

## ПОБУДОВА ДЛЯ МНОЖИНИ $\omega$ -СЛІВ, ЗАДАНОЇ – $\omega$ -РЕГУЛЯРНИМ ВИРАЗОМ, ЇЇ МАКСИМАЛЬНОЇ ПРЕФІКСНО-ЗАМКНУТОЇ ПІДМНОЖИНИ

**Анотація.** Наведено метод побудови для множини  $\omega$ -слів  $R$ , заданої  $\omega$ -регулярним виразом, її максимальної префіксно-замкнутої підмножини. Цей метод ґрунтується на побудові розміченого графу, названого графом елементарних продовжень, вершинами якого є деякі  $\omega$ -регулярні підмножини множини  $R$ . Кожній вершині цього графу поставлено у відповідність лінійне рівняння над множинами  $\omega$ -слів. Отже, граф елементарних продовжень визначає систему лінійних рівнянь. У результаті розв'язання цієї системи рівнянь для кожної вершини графу отримуємо максимальну префіксно-замкнуту відносно  $R$  підмножину множини  $\omega$ -слів, яка відповідає цій вершині графу. Об'єднання цих підмножин для всіх початкових вершин графу, тобто вершин, з яких починають побудову графу, є максимальною префіксно-замкнутою підмножиною заданої множини  $R$ . Запропоновано метод побудови такого графу, який названо методом неповних перетинів, та спосіб розв'язання системи рівнянь, яку визначає граф елементарних продовжень.

**Ключові слова:**  $\omega$ -слово,  $\omega$ -регулярний вираз, префіксно-замкнута підмножина  $\omega$ -слів, граф елементарних продовжень, лінійне рівняння над  $\omega$ -регулярними множинами.

### ВСТУП

У роботі [1] запропоновано метод синтезу  $\Sigma$ -автомата за його специфікацією в логічній мові LP. Використання у відповідному алгоритмі синтезу замість LP формул вигляду  $F(t)$   $\omega$ -регулярних виразів  $R(F(t))$ , які задають ті самі множини  $\omega$ -слів ( $\omega$ -регулярні мови), що й LP формули  $F(t)$ , часто спрощує процедуру синтезу. Є також роботи, присвячені синтезу  $\omega$ -автоматів за  $\omega$ -регулярними виразами [2, 3]. Отже, задача переходу від формул мови LP до  $\omega$ -регулярних виразів має самостійне значення. Відповідність між  $\omega$ -регулярними та  $\omega$ -регулярними виразами розглянуто у розд. 1.

В основу побудови  $\omega$ -регулярного виразу  $R(F(t))$ , де формула  $F(t)$  містить квантори, покладено обчислення  $\omega$ -регулярного виразу, що задає максимальну префіксно-замкнуту підмножину деякої множини  $\omega$ -слів  $R$ . Цю підмножину позначатимемо  $\wp(R)$  [4]. Значимо, що операція  $\wp$  над множинами  $\omega$ -слів відповідає операції універсальної квантифікації ( $\forall t$ ) у логічних мовах першого порядку. В [4] запропоновано метод обчислення  $\omega$ -регулярного виразу, що задає множину  $\wp(R)$ , де  $R$  задано  $\omega$ -регулярним виразом, який не містить операції скінченної ітерації (\*). Метод ґрунтується на побудові орієнтованого розміченого графу, в якому кожний нескінченний шлях, що починається в початковій вершині, визначає  $\omega$ -слово, яке належить  $\wp(R)$ . Усі такі  $\omega$ -слова утворюють множину  $\wp(R)$ . Відповідний регулярний вираз отримують розв'язанням системи рівнянь, яку визначає цей граф.

У цій роботі розглянуто поширення цього методу на довільні  $\omega$ -регулярні вирази. Це ускладнює як процес побудови графу, так і розв'язання системи рівнянь, яку він визначає, оскільки у цьому випадку у графі можуть існувати нескінченні шляхи, що починаються в початкових вершинах, але не визначають  $\omega$ -слів, які належать  $\wp(R)$ . Крім того, під час побудови цього графу потрібно обчислювати перетин  $\omega$ -регулярних виразів. Якщо ці вирази містять операцію \*, цей процес може виявитися достатньо складним. Тому запропоновано простіший

метод побудови графу, названий методом неповних перетинів. Також надано спосіб розв'язання системи рівнянь, яку визначає отриманий граф.

Оскільки мова LP є логічною мовою першого порядку, то її формулам вигляду  $F(t)$  відповідають беззірочні  $-\omega$ -регулярні вирази [5, 6] (що не одне й те саме, що  $-\omega$ -регулярні вирази, які не містять  $*$ ). Проте такі вирази зручніше подавати у вигляді виразів, які містять операцію  $*$ . Тому в цій роботі вважатимемо, що операцію  $\circ$  застосовують до множин  $-\omega$ -слів, заданих довільними  $-\omega$ -регулярними виразами.

# 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ, ПОВ'ЯЗАНІ З $-\omega$ -РЕГУЛЯРНИМИ ВИРАЗАМИ

Нехай  $\Sigma$  — скінченний алфавіт. Відображення  $r$  множини  $\{1, \dots, n\}$  ( $n \geq 1$ ) у  $\Sigma$  називають словом довжиною  $n$  в алфавіті  $\Sigma$  і позначають  $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$ , де  $\sigma_i = r(i)$  для всіх  $1 \leq i \leq n$ . Слово довжиною 0 (порожнє слово) позначають  $\varepsilon$ . Множину недодатних цілих чисел позначимо  $\mathbb{N}^-$ . Відображення  $g: \mathbb{N}^- \rightarrow \Sigma$  назовемо  $-\omega$ -словом і позначатимемо  $\dots \sigma_{-2} \sigma_{-1} \sigma_0$ , де  $\sigma_i = g(i)$  для  $i \in \mathbb{N}^-$ . Множину всіх слів в алфавіті  $\Sigma$ , включно з порожнім словом, позначатимемо  $\Sigma^*$ , а множину всіх  $-\omega$ -слів —  $\Sigma^{-\omega}$ . На множині  $\Sigma^* \cup \Sigma^{-\omega}$  у звичайний спосіб визначена (часткова) операція конкатенації  $(\cdot)$ , яку поширимо також на підмножини множин  $\Sigma^*$ ,  $\Sigma^{-\omega}$ . Надалі символ конкатенації будемо випускати. Для  $-\omega$ -слова  $g = \dots \sigma_{-2} \sigma_{-1} \sigma_0$  нескінченний його відрізок  $\dots \sigma_{-(k+2)} \sigma_{-(k+1)} \sigma_{-k}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) називатимемо  $-k$ -префіксом, а відрізок  $\sigma_{-(k-1)} \dots \sigma_0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) —  $-k$ -суфіксом  $-\omega$ -слова  $g$ . Якщо значення індексу  $i$  в  $-\omega$ -слові несуттєве, то йтиметься просто про префікс і суфікс  $-\omega$ -слова.

На множинах слів визначимо операції скінченної ітерації  $(^*)$  і нескінченної ітерації  $(^{-\omega})$ . Нехай  $R \subseteq \Sigma^*$ , операції ітерації визначено у такий спосіб:

$R^* = \{r_1 r_2 \dots r_n \mid n \geq 0, r_i \in R\}$ , зазначимо, що  $n=0$  відповідає порожньому слову  $\varepsilon$ ;

$$R^{-\omega} = \{\dots r_{-2} r_{-1} r_0 \mid i \leq 0, r_i \in R \setminus \{\varepsilon\}\}.$$

Для опису множин  $-\omega$ -слів будемо використовувати  $-\omega$ -регулярні вирази, які є скінченними об'єднаннями виразів вигляду  $R^{-\omega} U$ , де  $R$  і  $U$  — регулярні вирази, тобто вирази, побудовані із символів алфавіту  $\Sigma$  за допомогою операцій об'єднання, конкатенації та скінченної ітерації. Відповідність між  $-\omega$ -регулярними та  $\omega$ -регулярними виразами [7] визначатимемо поняттям обернення слова (нескінченного слова). Слово в алфавіті  $\Sigma$ , обернене до слова  $u$ , позначимо  $u^R$ . Для  $\sigma \in \Sigma$  маємо  $\sigma^R = \sigma$ . Нехай  $u = \sigma r$ , де  $r \in \Sigma^*$ , тоді  $u^R = r^R \sigma$ . Отже,  $(abc)^R = cbaa$ . Поняття обернення для множин слів або нескінченних слів визначимо у такий спосіб. Нехай  $Q \subseteq \Sigma^*$ , тоді  $Q^R = \{q^R \mid q \in Q\}$ . Для  $Q_1, Q_2 \subseteq \Sigma^*$  маємо  $(Q_1 \cup Q_2)^R = Q_1^R \cup Q_2^R$ ,  $(Q_1 Q_2)^R = Q_2^R Q_1^R$ ,  $(Q^*)^R = (Q^R)^*$ ,  $(Q^\omega)^R = (Q^R)^{-\omega}$ ,  $(Q_1 Q_2^\omega)^R = (Q_2^R)^{-\omega} Q_1^R$ .

Множини  $-\omega$ -слів, які можна задати  $-\omega$ -регулярними виразами, називатимемо  $-\omega$ -регулярними множинами. Використовуючи одні й ті самі символи для відповідних операцій над  $-\omega$ -регулярними множинами і  $-\omega$ -регулярними виразами, а також ті самі символи для відповідних констант, а саме  $\cup$ ,  $\cdot$ ,  $\cap$ ,  $*$ ,  $\varepsilon$  і  $\emptyset$ , отримаємо тотожну трансляцію мови  $-\omega$ -регулярних виразів у мову  $-\omega$ -регулярних множин. Тому далі  $-\omega$ -регулярні вирази ототожнюватимемо з  $-\omega$ -регуляр-

ними множинами, які вони задають. Крім того, в описі одноелементних множин випускатимемо фігурні дужки, а скінченну множину вигляду  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  записуватимемо у вигляді  $(a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_n)$ . Множина всіх  $-\omega$ -регулярних множин є замкнутою відносно операції перетину ( $\cap$ ), тому іноді для задання  $-\omega$ -регулярних множин поряд з  $-\omega$ -регулярними виразами використовуватимемо вирази, які містять операцію  $\cap$ . Під час тотожних перетворень таких виразів застосовуватимемо всі властивості операцій над множинами, наприклад, дистрибутивність перетину відносно об'єднання тощо.

Надалі використовуватимемо алфавіт  $\Sigma'$ , який утворено додаванням до алфавіту  $\Sigma$  символу  $\Sigma$ , тобто  $\Sigma' = \{\Sigma \cup \{\Sigma\}\}$ .

Вираз вигляду  $U^{-\omega}V$ , де  $U \subseteq (\Sigma')^*$ , а  $V$  побудовано за допомогою конкатенації із виразів вигляду  $S^*$  ( $S \subseteq (\Sigma')^*$ ) та символів алфавіту  $\Sigma'$ , називатимемо термом. Символ  $\Sigma$ , що міститься в термах, у разі їхнього перетину розглядатимемо як множину всіх символів алфавіту  $\Sigma$ , в інших ситуаціях розглядатимемо його як символ алфавіту  $\Sigma'$ . Наприклад, вираз  $bc \cup b\Sigma^*$  задає таку множину слів  $\{bc, b, b\Sigma, b\Sigma\Sigma, \dots\}$ . Терм, який закінчується символом  $\sigma \in \Sigma'$ , назвемо нормальним. Кожний терм  $t$  можна представити у вигляді множини нормальних термів  $\{t_1, \dots, t_k\}$ , такої, що  $t = t_1 \cup \dots \cup t_k$  (розклад на нормальні складові). Терми  $t_i$  назвемо компонентами цього розкладу. Для отримання такого розкладу використовують тотожності  $R^{-\omega} = R^{-\omega}R$  та  $RS^* = R \cup RS^*S$ , які застосовують, доки не буде отримано об'єднання нормальних термів. Наприклад, терм  $(a \cup bc^*)^{-\omega}$  перетворюється у множину нормальних термів  $(a \cup bc^*)^{-\omega}a, (a \cup bc^*)^{-\omega}b, (a \cup bc^*)^{-\omega}bc^*c\}$ .

Розглянемо деякі властивості розкладу терму  $q$  на нормальні складові.

1. Кожний терм можна однозначно представити у вигляді його розкладу на нормальні складові.

2. Нехай  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  — усі символи, якими закінчуються  $-\omega$ -слова в алфавіті  $\Sigma'$ , що належать терму  $q$ . Для кожного з цих символів розклад терму  $q$  на нормальні складові містить терм, який закінчується цим символом.

Для нормальних термів  $q_1 = q'_1\sigma_1$  і  $q_2 = q'_2\sigma_2$ , де  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma'$ , визначимо операцію елементарного перетину у такий спосіб. Елементарний перетин  $q'_1\sigma_1 \cap q'_2\sigma_2$  дорівнює  $(q'_1 \cap q'_2)(\sigma_1 \cap \sigma_2)$ , якщо  $\sigma_1 = \sigma_2$  або один із цих символів дорівнює  $\Sigma$ , і дорівнює  $\emptyset$  у протилежному разі. Для нормальних термів розглядатимемо тільки елементарні перетини, тому для цієї операції використано той самий символ, що і для звичайної операції перетину.

## 2. МЕТОД ЕЛЕМЕНТАРНИХ ПРОДОВЖЕНЬ

Нехай  $R$  — це  $-\omega$ -регулярний вираз. Позначимо  $T(R)$  таку множину термів, що об'єднання  $-\omega$ -слів, які вони задають, збігається з множиною  $-\omega$ -слів, яка задає  $R$ . Очевидно, що заданому  $R$  можуть відповідати різні множини  $T(R)$ . Під час обчислення  $\wp(R)$  множину  $R$  представляють у вигляді множини  $T(R)$ , що складається з нормальних термів, які називатимемо первинними. Для виразів  $R_1 = \Sigma^{-\omega}(a \cup bc^*)$  і  $R_2 = (a \cup bc^*)^{-\omega}$  множини первинних термів зазвичай мають вигляд

$$T(R_1) = \{\Sigma^{-\omega}a, \Sigma^{-\omega}b, \Sigma^{-\omega}bc^*c\},$$

$$T(R_2) = \{(a \cup bc^*)^{-\omega}a, (a \cup bc^*)^{-\omega}b, (a \cup bc^*)^{-\omega}bc^*c\}.$$

Якщо  $-\omega$ -слово належить  $\wp(R)$ , то кожний його префікс належить множині  $-\omega$ -слів, заданій деяким термом із  $T(R)$ . Для терму  $q \subseteq R$  позначимо

$\wp^R(q)$  підмножину всіх таких  $-\omega$ -слів, що належать  $q$ , кожний префікс яких належить множині  $-\omega$ -слів, заданій деяким термом із  $T(R)$ .

Нехай  $T(R) = \{q_1, \dots, q_k\}$ . Очевидно, що  $\bigcup_{i=1}^k \wp^R(q_i) = \wp^R(R)$ . Розглянемо по-

будову  $-\omega$ -слова, що належить  $\wp^R(q)$ , де  $q \in T(R)$ .

Нехай  $q = q'_0 \sigma_0$ , де  $\sigma_0 \in \Sigma'$ . Побудову такого  $-\omega$ -слова починають з терму  $t_0 = q'_0 \sigma_0$ . Вона є нескінченним покроковим процесом, на  $k$ -му кроці якого ( $k = 1, 2, \dots$ ) утворюється терм  $t_k$  вигляду  $q'_k \sigma_k \dots \sigma_0$ , де  $\sigma_i \in \Sigma'$  ( $i = 0, \dots, k$ ). Цей терм визначає  $-(k+1)$ -суфікс  $\sigma_k \dots \sigma_0$   $-\omega$ -слова, яке будують.

Первинний терм  $t$  є застосовним до терму  $\tau$ , якщо  $\tau \cap t \neq \emptyset$ . Його застосування дає представлення результату цього перетину у вигляді множини нормальних термів.

Виконання  $k$ -го кроку цього процесу полягає у застосуванні деякого первинного терму з  $T(R)$  до виразу  $q'_{k-1}$  у термі  $t_{k-1}$ , виборі з отриманої множини нормальних термів одного терму, і заміні цим термом терму  $q'_{k-1}$ . У результаті отримаємо терм  $q'_k \sigma_k \sigma_{k-1} \dots \sigma_0$ . Для обчислення перетину термів можна використовувати алгоритм з [8].

Операція перетину складних термів може виявитися доволі громіздкою, що суттєво ускладнює розглядуваний процес. Тому запропоновано перетини, виконувати на кожному кроці, обмежити тільки елементарними перетинами нормальних термів. Для цього введено поняття складеного терму. Такий терм є перетином декількох термів, наприклад  $\tau_1 \cap \dots \cap \tau_k$ . Складений терм називатимемо нормальним, якщо всі терми  $\tau_i$  закінчуються одним і тим самим символом  $\sigma \in \Sigma'$ . Нормальний складений терм представлятимемо у вигляді  $(\tau_1 \cap \dots \cap \tau_k)\sigma$ , де  $(\tau_1 \cap \dots \cap \tau_k)$  називатимемо його префіксом. Терм  $\tau\sigma$ , префікс  $\tau$  якого не містить операцій перетину, називатимемо простим. Зазначимо, що простий терм є окремим випадком складеного терму.

Під час виконання  $k$ -го кроку розглядуваного процесу, аналогічно тому, як це було описано вище, первинний терм  $t$  застосовують до префікса  $q'_{k-1}$  терму  $t_{k-1}$ . Цей префікс представляють у вигляді множини (об'єднання) нормальних складених термів. З цієї множини вибирають один терм і виконують його елементарний перетин з первинним термом  $t$ . Отриманий у результаті терм замінює  $q'_{k-1}$ , що дає терм  $t_k = q'_k \sigma_k \sigma_{k-1} \dots \sigma_0$ . Під час цих перетворень можна використовувати такі рівності для множин:  $A_1 \cap (A \cup C) = A_1$  та  $A \cup (A_1 \cap C) = A$ , де  $A_1 \subseteq A$ . Якщо в результаті застосування первинного терму до префікса складеного терму  $\tau$  результати всіх елементарних перетинів будуть порожніми, то цей первинний терм не є застосовним до префікса терму  $\tau$ .

Результат неповного перетину терму  $q'_k$  з первинним термом  $t$  (якщо цей перетин не є порожнім) характеризується таким твердженням.

**Твердження 1.** Якщо  $t = t'\sigma$  ( $\sigma \neq \Sigma$ ), то всі  $-\omega$ -слова, що належать перетину  $q'_k \cap t$ , закінчуються символом  $\sigma$ . Якщо  $t = t'\Sigma$ , а  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  — усі символи, якими закінчуються нормальні складові терму  $q'_k$ , то для кожного з цих символів неповний перетин містить терм, що закінчується цим символом.

Це твердження впливає з властивостей розкладу терму на нормальні складові.

Розглянемо приклад застосування терму  $t = R_1 bc \Sigma^* \Sigma$  до терму  $q' = R_1 bc \Sigma^* \cap R_2$ , де  $R_1 = (a \cup bc \Sigma^*)^{-\omega}$ ,  $R_2 = (ab \cup c)^{-\omega}$ . Перетворимо  $q'$  в об'єднання нормальних термів, застосувавши тотожність  $RS^* = R \cup RS^* S$  до терму  $R_1 bc \Sigma^*$  та тотожність  $R^{-\omega} = R^{-\omega} R$  до терму  $R_2$ , що дає  $(R_1 bc \cup R_1 bc \Sigma^* \Sigma) \cap$

$\cap R_2(ab \cup c) = (R_1b \cap R_2)c \cup (R_1bc\Sigma^* \cap R_2a)b \cup (R_1bc\Sigma^* \cap R_2)c$ . Для кожного з отриманих нормальних складених термів виконаємо його елементарний перетин з термом  $R_1bc\Sigma^*\Sigma$ . У результаті отримаємо  $(R_1b \cap R_2 \cap R_1bc\Sigma^*)c \cup \cup (R_1bc\Sigma^* \cap R_2a)b \cup (R_1bc\Sigma^* \cap R_2)c$ . Застосування рівності  $A \cup (A \cap C) = A$  дає  $(R_1bc\Sigma^* \cap R_2a)b \cup (R_1bc\Sigma^* \cap R_2)c$ .

Вираз  $t_k = q'_k\sigma_k \dots \sigma_0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), отриманий під час побудови  $-\omega$ -слова, що належить  $\wp^R(q'_0\sigma_0)$ , називатимемо  $k$ -продовженням терму  $q'_0\sigma_0$ . Очевидно, що  $t_{k+1} \subseteq t_k$ . Із цього випливає, що кожне  $-\omega$ -слово, яке належить  $k$ -продовженню терму  $q'_0\sigma_0$ , міститься у множині  $-\omega$ -слів, заданій термом  $q'_0\sigma_0$ . Описаний нескінченний процес визначає деяке  $-\omega$ -слово  $\dots \sigma_{-2}\sigma_{-1}\sigma_0$ , проте не кожне таке  $-\omega$ -слово належить  $q'_0\sigma_0$ , а відповідно, й  $\wp^R(q'_0\sigma_0)$ . Як випливає з [9, 10], достатньо розглядати тільки квазіперіодичні  $-\omega$ -слова, які породжено у такий спосіб.

Кожному  $k$ -продовженню ( $k = 1, 2, \dots$ ) терму  $q'_0\sigma_0$  відповідає послідовність застосованих первинних термів і вибір термів із результатів їхнього застосування. Нехай у послідовності  $k$ -продовжень ( $k = 1, 2, \dots$ ) є два такі вирази  $t_i$  і  $t_j$  ( $i < j$ ), що  $q'_i\sigma_i = q'_j\sigma_j = q'\sigma$ , що, як буде показано нижче, завжди є можливим через скінченну кількість різних термів вигляду  $q'_k\sigma_k$ . Терм  $q'_{k+1}\sigma_{k+1}$  назовемо елементарним продовженням терму  $q'_k$ . Розглянемо ситуацію, коли послідовність елементарних продовжень термів  $q'_i, \dots, q'_{j-1}$  надалі буде періодично повторюватися, тобто для кожного  $k \geq i$  елементарне продовження терму  $q'_k$  дорівнює елементарному продовженню терму  $q'_{k+(j-i)}$ . Вираз  $t_j$  має вигляд  $q'\sigma pr$ , де  $p = \sigma_{j-1} \dots \sigma_i$ ,  $r = \sigma_{i-1} \dots \sigma_0$ . У цьому процесі кожне  $i + (j-i)n$ -продовження терму  $q'_0\sigma_0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) має вигляд  $q'\sigma p^n r$ , що у разі  $n \rightarrow \infty$  дає квазіперіодичне  $-\omega$ -слово  $p^{-\omega}r$ . Хоча кожне  $k$ -продовження ( $k = 1, 2, \dots$ ) терму  $q'_0\sigma_0$  є підмножиною множини  $-\omega$ -слів, яка задана термом  $q'_0\sigma_0$ ,  $-\omega$ -слово  $p^{-\omega}r$  може не належати  $q'_0\sigma_0$ , а відповідно, і множині  $\wp^R(q'_0\sigma_0)$ . Це може бути тільки в тому разі, якщо  $p^{-\omega} \not\subseteq q'\sigma$ . Якщо  $p^{-\omega} \subseteq q'\sigma$ , то кількість послідовних повторень відрізка  $p$  у породжуваному  $-\omega$ -слові може бути тільки скінченною, і після довільного скінченного числа таких повторень процес побудови  $-\omega$ -слова продовжується.

Усі  $-\omega$ -слова, які можуть бути породжені описаним процесом, починаючи з терму  $q = q'_0\sigma_0$ , і належать множині  $-\omega$ -слів, заданій цим термом, назовемо припустимими продовженнями терму  $q$ . Отже, кожне припустиме періодичне продовження терму  $q'_0\sigma_0$  має вигляд  $p^{-\omega}$ , де  $p^{-\omega} \subseteq q'_0\sigma_0$ . Часто замість цієї умови припустимості зручніше використовувати дещо відмінну умову. Нехай  $p = p'\sigma_0$ . Очевидно, що  $(p'\sigma_0)^{-\omega} = (\sigma_0 p')^{-\omega} \sigma_0$ . Отже, якщо  $(\sigma_0 p')^{-\omega} \sigma_0 \subseteq q'_0\sigma_0$ , то  $(\sigma_0 p')^{-\omega} \subseteq q'_0$ .

Нескладно показати, що об'єднання всіх припустимих продовжень терму  $q = q'_0\sigma_0$  дорівнює множині  $\wp^R(q'_0\sigma_0)$ . Дійсно, нехай  $g = \dots \sigma_{-2}\sigma_{-1}\sigma_0$  належить  $\wp^R(q'_0\sigma_0)$ , тоді існує така послідовність первинних термів  $\tau_1, \tau_2, \dots$ , що  $-i$ -префікс  $-\omega$ -слова  $g$  належить терму  $\tau_i$ . Розглянемо процес побудови продовження терму  $q'_0\sigma_0$ , в якому на  $k$ -му кроці ( $k = 1, 2, \dots$ ) застосовуватимемо терм  $\tau_k$ . Зазначимо, що на підставі твердження 1 неповний перетин термів  $\tau_k$  і  $q'_{k-1}$  містить нормальний терм, який закінчується символом  $\sigma_{-k}$ . З цих термів вибирають такий, що його перетин з  $\tau_{k+1}$  не є порожнім. Очевидно, що продовження, яке отримують



у такий спосіб, збігається з  $-\omega$ -словом  $g$ , а оскільки воно належить множині  $-\omega$ -слів, заданій термом  $q'_0\sigma_0$ , то це продовження є припустимим.

Метод побудови  $-\omega$ -слова з  $\wp^R(q_i)$ , в якому використовують неповні перетини, назовемо методом неповних перетинів.

**Приклад 1.** Нехай  $T(R) = \{\Sigma^{-\omega}a\Sigma^*b, \Sigma^{-\omega}b\Sigma^*a\}$ . Побудуємо продовження терму  $q'_0\sigma_0 = \Sigma^{-\omega}a\Sigma^*b$ . Тут  $q'_0 = \Sigma^{-\omega}a\Sigma^*$ , а  $\sigma_0 = b$ . До  $q'_0$  застосовні обидва первинні терми. Перетин  $\Sigma^{-\omega}a\Sigma^*$  з  $\Sigma^{-\omega}a\Sigma^*b$  дає один терм  $\Sigma^{-\omega}a\Sigma^*b$ , отже, 1-продовження терму  $q'_0\sigma_0$  дорівнює  $\Sigma^{-\omega}a\Sigma^*bb$ . На цьому процес можна завершити, чому відповідає повторюваний відрізок  $b$ . Оскільки  $-\omega$ -слово  $b^{-\omega}$  не належить  $\Sigma^{-\omega}a\Sigma^*b$ , то воно не є припустимим продовженням цього терму. Якщо до  $q'_0$  застосувати терм  $\Sigma^{-\omega}b\Sigma^*a$ , отримаємо  $\Sigma^{-\omega}b\Sigma^*a$ , отже, 1-продовження дорівнює  $\Sigma^{-\omega}b\Sigma^*ab$ . Застосувавши до  $\Sigma^{-\omega}b\Sigma^*$  знову терм  $\Sigma^{-\omega}b\Sigma^*a$ , отримаємо 2-продовження  $\Sigma^{-\omega}b\Sigma^*aab$ . Застосувавши до  $\Sigma^{-\omega}b\Sigma^*$  терм  $\Sigma^{-\omega}a\Sigma^*b$ , отримаємо 3-продовження  $\Sigma^{-\omega}a\Sigma^*baab$ . Отже, маємо повторюваний відрізок  $aab$ . Оскільки  $(aab)^{-\omega} \in \Sigma^{-\omega}a\Sigma^*b$ , то це  $-\omega$ -слово є припустимим продовженням терму  $\Sigma^{-\omega}a\Sigma^*b$ . Використовуючи інший критерій припустимості, отримаємо повторюваний відрізок  $baa$ , оскільки  $(baa)^{-\omega} \in \Sigma^{-\omega}a\Sigma^*$ , то  $(baa)^{-\omega}b$  є припустимим продовженням терму  $\Sigma^{-\omega}a\Sigma^*b$ . Очевидно, що  $(aab)^{-\omega} = (baa)^{-\omega}b$ .

### 3. ГРАФ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ПРОДОВЖЕНЬ

Для отримання  $-\omega$ -регулярного виразу, який задає множину  $-\omega$ -слів  $\wp(R)$ , де  $R$  подано у вигляді  $T(R)$ , на основі описаної техніки будується орієнтований розмічений граф, який названо графом елементарних продовжень. Вершинами цього графу є нормальні терми вигляду  $q'\sigma$ , де  $q'$  називатимемо префіксом вершини, а  $\sigma \in \Sigma'$  — її позначкою. Для наочності надалі префікс і позначку вершини розділятимемо крапкою. Вершини, в які з вершини  $q'.\sigma$  ведуть дуги, визначають у такий спосіб. До префікса  $q'$  вершини  $q'.\sigma$  використовують всі застосовні до нього первинні терми. У результаті отримують множину нормальних термів  $q'_i\sigma_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ), які відповідають вершинам, в кожену з яких із вершини  $q'.\sigma$  веде дуга, що відзначена символом  $\sigma_i$ .

Побудову графу починають з вершин, які відповідають первинним термам. Ці вершини називатимемо початковими. Процес завершують тоді, коли вже не будуть з'являтися нові вершини. Покажемо, що кількість вершин у такому графі скінченна.

Для цього визначимо поняття префікса простого терму  $q \neq \Sigma^{-\omega}$ .

1. Кожний терм є своїм префіксом.
2. Якщо терм  $q$  нормальний, тобто має вигляд  $q'\sigma$ , то  $q'$  — його префікс.
3. Якщо терм  $q$  не є нормальним, то всі терми, що належать його розкладу на нормальні складові, є його префіксами.
4. Префікс кожного префікса терму є його префіксом.

Множину всіх нормальних префіксів терму  $q$  позначимо  $\text{Prefn}(q)$ . Наприклад, для терму  $q = (a \cup bc\Sigma^*)^{-\omega}$  маємо  $\text{Prefn}(q) = \{qa, qbc, qb, qbc\Sigma^*\Sigma\}$ . Вважатимемо, що  $\text{Prefn}(q_1 \cup q_2) = \text{Prefn}(q_1) \cup \text{Prefn}(q_2)$ .

Два нормальні прості терми  $q'_1\sigma_1$  та  $q'_2\sigma_2$ , де  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma'$ , назовемо узгодженими, якщо  $\sigma_1 = \sigma_2$  або один із цих символів  $\in \Sigma$ . Компоненти складеного терму, що відповідає вершині графу, утворюють множину попарно узгоджених термів, які належать  $\text{Prefn}(T(R))$ . Отже, кількість вершин графу не перевищує кількості усіх підмножин множини  $\text{Prefn}(T(R))$ , що задовольняють умову попарної узгодженості.

Граф елементарних продовжень можна розглядати як скінченний автомат. Тому, використовуючи автоматну термінологію, дугу  $(q_1, \sigma, q_2)$  у графі елементарних продовжень, називатимемо переходом з позначкою  $\sigma$ , що веде з  $q_1$  у  $q_2$ .

Нехай з вершини  $q$  є два переходи:  $(q, \sigma, q_1)$  і  $(q, \sigma, q_2)$ . Перехід  $(q, \sigma, q_2)$  називатимемо несуттєвим, якщо  $q_2 \subseteq q_1$ , тобто множина  $-\omega$ -слів, що задана виразом  $q_2$ , є підмножиною множини, яка задана виразом  $q_1$ . Це визначення відповідає тому, що множина припустимих продовжень вершини  $q_2$  міститься у множині припустимих продовжень вершини  $q_1$ , тому перехід  $(q, \sigma, q_2)$  можна видалити.

Вершини  $q_1$  і  $q_2$  графу елементарних продовжень називатимемо еквівалентними, якщо переходи з них ведуть в одну й ту саму множину вершин. Об'єднання еквівалентних вершин є еквівалентним перетворенням графу, однак його не завжди доцільно виконувати.

Говоритимемо, що  $-\omega$ -слово  $\dots\sigma_{-2}\sigma_{-1}\sigma_0$  представлено вершиною  $q$  графу, якщо існує така послідовність вершин  $q_0q_1q_2\dots$ , де  $q_0 = q$ , що для кожного  $i = 0, 1, 2, \dots$  з вершини  $q_i$  у вершину  $q_{i+1}$  веде дуга, яка відзначена символом  $\sigma_{-i}$ .

З кожною вершиною  $q$  графу елементарних продовжень асоціюється множина  $W(q)$  усіх  $-\omega$ -слів, представлених вершиною  $q$ . Якщо вершина  $q$  має позначку  $\sigma$ , то множину  $W(q)\sigma$  називатимемо множиною  $-\omega$ -слів, що закінчуються у вершині  $q$ .

З визначення  $W(q)$  випливає таке: якщо граф має перехід  $(q_1, \sigma, q_2)$ , то  $W(q_2)\sigma \subseteq W(q_1)$ .

#### 4. СИСТЕМА РІВНЯНЬ, ЯКУ ВИЗНАЧАЄ ГРАФ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ПРОДОВЖЕНЬ

Якщо всі дуги, що виходять з вершини  $q$  графу елементарних продовжень, ведуть до вершин  $q_1, \dots, q_k$  і відзначені відповідно символами  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ , тоді  $W(q) = W(q_1)\sigma_1 \cup \dots \cup W(q_k)\sigma_k$ . Отже, вершини графу визначають систему лінійних рівнянь з невідомими  $W(q_1), \dots, W(q_n)$ , де  $n$  — кількість вершин у графі. Інтерес становить не довільний розв'язок цієї системи [11], а розв'язок, що задає множини всіх  $-\omega$ -слів, представлених кожною вершиною конкретного графу. Це суттєво обмежує множину можливих розв'язків і, як наслідок, дає єдиний розв'язок. Розв'язання цієї системи рівнянь зводиться до розв'язання рівнянь вигляду  $R = RS$  або  $R = RS \cup R_1$  з однією невідомою  $R$ , де  $R, R_1 \subseteq \Sigma^{-\omega}$ ,  $S \subseteq \Sigma^*$ . Перше рівняння має розв'язок  $S^{-\omega}$ , а друге —  $R_1S^* \cup S^{-\omega}$ , що легко перевірити підставленням розв'язку в рівняння. У цьому випадку множини  $W(q_i)$  не залежать від термів, що відповідають вершинам.

Якщо граф елементарних продовжень використовують для визначення множини  $\wp(R)$ , суттєве значення має вигляд термів, що відповідають вершинам графу, оскільки не кожне  $-\omega$ -слово, що закінчується у вершині  $q = q'\sigma$ , може належати  $\wp^R(q'\sigma)$ . Як показано вище, для видалення  $-\omega$ -слів, які не належать  $\wp^R(q'\sigma)$ , потрібно перевіряти виконуваність включень вигляду  $p^{-\omega} \subseteq q'\sigma$ , де  $p \in (\Sigma')^*$ .

Для вершини  $q = q'\sigma$  множину  $\wp^R(q'\sigma)$  позначимо  $Q$ , а відповідну множину  $-\omega$ -слів, представлених вершиною  $q$  —  $Q'$ . Отже,  $Q = Q'\sigma$ . Очевидно, що рівняння залишаються дійсними, якщо в них невідомі  $W(q_i)$  замінити на  $Q'_i$ . Наявність у правій частині рівняння для  $Q'_i$  виразу  $Q'_i\sigma$  свідчить про те, що  $Q'_i$  може містити періодичне  $-\omega$ -слово  $\sigma^{-\omega}$ . Нехай терм, що відповідає вершині  $q_i$  графу елементарних продовжень, має вигляд  $q_i = q'_i\sigma_i$ . Оскільки кожне  $-\omega$ -слово з множини  $Q'_i$  належить  $q'_i$ , то під час розв'язання системи рівнянь необхідно перевіряти виконуваність включення  $\sigma^{-\omega} \subseteq q'_i$ . Під час розв'язання системи рівнянь у правій частині рівняння для  $Q'_i$  може з'явитися вираз вигляду  $Q'_iS$  ( $S \subseteq (\Sigma')^*$ ), для якого також слід перевіряти виконуваність включення  $(S)^{-\omega} \subseteq q'_i$ .

Наведемо розв'язки, що задовольняють указані обмеження, для таких чотирьох типів рівнянь. Нехай  $q = q'\sigma$ ,  $S_1, S_2 \subseteq (\Sigma')^*$ ,  $R_1 \subseteq \Sigma^{-\omega}$ .

1. Для рівняння  $Q' = Q'S$  розв'язок має вигляд  $Q' = S^{-\omega}$ , якщо  $S^{-\omega} \subseteq q'$ , інакше  $Q' = \emptyset$ .

2. Для рівняння  $Q' = Q'S_1 \cup Q'S_2$  розв'язок має вигляд  $Q' = (S_1 \cup S_2)^{-\omega}$ , якщо  $(S_1)^{-\omega}, (S_2)^{-\omega} \subseteq q'$ , і  $Q' = (S_1(S_2)^*)^{-\omega}$ , якщо  $(S_1)^{-\omega} \subseteq q'$ , а  $(S_2)^{-\omega} \not\subseteq q'$ , ситуація  $(S_1)^{-\omega}, (S_2)^{-\omega} \not\subseteq q'$  виникає у разі об'єднання еквівалентних вершин, яке у цьому випадку робити недоцільно.

3. Для рівняння  $Q' = Q'S \cup R_1$  розв'язок має вигляд  $Q' = R_1S^* \cup S^{-\omega}$ , якщо  $S^{-\omega} \subseteq q'$ , інакше  $Q' = R_1S^*$ .

4. Для рівняння  $Q' = Q'S_1 \cup Q'S_2 \cup R_1$  розв'язок має вигляд

$$Q' = R_1(S_1 \cup S_2)^* \cup (S_1 \cup S_2)^{-\omega}, \text{ якщо } (S_1)^{-\omega}, (S_2)^{-\omega} \subseteq q',$$

$$Q' = R_1(S_1 \cup S_2)^* \cup (S_1(S_2)^*)^{-\omega}, \text{ якщо } (S_1)^{-\omega} \subseteq q', (S_2)^{-\omega} \not\subseteq q',$$

$$Q' = R_1(S_1 \cup S_2)^*, \text{ якщо } (S_1)^{-\omega}, (S_2)^{-\omega} \not\subseteq q'.$$

Наведемо декілька зауважень щодо цих розв'язків. Оскільки змінними є множини  $Q'_i$ , які відповідають вершинам  $q_i = q'_i\sigma_i$ , то включення, які перевіряють, мають вигляд  $S^{-\omega} \subseteq q'_i$ . Якщо  $S^{-\omega} \not\subseteq q'_i$ , то кількість послідовних повторень  $S$  може бути тільки скінченною, чому відповідає  $S^*$ . Вважатимемо, що з  $(S_1)^{-\omega}, (S_2)^{-\omega} \subseteq q'$  випливає  $(S_1 \cup S_2)^{-\omega} \subseteq q'$ .

Під час оцінювання виконуваності відношення  $\subseteq$  для складених термів використовують такі співвідношення:  $Q \cap R \subseteq Q$ ;  $Q \cap R_1 \subseteq Q \cap R_2$ , якщо  $R_1 \subseteq R_2$ ;  $Q_1 \cap R_1 \subseteq Q_2 \cap R_2$ , якщо  $Q_1 \subseteq Q_2$  і  $R_1 \subseteq R_2$ .

Розв'язок системи рівнянь відносно невідомих  $Q'_i$ , які відповідають початковим вершинам графу, визначає множину всіх припустимих продовжень первинних термів, тобто  $\wp(R) = Q_1 \cup \dots \cup Q_k = Q'_1\sigma_1 \cup \dots \cup Q'_k\sigma_k$ , де  $q_1, \dots, q_k$  — усі початкові вершини, а  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  — відповідно їхні позначки.

Під час побудови  $\wp(R)$  можна використовувати твердження, відповідне твердженню 1 [4], яке в цьому випадку має такий вигляд.

**Твердження 2.** Нехай  $q_1, \dots, q_k$  — усі початкові вершини, в які ведуть дуги з початкової вершини  $q$ . Тоді у виразі  $\wp(R)$  замість  $Q_1 \cup \dots \cup Q_k$  можна використовувати  $Q'$ . Зокрема, якщо  $q_1, \dots, q_k$  — усі початкові вершини, тобто  $q \in \{q_1, \dots, q_k\}$  і дуга, яка веде з  $q$  в  $q$ , відзначена позначкою цієї вершини, тоді  $\wp(R) = Q'$ .

Під час побудови графу елементарних продовжень методом неповних перетинів виникає задача визначення порожності вершин, які є складеними термами. Ця задача частково може бути розв'язана під час побудови графу елементарних продовжень. Так, будь яка вершина, з якої є досяжною непорожня вершина, наприклад вершина, що відповідає простому терму, є непорожною. Тому порожніми можуть бути тільки вершини, що належать множині вершин графу, з яких не є досяжною жодна проста вершина. Отже, якщо у графі немає такої множини вершин, то в ньому немає й порожніх вершин. Порожність вершин, які належать такій множині вершин, визначають під час розв'язання системи рівнянь, що відповідає графу.

Розглянемо приклади побудови графу елементарних продовжень та розв'язання рівнянь, які він визначає.

**Приклад 2.** Визначимо  $\wp(R)$  для  $R = (ba \cup a\Sigma^*b)^{-\omega}$ . Тут  $T(R) = \{Rba, Ra\Sigma^*b\}$ , і граф має дві початкові вершини  $q_1 = Rb.a$  та  $q_2 = Ra\Sigma^*.b$ .



Розглянемо переходи з вершини  $Rb.a$ . До  $Rb$  застосовний тільки первинний терм  $Ra\Sigma^*b$ . Неповний перетин  $Rb \cap Ra\Sigma^*b$  дає вершину  $q_3 = (R \cap Ra\Sigma^*).b$ . Отже, маємо перехід  $(q_1, b, q_3)$ .

Побудуємо переходи з  $q_2 = Ra\Sigma^*.b$ . До  $Ra\Sigma^*$  застосовні обидва первинні терми. Відповідні перетини мають такий вигляд:

$$Ra\Sigma^* \cap Rba = (Ra \cup Ra\Sigma^*\Sigma) \cap Rba = (R \cap Rb).a \cup (Ra\Sigma^* \cap Rb).a;$$

$$Ra\Sigma^* \cap Ra\Sigma^*b = Ra\Sigma^*.b.$$

Отже, маємо переходи:  $(q_2, a, q_4)$ ,  $(q_2, a, q_5)$  та  $(q_2, b, q_2)$ , де  $q_4 = (R \cap Rb).a$ ,  $q_5 = (Ra\Sigma^* \cap Rb).a$ .

Побудуємо переходи з  $q_3 = (R \cap Ra\Sigma^*).b$ . До  $(R \cap Ra\Sigma^*)$  застосовні обидва первинні терми. Відповідні перетини мають вигляд  $(R \cap Ra\Sigma^*) \cap Rba$  та  $(R \cap Ra\Sigma^*) \cap Ra\Sigma^*b$ . Спочатку перетворимо  $(R \cap Ra\Sigma^*)$  в об'єднання нормальних складених термів:  $(R \cap Ra\Sigma^*) = (Rba \cup Ra\Sigma^*b) \cap (Ra \cup Ra\Sigma^*\Sigma) = (Rb \cap R)a \cup (Rb \cap Ra\Sigma^*)a \cup Ra\Sigma^*b$ . Неповний перетин цього виразу з  $Rba$  дає  $(Rb \cap R).a \cup (Rb \cap Ra\Sigma^*).a$ , а перетин з  $Ra\Sigma^*b$  дає  $Ra\Sigma^*.b$ . Отже, маємо переходи:  $(q_3, a, q_4)$ ,  $(q_3, a, q_5)$  і  $(q_3, b, q_2)$ .

Побудуємо переходи з  $q_4 = (R \cap Rb).a$ . До  $(R \cap Rb)$  застосовний тільки терм  $Ra\Sigma^*b$ . Відповідний перетин має вигляд  $R \cap Rb \cap Ra\Sigma^*b = (Rba \cup Ra\Sigma^*b) \cap R \cap Rb \cap Ra\Sigma^*b = Rb \cap Ra\Sigma^*b = (R \cap Ra\Sigma^*).b$ . Отже, маємо перехід  $(q_4, b, q_3)$ .

Побудуємо переходи з  $q_5 = (Ra\Sigma^* \cap Rb).a$ . До  $(Ra\Sigma^* \cap Rb)$  застосовний тільки первинний терм  $Ra\Sigma^*b$ . Відповідний перетин має вигляд  $Rb \cap Ra\Sigma^* \cap Ra\Sigma^*b = Rb \cap Ra\Sigma^*b = (R \cap Ra\Sigma^*).b$ , що дає перехід  $(q_5, b, q_3)$ .

З отриманих переходів випливає, що вершина  $q_3$  еквівалентна  $q_2$ , а вершини  $q_4$  і  $q_5$  еквівалентні  $q_1$ . Об'єднавши еквівалентні вершини, отримуємо граф, наведений на рис. 1.

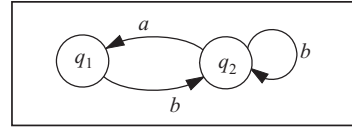


Рис. 1

Рівняння, які визначає цей граф, мають такий вигляд:  $Q'_1 = Q'_2b$ ,  $Q'_2 = Q'_1a \cup Q'_2b$ . Отже,  $Q'_2 = Q'_2ba \cup Q'_2b$ . Оскільки  $(ba)^{-\omega} \subseteq Ra\Sigma^*$ , а  $b^{-\omega} \not\subseteq Ra\Sigma^*$ , то  $Q'_2 = (bab^*)^{-\omega}$ . Відповідно до твердження 2 маємо  $\wp(R) = Q'_2 = (bab^*)^{-\omega}$ .

**Приклад 3.** Визначимо  $\wp(R)$  для  $R = \Sigma^{-\omega}d\Sigma^*c\Sigma^*$ . Тут  $T(R) = \{\Sigma^{-\omega}d\Sigma^*c, \Sigma^{-\omega}d\Sigma^*c\Sigma^*\Sigma\}$ , і граф має дві початкові вершини:  $q_1 = \Sigma^{-\omega}d\Sigma^*.c$  та  $q_2 = \Sigma^{-\omega}d\Sigma^*c\Sigma^*. \Sigma$ . Надалі для спрощення позначень префікс  $\Sigma^{-\omega}$  у термах вигляду  $\Sigma^{-\omega}V$  випущено.

Побудуємо переходи з  $q_1$ . До  $d\Sigma^*$  застосовні обидва первинні терми. Відповідні перетини мають такий вигляд:  $d\Sigma^* \cap d\Sigma^*c = d\Sigma^*.c$ ;  $d\Sigma^* \cap d\Sigma^*c\Sigma^*\Sigma = (d \cup d\Sigma^*\Sigma) \cap d\Sigma^*c\Sigma^*\Sigma = d\Sigma^*c\Sigma^*.d \cup (d\Sigma^* \cap d\Sigma^*c\Sigma^*). \Sigma$ . Отже, маємо переходи  $(q_1, c, q_1)$ ,  $(q_1, d, q_3)$  та  $(q_1, \Sigma, q_4)$ , де  $q_3 = d\Sigma^*c\Sigma^*.d$ ,  $q_4 = (d\Sigma^* \cap d\Sigma^*c\Sigma^*). \Sigma$ .

Побудуємо переходи з  $q_2$ . До  $d\Sigma^*c\Sigma^*$  застосовні обидва первинні терми. Відповідні перетини мають вигляд:  $d\Sigma^*c\Sigma^* \cap d\Sigma^*c = (d\Sigma^*c \cup d\Sigma^*c\Sigma^*\Sigma) \cap d\Sigma^*c = d\Sigma^*.c$ ;  $d\Sigma^*c\Sigma^* \cap d\Sigma^*c\Sigma^*\Sigma = d\Sigma^*c\Sigma^*. \Sigma$ . Отже, маємо переходи  $(q_2, c, q_1)$ ,  $(q_2, \Sigma, q_2)$ .

Вершина  $q_3$  еквівалентна  $q_2$ , оскільки їхні префікси збігаються, тож маємо переходи  $(q_3, c, q_1)$  та  $(q_3, \Sigma, q_2)$ .

Побудуємо переходи з  $q_4 = (d\Sigma^* \cap d\Sigma^* c\Sigma^*)\Sigma$ . До  $(d\Sigma^* \cap d\Sigma^* c\Sigma^*)$  застосовні обидва первинні терми. Після перетворення  $(d\Sigma^* \cap d\Sigma^* c\Sigma^*)$  в об'єднання нормальних термів отримаємо  $d\Sigma^* c\Sigma^* d \cup d\Sigma^* c \cup (d\Sigma^* \cap d\Sigma^* c\Sigma^*)\Sigma$ . Неповний перетин цих нормальних термів з первинними термами  $d\Sigma^* c$  та  $d\Sigma^* c\Sigma^* \Sigma$  дає такі переходи:  $(q_4, c, d\Sigma^* .c)$ ,  $(q_4, d, d\Sigma^* c\Sigma^* .d)$ ,  $(q_4, \Sigma, (d\Sigma^* \cap d\Sigma^* c\Sigma^*)\Sigma)$  та  $(q_4, c, (d\Sigma^* \cap d\Sigma^* c\Sigma^*)\Sigma .c)$ . Останній з цих переходів несуттєвий. Отже, маємо переходи  $(q_4, c, q_1)$ ,  $(q_4, d, q_3)$  та  $(q_4, \Sigma, q_4)$ .

Отримані переходи після об'єднання вершин  $q_2$  і  $q_3$  визначають граф, наведений на рис. 2.

Слід зауважити, що у разі об'єднання еквівалентних вершин домовленість щодо їхніх позначок відповідає тому, як це визначено в [4]. Інакше кажучи, вершини, які не є початковими, мають позначку  $\emptyset$  і у разі об'єднання еквівалентних вершин їхні позначки об'єднують. Згідно з цим вершина  $q_2$  у графі, яка є об'єднанням вершин  $q_2$  і  $q_3$ , має позначку  $\Sigma$ .

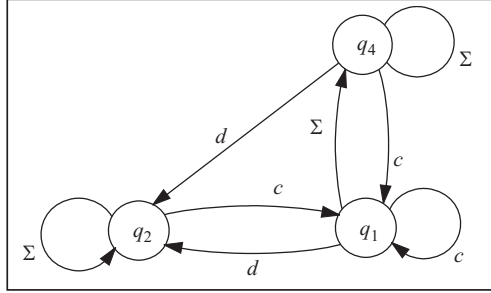


Рис. 2

об'єднанням вершин  $q_2$  і  $q_3$ , має позначку  $\Sigma$ .

Рівняння, які визначає цей граф, мають такий вигляд:  $Q'_1 = Q'_1 c \cup Q'_2 d \cup Q'_4 \Sigma$ ,  $Q'_2 = Q'_2 \Sigma \cup Q'_1 c$ ,  $Q'_4 = Q'_1 c \cup Q'_2 d \cup Q'_4 \Sigma$ . Отже,  $Q'_2 = Q'_1 c\Sigma^*$ . Підставивши вираз для  $Q'_2$  у рівняння для  $Q'_4$ , отримаємо  $Q'_4 = Q'_1 c \cup Q'_1 c\Sigma^* d \cup Q'_4 \Sigma$ . Отже,  $Q'_4 = (Q'_1 c \cup Q'_1 c\Sigma^* d)\Sigma^*$ . Підставивши вирази для  $Q'_2$  і  $Q'_4$  у рівняння для  $Q'_1$ , отримаємо  $Q'_1 = Q'_1 c \cup Q'_1 c\Sigma^* d \cup (Q'_1 c \cup Q'_1 c\Sigma^* d)\Sigma^* \Sigma = Q'_1 c\Sigma^* \cup Q'_1 c\Sigma^* d\Sigma^*$ . Очевидно, що  $(c\Sigma^*)^{-\omega} \not\subseteq d\Sigma^*$ , а  $(c\Sigma^* d\Sigma^*)^{-\omega} \subseteq d\Sigma^*$ , тому  $Q'_1 = (c\Sigma^* d\Sigma^* (c\Sigma^*)^*)^{-\omega}$ . Згідно з твердженням 2 маємо  $\wp(R) = Q'_1$ .

## ВИСНОВКИ

Розглянуто задачу побудови для множини  $-\omega$ -слів  $R$ , яку задано  $-\omega$ -регулярним виразом, її максимальної префіксно-замкнутої підмножини  $\wp(R)$ . Аналогічну задачу розглянуто в [4] для випадку, коли  $-\omega$ -регулярний вираз, який задає  $R$ , не містить операції  $*$ , що суттєво спрощує побудову множини  $\wp(R)$ . Запропоновано побудову  $\wp(R)$  для довільних  $-\omega$ -регулярних виразів. Цей метод ґрунтується на побудові розміченого графу елементарних продовжень з подальшим розв'язанням системи лінійних рівнянь над  $-\omega$ -множинами, яку визначає цей граф. Основні труднощі побудови такого графу полягають в обчисленні перетину термів (тобто множин  $-\omega$ -слів, які вони задають). Тому запропоновано метод неповних перетинів, який зводиться до елементарних перетинів. Для цього введено поняття складеного терму, в якому відповідний регулярний вираз розширено операцією перетину. Це зумовлено тим, що під час побудови графу елементарних продовжень не потрібно знати конкретних значень множин  $-\omega$ -слів, які задані термами, отриманими в результаті виконання перетинів, а достатньо для кожної цієї множини знати тільки символ, яким закінчуються всі  $-\omega$ -слова з цієї множини. Ці символи є позначками вершин, що відповідають складеним термам. У результаті не виникає потреба у розв'язанні лінійних рівнянь під час обчислення перетину термів, а також не постає проблема неоднозначності представлення результату перетину. Ця проблема пов'язана з поглинанням термів під час обчислення перетину, внаслідок чого у графі можуть бути відсутніми потрібні вершини.

Наявність у термах операції «зірочка» ускладнює розв'язання системи рівнянь, яку визначає граф. Це зумовлено тим, що під час розв'язання системи рівнянь потрібно перевіряти виконувальність включень вигляду  $S^{-\omega} \subseteq q'$ , де  $q'$  —

префікс розглядуваної вершини. З урахуванням цього сформульовано правила розв'язання таких рівнянь.

З опису відповідності між  $\omega$ -регулярними та  $\omega$ -регулярними множинами випливає, що префіксно-замкнутій підмножині  $\omega$ -регулярної множини відповідає суфіксно-замкнута підмножина  $\omega$ -регулярної множини. Отже, отримані результати можна симетрично перенести на обчислення суфіксно-замкнутої підмножини  $\omega$ -регулярної множини.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Чеботарев А.Н. Синтез  $\Sigma$ -автоматов, специфицированных в логических языках LP и LF. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 4. С. 16–31. URL: <http://www.kibernetika.org/volumes/2018/numbers/04/articles/02/2.pdf>.
2. Thiemann P., Sulzmann M. From  $\omega$ -regular expressions to Buchi automata via partial derivatives. In: Language and Automata Theory and Applications. LATA 2015. Dediu A.H., Formenti E., Martín-Vide C., Truthe B. (Eds). *Lecture Notes in Computer Science*. Cham: Springer, 2015. Vol. 8977. P. 287–298. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-15579-1\\_22](https://doi.org/10.1007/978-3-319-15579-1_22).
3. Löding C., Tollkötter A. Transformation between regular expressions and  $\omega$ -automata. *Proc. 41th Int. Symp. on Mathematical Foundations of Comput. Sci. (MFCS 2016)* (22–26 August 2016, Krakow, Poland). Krakow, 2016. Vol. 58. P. 88:1–88:13. URL: <https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2016/6496/pdf/LIPics-MFCS-2016-88.pdf>.
4. Чеботарьев А.М. Построение  $\omega$ -регулярного выражения, заданного графом элементарных продолжений. *Кибернетика та системний аналіз*. 2022. Т. 58, № 2. С. 3–9.
5. Thomas W. Star-free regular sets of  $\omega$ -sequences. *Information and Control*. 1979. Vol. 42, Iss. 2. P. 148–156.
6. Diekert V., Gastin P. First-order definable languages. In: Logic and Automata: History and Perspectives. Flum J., Grädel E., Wilke T. (Eds.). Amsterdam University Press, 2007. P. 261–306.
7. Pin J.-E., Perrin D. Infinite words: Automata, semigroups, logic and games. Pure and Applied Mathematics Series. Vol. 141. Amsterdam: Academic Press, 2004. 550 p.
8. Chebotarev A.N. Intersection of  $\omega$ -regular expressions. *Cybernetics and Systems Analysis*. Vol. 57, N 5. P. 676–684 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00393-3>.
9. Calbrix H., Nivat M., Podelsky A. Ultimately periodic words of rational  $\omega$ -languages. *Lecture Notes Comput. Sci.* Berlin; Heidelberg: Springer, 1994. Vol. 802. P. 554–566.
10. Angluin D., Fisman D. Learning regular omega languages. *Theor. Comput. Sci.* 2016. Vol. 650. P. 57–72. <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2016.07.031>.
11. Staiger L. On  $\omega$ -power languages. in: New Trends in Formal Languages. Paun G., Salomaa A. (Eds.). *Lecture Notes Comput. Sci.* Berlin; Heidelberg: Springer, 1997. Vol. 1218. P. 377–394. [https://doi.org/10.1007/3-540-62844-4\\_27](https://doi.org/10.1007/3-540-62844-4_27).

#### A.N. Chebotarev

##### CONSTRUCTING THE MAXIMUM PREFIX-CLOSED SUBSET FOR A SET OF $\omega$ -WORDS DEFINED BY A $\omega$ -REGULAR EXPRESSION

**Abstract.** We present a method for constructing the maximum prefix-closed subset of a set of  $\omega$ -words  $R$  defined by a  $\omega$ -regular expression. This method is based on constructing a labeled graph, called a graph of elementary extensions, whose vertices are some  $\omega$ -regular subsets of the set  $R$ . We associate every vertex of this graph with a linear equation over sets of  $\omega$ -words. Thus, the graph of elementary extensions determines a system of linear equations. As a result of its solution, for each vertex of the graph, we obtain the maximum prefix-closed (with respect to  $R$ ) subset of the set of  $\omega$ -words corresponding to this vertex. The union of such subsets that correspond to all initial vertices of the graph, i.e., the vertices from which constructing the graph starts, is the maximum prefix-closed subset of the given set  $R$ . We propose a method for constructing such a graph, called the method of incomplete intersections, and propose how to solve the system of equations determined by the graph of elementary extensions.

**Keywords:**  $\omega$ -word,  $\omega$ -regular expression, prefix-closed set of  $\omega$ -words, graph of elementary extensions, linear equations over  $\omega$ -regular sets.

Надійшла до редакції 25.04.2023