ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ ТА СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

УДК 519.21

Г.Д. БІЛА

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: bila.galyana@gmail.com.

О.П. КНОПОВ

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: a.k@gmail.com.

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ОДНОГО КЛАСУ ПЕРІОДОГРАМНИХ ОЦІНОК¹

Анотація. Розглянуто клас періодограмних оцінок невідомих параметрів нелінійної моделі регресії «сигнал плюс шум». Доведено їхню асимптотичну нормальність за умови, що функція регресії майже періодична, а шум є функціоналом від Гаусового випадкового процесу із сильною залежністю.

Ключові слова: сильна залежність, Гаусів шум, періодограмна оцінка, асимптотична нормальність.

В умовах сучасного розвитку науки і техніки особливий інтерес становить застосування методів виявлення прихованих періодичностей щодо теорії оптимального управління. Однією з основних проблем при цьому є підвищення якості роботи систем у реальних умовах їхнього функціонування. Відмітимо, що на об'єкт управління можуть впливати як корисні сигнали, так і шумові, що накладаються на корисні. Це потребує оптимального визначення корисного сигналу або його розпізнавання за результатами спотворених спостережень. Залежно від статистичних характеристик випадкового шуму, що спотворює корисний сигнал, розрізняють регресійні моделі із слабкою та сильною залежністю. Стохастичні процеси із слабкою залежністю мають властивість з плином часу «забувати» інформацію, тому їх називають випадковими процесами із короткою пам'яттю. Детальніше властивості таких процесів викладено в [1–6] та інших працях. Останнім часом спостерігається значний прогрес у дослідженні випадкових процесів, що не задовільняють умовам слабкої залежності. Це так звані стаціонарні випадкові процеси із сильною залежністю (довготривалою залежністю, довгою пам'яттю), кореляційна функція яких спадає з гіперболічною швидкістю. Прикладні дослідження явища довготривалої залежності та велика кількість публікацій підтверджують, що багато випадкових процесів у таких сферах як фінанси, економетрика, Інтернет моделювання, гідрологія, кліматичні дослідження тощо демонструють сильну залежність. Тут варто відмітити роботи [7–12], які містять повний огляд та бібліографію з цієї тематики. Перейдемо до постановки задачі.

¹Роботу виконано за часткової підтримки Національного фонду досліджень України. Грант № 2020.02/0121.

Розглянемо регресійну модель

$$x(t) = \varphi(\omega_0 t) + \varepsilon(t), \quad t \in [0, T], \quad \omega_0 > 0,$$

де $\varphi(\omega_0 t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, — вимірна функція, залежна від невідомого параметра $\omega_0 > 0$. Випадковий шум $\varepsilon(t) = G(n(t))$, $t \in \mathbb{R}^1$, є таким, що $E\varepsilon(0) = 0$, $E\varepsilon^2(0) < \infty$, де випадковий процес $\{n(t), t \in \mathbb{R}^1\}$ та функція $G(u)$, $u \in \mathbb{R}^1$, задовольняють такі умови.

Умова 1. Нехай $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, — майже періодична функція вигляду

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\lambda_k t}.$$

Для коефіцієнтів c_k та λ_k виконуються умови

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty, \quad \lambda_k \geq 0 \quad \text{для} \quad k \geq 0,$$

$$c_k = \bar{c}_{-k}, \quad \lambda_k = -\lambda_{-k}, \quad |\lambda_l - \lambda_k| \geq \Delta > 0 \quad \text{для} \quad l \neq k,$$

$$|c_{i_0}| > |c_i|, \quad i \neq \pm i_0, \quad i_0 > 0.$$

Умова 2. Нехай $\{n(t), t \in \mathbb{R}^1\}$ — дійсний неперервний у середньому квадратичному стаціонарний Гаусів процес із сильною залежністю:

$$En(t) = 0, \quad R(t) = \frac{1}{(1+t^2)^{\alpha/2}}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

Умова 3. Нелінійна Борелева функція $G: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ така, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(u) \varphi(u) du < \infty, \quad \text{де} \quad \varphi(u) = \frac{1}{2\pi} e^{-u^2/2}, \quad u \in \mathbb{R}^1.$$

За умови 3 функцію $G(u)$, $u \in \mathbb{R}^1$, можна розкласти [1] в ряд

$$G(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{k!} H_k(u), \quad C_k = \int_{-\infty}^{\infty} G(u) H_k(u) \varphi(u) du, \quad k = 0, 1, \dots,$$

за ортогональними поліномами Чебишева–Ерміта

$$H_k(u) = (-1)^k e^{u^2/2} \frac{d^k}{du^k} e^{-u^2/2}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

у просторі $L_2(\mathbb{R}^1, \varphi(u) du)$.

Умова 4. Існує ціле число $m \geq 1$ таке, що $C_1 = \dots = C_{m-1} = 0$, $C_m \neq 0$ — коефіцієнти в розкладі функції $G(u)$, $u \in \mathbb{R}^1$, за поліномами Чебишева–Ерміта.

Умова 5. Припустимо, що $m\alpha > 1$, де $m = \text{rank } G$, $0 < \alpha < 1$ — параметр кореляційної функції $R(t)$ процесу $\{n(t), t \in \mathbb{R}^1\}$.

Умова 6. У точці $\lambda_{i_0} \omega_0$ k -та згортка спектральної щільності $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$, випадкового процесу $\{n(t), t \in \mathbb{R}^1\}$ задовольняє нерівність $f^{*(k)}(\lambda_{i_0} \omega_0) > 0$, $k \geq m$.

Для оцінювання невідомого параметра $\omega_0 \in (\underline{\omega}, \bar{\omega})$, $\underline{\omega} > 0$, $\bar{\omega} < \infty$, використаємо періодограмну оцінку $\tilde{\omega}_T = \arg \max_{\omega \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}]} \tilde{Q}_T(\omega)$, одержану за спостереженнями $\{x(t), 0 \leq t \leq T\}$, де

$$\tilde{Q}_T(\omega) = \left| \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \varphi(\omega t) dt \right|^2.$$

Оскільки функціонал $\tilde{Q}_T(\omega)$ з імовірністю одиниця неперервний від ω , то величина $\tilde{\omega}_T$ визначена з імовірністю одиниця. Періодограмні оцінки такого типу для випадкових процесів і полів із слабкою залежністю вивчалися в [2–4].

Для дослідження асимптотичних властивостей оцінки $\tilde{\omega}_T$ сформулюємо допоміжне твердження.

Лема 1 [10]. Нехай виконуються умови 1–4. Тоді

$$P \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{\omega \in \mathbb{R}^1} \left| \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon(t) \varphi(\omega t) dt \right| = 0 \right\} = 1.$$

Теорема 1 [10]. Нехай виконуються умови 1–4. Тоді для $T \rightarrow \infty$ періодограмна оцінка $\tilde{\omega}_T$ параметра ω_0 є строго конзистентною.

Теорема 2 [10]. Нехай виконуються умови 1–4. Тоді з імовірністю одиниця

$$T(\tilde{\omega}_T - \omega_0) \rightarrow 0 \quad \text{для } T \rightarrow \infty.$$

Покажемо, що оцінка $\tilde{\omega}_T$ асимптотично нормально розподілена для $T \rightarrow \infty$. Доведемо деякі допоміжні твердження.

Лема 2. Нехай виконуються умови 1–3, 5, 6. Тоді

$$T^{-1/2} \frac{\partial \tilde{Q}_T(\omega_0)}{\partial \omega} = \zeta_{T1} + \zeta_{T2},$$

де для $T \rightarrow \infty$ випадкова величина ζ_{T1} асимптотично нормальна з нульовим математичним сподіванням та дисперсією

$$\sigma^2 = \frac{4}{3} 8\pi \lambda_{i_0}^2 |c_{i_0}|^6 \sum_{k=m}^{\infty} \frac{C_k^2}{k!} f^{*(k)}(\lambda_{i_0} \omega_0),$$

а випадкова величина $\zeta_{T2} \rightarrow 0$ для $T \rightarrow \infty$ за ймовірністю.

Доведення. Вираз

$$T^{-1/2} \frac{\partial \tilde{Q}_T(\omega_0)}{\partial \omega} = \frac{4}{T^{5/2}} \int_0^T [\varphi(\omega_0 t) + \varepsilon(t)] \varphi(\omega_0 t) dt \int_0^T t [\varphi(\omega_0 t) + \varepsilon(t)] \varphi'(\omega_0 t) dt$$

є справедливим. Розглянемо окремо кожен доданок правої частини цього виразу. Позначимо

$$I_T^1 = \frac{2}{T} \int_0^T \varphi^2(\omega_0 t) dt \frac{2}{T^{3/2}} \int_0^T t \varphi(\omega_0 t) \varphi'(\omega_0 t) dt. \quad (1)$$

Для другого множника в правій частині (1) знайдемо

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T^{3/2}} \int_0^T t \varphi(\omega_0 t) \varphi'(\omega_0 t) dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T^{3/2}} \int_0^T t \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \lambda_k \omega_0 t} \sum_{l=-\infty}^{\infty} i \lambda_l c_l e^{i \lambda_l \omega_0 t} dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T^{3/2}} \int_0^T t \sum_{k, l=-\infty}^{\infty} i \lambda_l c_k c_l e^{i(\lambda_k + \lambda_l) \omega_0 t} dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T^{3/2}} \left[\int_0^T t \sum_{k \neq -l} i \lambda_l c_k c_l e^{i(\lambda_k + \lambda_l) \omega_0 t} dt + i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{-k} c_k c_{-k} \int_0^T t dt \right]. \end{aligned}$$

Звідси бачимо, що $\lim_{T \rightarrow \infty} I_T^1 = 0$ за ймовірністю. З урахуванням центральної граничної теореми 1 [11] одержимо, що за ймовірністю

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} I_T^3 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T \varepsilon(t) \varphi(\omega_0 t) dt \frac{2}{T^{3/2}} \int_0^T t \varphi(\omega_0 t) \varphi'(\omega_0 t) dt = 0, \\ \lim_{T \rightarrow \infty} I_T^4 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T \varepsilon(t) \varphi(\omega_0 t) dt \frac{2}{T^{3/2}} \int_0^T t \varepsilon(t) \varphi'(\omega_0 t) dt = 0. \end{aligned}$$

Розглянемо величину

$$I_T^2 = \frac{2}{T} \int_0^T \varphi^2(\omega_0 t) dt \frac{2}{T^{3/2}} \int_0^T t \varepsilon(t) \varphi'(\omega_0 t) dt \quad \text{для } T \rightarrow \infty.$$

Вочевидь, що

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T \varphi^2(\omega_0 t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \lambda_k \omega_0 t} \right)^2 dt = 2 |c_{i_0}|^2.$$

Тоді

$$\lim_{T \rightarrow \infty} I_T^2 = 4 |c_{i_0}|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^{3/2}} \int_0^T t \varepsilon(t) \varphi'(\omega_0 t) dt$$

за ймовірністю. Позначимо $a_T(t) = 4 |c_{i_0}|^2 \frac{1}{T} t \varphi'(\omega_0 t)$. Отже, задана функція

$a_T(t)$ задовольняє всі умови теореми 1 з [11], що дає можливість знайти функцію $\rho(u) = \exp\{-i \lambda_{i_0} \omega_0 |u|\}$. Таким чином, граничний розподіл величини $\xi_{T1} = I_T^2$ для $T \rightarrow \infty$ збігається до нормального з нульовим середнім та дисперсією

$$\sigma^2 = \frac{16}{3} |c_{i_0}|^6 \lambda_{i_0}^2 \omega_0^2 2\pi \sum_{k=m}^{\infty} \frac{C_k^2}{k!} f^{*(k)}(\lambda_{i_0} \omega_0). \quad \square$$

Лема 3. Нехай виконуються умови 1–3, 5, 6. Тоді для випадкової величини $\tilde{\omega}_T$, що з ймовірністю одиниця задовольняє нерівність $|\tilde{\omega}_T - \omega_0| \leq |\tilde{\omega}_T - \omega_0|$ для всіх $T > 0$, виконується співвідношення

$$\frac{1}{T^2} \frac{\partial^2 \tilde{Q}_T(\tilde{\omega}_T)}{\partial \omega^2} \rightarrow -\frac{4}{3} |c_{i_0}|^4 \lambda_{i_0}^2 \omega_0^2$$

за ймовірністю для $T \rightarrow \infty$.

Доведення. Справедливе співвідношення

$$T^{-2} \frac{\partial^2 \tilde{Q}_T(\tilde{\omega}_T)}{\partial \omega^2} = \frac{4}{T^4} \left\{ \left(\int_0^T tx(t)\varphi'(\tilde{\omega}_T t) dt \right)^2 + \int_0^T x(t)\varphi(\tilde{\omega}_T t) dt \int_0^T t^2 x(t)\varphi''(\tilde{\omega}_T t) dt \right\}.$$

З використанням теорем 1, 2 та леми 1 з роботи [11] легко переконатися, що за ймовірністю для $T \rightarrow \infty$ мають місце рівності

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T t\varphi(\omega_0 t)\varphi'(\tilde{\omega}_T t) dt = 0, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T t\varepsilon(t)\varphi'(\tilde{\omega}_T t) dt = 0,$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon(t)\varphi(\tilde{\omega}_T t) dt = 0, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^3} \int_0^T t^2 \varepsilon(t)\varphi''(\tilde{\omega}_T t) dt = 0.$$

Тоді за ймовірністю

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T^2} \frac{\partial^2 \tilde{Q}_T(\tilde{\omega}_T)}{\partial \omega^2} \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{T^4} \int_0^T \varphi(\omega_0 t)\varphi(\tilde{\omega}_T t) dt \int_0^T t^2 \varphi(\omega_0 t)\varphi''(\tilde{\omega}_T t) dt \right) =$$

$$= -\frac{4}{3} |c_{i_0}|^4 \lambda_{i_0}^2 \omega_0^2. \quad \square$$

Теорема 3. Нехай виконуються умови 1–3, 5, 6. Тоді для $T \rightarrow \infty$ випадкова величина $T^{3/2}(\tilde{\omega}_T - \omega_0)$ асимптотично нормальна з параметрами

$$(0, 6\pi |c_{i_0}|^{-2} \lambda_{i_0}^{-2} \omega_0^{-2} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{C_k^2}{k!} f^{*(k)}(\lambda_{i_0} \omega_0)).$$

Доведення. Оскільки оцінка $\tilde{\omega}_T$ строго конзистентна для $T \rightarrow \infty$, то з імовірністю, близькою до одиниці, для $T \rightarrow \infty$ величина $\tilde{\omega}_T \in (\underline{\omega}, \bar{\omega})$. З такою самою ймовірністю $\tilde{Q}'_T(\tilde{\omega}_T) = 0$ та

$$\tilde{Q}'_T(\omega_0) + \tilde{Q}''_T(\tilde{\omega}_T)(\tilde{\omega}_T - \omega_0) = 0 \quad (2)$$

для будь-якої випадкової величини $\tilde{\omega}_T$, що з імовірністю одиниця задовільняє нерівність $|\tilde{\omega}_T - \omega_0| \leq |\tilde{\omega}_T - \omega_0|$ для всіх $T > 0$. Із (2) випливає рівність

$$\tilde{\omega}_T - \omega_0 = -\frac{\tilde{Q}'_T(\omega_0)}{\tilde{Q}''_T(\omega_T)},$$

що еквівалентна такій рівності:

$$T^{3/2}(\tilde{\omega}_T - \omega_0) = -\frac{T^{-1/2} \tilde{Q}'_T(\omega_0)}{T^{-2} \tilde{Q}''_T(\omega_T)}.$$

Враховуючи результати лем 2, 3 та властивості дисперсії випадкової величини, одержимо, що для $T \rightarrow \infty$ величина $T^{3/2}(\tilde{\omega}_T - \omega_0)$ асимптотично нормальна з нульовим математичним середнім та дисперсією

$$\sigma^2 = 6\pi |c_{i_0}|^{-2} \lambda_{i_0}^{-2} \omega_0^{-2} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{C_k^2}{k!} f^{*(k)}(\lambda_{i_0} \omega_0). \quad \square$$

Таким чином, у роботі розглянуто нелінійну модель регресії «сигнал плюс шум», досліджено метод періодограмного оцінювання та встановлено асимптотичні властивості періодограмних оцінок невідомих параметрів майже періодичного сигналу в заданій нелінійній моделі регресії з неперервним часом за наявності Гаусового випадкового шуму із сильною залежністю.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Леоненко Н.Н., Иванов А.В. Статистический анализ случайных полей. Киев: Вища шк., 1986. 216 с.
2. Knopov P.S., Kasitskaya E.I. Large deviations of empirical estimates in stochastic programming problems. *Cybern. Syst. Analysis*. 2004. Vol. 40, N 4. P. 510–516.
3. Knopov P.S., Kasitskaya E.I. On large deviations of empirical estimates in a stochastic programming problem with time-dependent observations. *Cybern. Syst. Analysis*. 2010. Vol. 46, N 5. P. 724–728.
4. Knopov P.S., Kasitskaya E.I. Empirical estimates in stochastic optimization and identification. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002. 250 p.
5. Иванов А.В. Одно решение задачи о выявлении скрытых периодичностей. *Теория вероятностей и мат. статистика*. 1979. Вып. 20. С. 44–59.
6. Knopov P.S., Pepelyaev V.A. Nonparametric estimate of almost periodic signals. *Cybern. Syst. Analysis*. 2007. Vol. 43, N 3. P. 362–367.
7. Жураковський Б.М., Иванов О.В. Асимптотичні властивості періодограмних оцінок параметрів модульованого майже періодичного сигналу. *Наукові вісті НТУУ «КПІ». Теорет. та прикл. пробл. математики*. 2013. Вип. 4. С. 45–54.
8. Ivanov A.V., Leonenko N.N. Asymptotic behavior of M -estimators in continuous-time non-linear regression with long-range dependent errors. *Random Oper. Stochastic Equation*. 2002. Vol. 10, N. 3. P. 201–222.
9. Beran J. Statistics for Long-Memory Processes. New York: Chapman and Hall, 1994. 315 p.
10. Біла Г.Д., Кнопов О.П. Один клас періодограмних оцінок. *Теорія оптимальних рішень*. Київ: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2013. С. 56–62.
11. Біла Г.Д. Оцінка двовимірного сигналу за спостереженнями з сильнозалежним випадковим шумом. *Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика*. 2013. № 2. С. 116–134.
12. Dourhan P., Lang G., Surgailis D., Tessire G. Dependence in probability and statistics. Berlin; Heidelberg: Springer, Verlag, 2010. 224 p.

G.D. Bila, O.P. Knopov

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF A CLASS OF PERIODIC ESTIMATES

Abstract. In this article, one class of periodogram estimates of unknown parameters of the nonlinear regression model “signal plus noise” is considered. The asymptotic normality is proved, provided that the regression function is almost periodic, and the noise is a functional of a strongly dependent Gaussian random process.

Keywords: long-range dependence, Gaussian noise, periodogram estimation, asymptotic normality.

Надійшла до редакції 27.06.2023