

О.І. ПРОВОТАР

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: aprowata1@bigmir.net.

О.П. ІЛЬКУН

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: alexander.ilkun@gmail.com.

**ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ЗНАХОДЖЕННЯ ОЦІНОК ДОСТОВІРНОСТІ
ЗА УМОВ НЕЧІТКОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

Анотація. Запропоновано підхід до знаходження чисельних оцінок достовірності нечітких знань у системах нечіткого логічного виведення. Модель системи типу «вхід–вихід» побудовано засобами нечіткої логіки. За правилом Мамдані знайдено вихід такої системи у вигляді нечітких знань з подальшим обчисленням їхньої достовірності. Для обчислення достовірності нечітких знань використано елементи теорії ймовірностей нечітких подій. Наведено приклад обчислення достовірності нечітких знань.

Ключові слова: нечітка множина, умовна ймовірність нечіткої події, нечітке правило.

ВСТУП

Відомо, що нечіткі множини [1–5] є зручним інструментом для представлення знань в інформаційних системах. Як показав В. Kosko [6] у своїй відомій теоремі про нечітку апроксимацію, за допомогою нечіткої логіки можна точно описати довільний взаємозв'язок «вхід–вихід» для будь-якої математичної системи. Зокрема, використовуючи нечітку логіку, можна формально описати, наприклад, симптоми хвороби пацієнта і захворювання (яке спричиняє таку симптоматику), а також взаємозв'язок «симптоматика–діагноз». Підхід до побудови нечітких моделей математичних систем з входами та виходами використовується в експертних діагностичних системах, для проєктування контролерів, розроблення керувальних пристроїв побутової техніки тощо.

Виникає закономірне питання про достовірність виходу таких нечітких моделей. Воно є досить актуальним особливо для діагностичних систем. Щоб дати відповідь на це запитання, запропонуємо підхід, який дає змогу отримати числову характеристику виходу системи нечіткого виведення. Цю числову характеристику називатимемо достовірністю виходу нечіткої системи логічного виведення або просто достовірністю виходу системи нечітких правил.

У цій статті запропоновано підхід до знаходження чисельних оцінок достовірності нечітких знань у системах нечіткого виведення. Оригінальність статті полягає в тому, що довільну математичну систему типу вхід–вихід змодельовано засобами нечіткої логіки, за правилом Мамдані знайдено вихід такої системи і обчислено його достовірність. Наведено приклад обчислення достовірності для системи зі скінченними просторами для моделювання нечіткості.

ПОБУДОВА НЕЧІТКИХ ПРАВИЛ

Розглянемо один із підходів до побудови нечітких правил, запропонований у [4]. Побудуємо систему нечітких правил з трьома входами та одним виходом на основі навчальних даних, які задано множиною

$$(x_1(i), x_2(i), x_3(i); d(i)), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

де $x_1(i)$, $x_2(i)$, $x_3(i)$ — входи, $d(i)$ — вихід правил нечіткої системи логічного виведення.

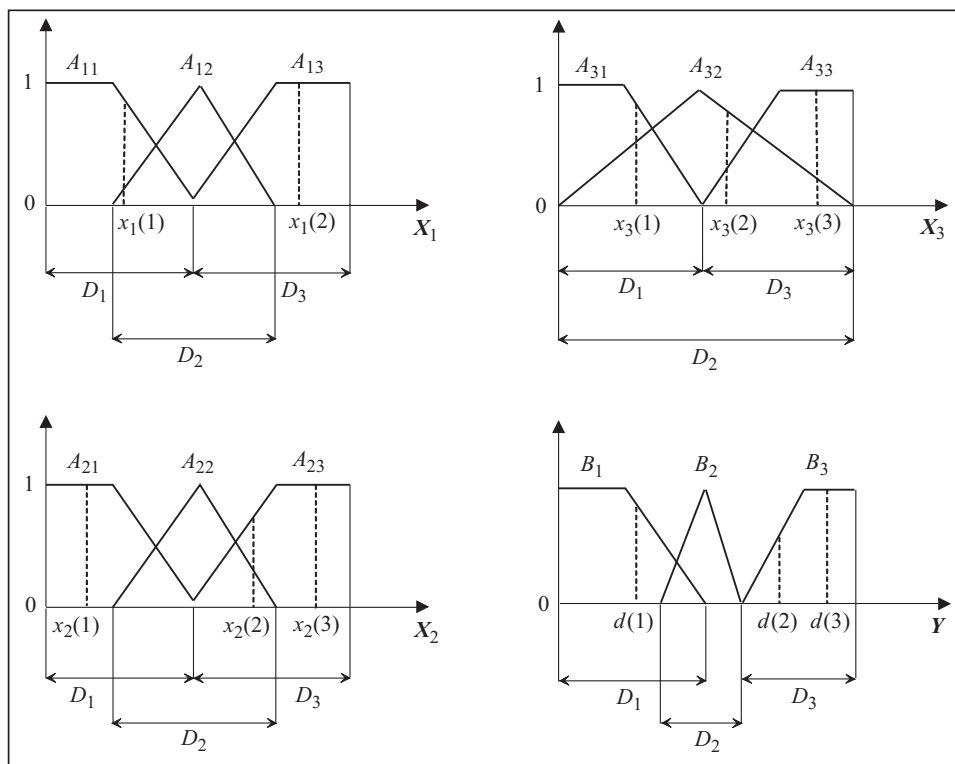


Рис. 1

Алгоритм розв'язання цієї задачі полягає у виконанні такої послідовності кроків.

1. Для входів та виходу визначаємо області допустимих значень — простори X_1 , X_2 , X_3 та Y відповідно. Розбиваємо простори входів і виходу на три області і для кожної з них задаємо функції належності нечітких величин A_{ij} , B_i . Приклад такого розбиття просторів ілюструє рис. 1. Зрозуміло, що зображене тут розбиття просторів є одним із прикладів такого розбиття. Те саме стосується і функцій належності. Тобто можна запропонувати інші способи розбиття просторів та інші функції належності. Крім того, наведене розбиття визначає так звані терм-простори T_1, T_2, T_3, T_4 , елементами яких є нечіткі поняття в просторах X_1, X_2, X_3 та Y . Зокрема,

$$T_1 = \{A_{11}, A_{21}, A_{31}\}, T_2 = \{A_{21}, A_{22}, A_{23}\}, T_3 = \{A_{31}, A_{32}, A_{33}\}, T_4 = \{B_1, B_2, B_3\}.$$

2. Будуємо нечіткі правила за навчальними даними (рис. 1):

$$(x_1(1), x_2(1), x_3(1); d(1)), \quad (1)$$

$$(x_1(2), x_2(2), x_3(2); d(2)), \quad (2)$$

$$(x_1(3), x_2(3), x_3(3); d(3)). \quad (3)$$

Ці правила мають вигляд

R_1 : if x_1 is A_{11} and x_2 is A_{21} and x_3 is A_{31} then y is B_1 ,

R_2 : if x_1 is A_{13} and x_2 is A_{23} and x_3 is A_{32} then y is B_3 ,

R_3 : if x_1 is A_{13} and x_2 is A_{23} and x_3 is A_{33} then y is B_3 .

Зазначимо, що будуючи правила, враховуємо рівність $x_1(2) = x_1(3)$. Крім того, якщо значення $x_i(j)$ належить кільком областям, то такому значенню відповідає нечітка множина, функція належності якої набуває на цьому елементі простору максимального значення.

3. Вилучаємо суперечності. Потреба в цьому кроці виникає, коли серед побудованих правил є такі, що мають однакові посилення (умови), але різні наслідки. У цьому разі для кожного правила задають міру його істинності. Наприклад, для першого правила міра істинності обчислюється за формулою

$$\mu(R_1) = \mu_{A_{11}}(x_1) \cdot \mu_{A_{21}}(x_2) \cdot \mu_{A_{31}}(x_3).$$

У системі нечітких правил залишаємо правило з найбільшою мірою істинності.

ВИХІД СИСТЕМИ НЕЧІТКИХ ПРАВИЛ

Для знаходження виходу системи нечітких правил із заданими входами A'_1, A'_2, A'_3 використаємо алгоритм логічного виведення Мамдані [4], який полягає у виконанні таких кроків.

1. Для кожного правила R_i обчислюємо його рівні істинності, зокрема

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \\ &= \min \left[\max_{X_1} (A'_1(x_1) \wedge A_{11}(x_1)), \max_{X_2} (A'_2(x_2) \wedge A_{21}(x_2)), \max_{X_3} (A'_3(x_3) \wedge A_{31}(x_3)) \right], \\ \alpha_2 &= \\ &= \min \left[\max_{X_1} (A'_1(x_1) \wedge A_{13}(x_1)), \max_{X_2} (A'_2(x_2) \wedge A_{23}(x_2)), \max_{X_3} (A'_3(x_3) \wedge A_{32}(x_3)) \right], \\ \alpha_3 &= \\ &= \min \left[\max_{X_1} (A'_1(x_1) \wedge A_{13}(x_1)), \max_{X_2} (A'_2(x_2) \wedge A_{23}(x_2)), \max_{X_3} (A'_3(x_3) \wedge A_{33}(x_3)) \right]. \end{aligned}$$

2. Обчислюємо індивідуальні виходи кожного правила, зокрема

$$\begin{aligned} B'_1(y) &= \min(\alpha_1, B_1(y)), \\ B'_2(y) &= \min(\alpha_2, B_2(y)), \\ B'_3(y) &= \min(\alpha_3, B_3(y)). \end{aligned}$$

3. Обчислюємо агрегатний вихід

$$B'(y) = \max(B'_1(y), B'_2(y), B'_3(y)).$$

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ НЕЧІТКИХ ПОДІЙ

Числові оцінки виходу системи нечітких правил обчислюються за допомогою ймовірнісних характеристик нечітких подій. Нечіткою подією A в просторі X називатимемо нечітку множину

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\},$$

де $\mu_A: X \rightarrow [0, 1]$ є функцією належності нечіткої множини A . Формулу для обчислення ймовірності події A можна знайти в [9]. За цією формулою обчислюють ймовірності будь-яких нечітких подій для заданої міри ймовірності.

Умовна ймовірність нечіткої події A за умови виконання нечіткої події B визначається за Демпстером [7–9]. Інакше кажучи, функція розподілу $P_{(A|B)}$ умовної ймовірності нечіткої події A за умови, що виконується нечітка подія B ,

визначається за допомогою функції розподілу $P_{(A,B)}$ бінарної ймовірності декартового добутку $A \times B$ і функції розподілу P_B ймовірності нечіткої події B за умови, що вона не дорівнює нулю. Отже,

$$Q_{(A \times B)}(x, y) = \begin{cases} \frac{P_{(A,B)}(x, y)}{P_B(y)}, & P_B(y) \neq 0, \\ 1, & P_B(y) = 0; \end{cases}$$

$$P_{(A|B)}(x, y) = \frac{Q_{A \times B}(x, y)}{\sum_{x, y} Q_{A \times B}(x, y)}.$$

Водночас функція розподілу бінарної ймовірності $P_{(A,B)}$ декартового добутку $A \times B$ обчислюється за формулою

$$P_{(A,B)}(x, y) = \min(P_A(x), P_B(y)),$$

яку можна знайти в [9].

Формула обчислення умовної ймовірності узагальнюється для функцій з будь-якою скінченною кількістю аргументів. Для цього запропоновано функцію $Q_{(A \times B \times C \times D)}(x, y, z, v)$ обчислювати за формулою

$$Q_{(A \times B \times C \times D)}(x, y, z, v) = Q_{(A \times B)}(x, y) \cdot Q_{(A \times C)}(x, z) \cdot Q_{(A \times D)}(x, v).$$

Отже, умовна ймовірність нечіткої події A у разі виконання нечітких подій B, C, D визначається у такий спосіб:

$$\begin{aligned} & Q_{(A \times B \times C \times D)}(x, y, z, v) = \\ & = \begin{cases} \frac{P_{(A,B)}(x, y)}{P_B(y)} \cdot \frac{P_{(A,C)}(x, z)}{P_C(z)} \cdot \frac{P_{(A,D)}(x, v)}{P_D(v)}, & P_B(y) \cdot P_C(z) \cdot P_D(v) \neq 0, \\ 1, & P_B(y) \cdot P_C(z) \cdot P_D(v) = 0; \end{cases} \\ & P_{(A|B,C,D)}(x, y, z, v) = \frac{Q_{A \times B \times C \times D}(x, y, z, v)}{\sum_{x, y, z, v} Q_{A \times B \times C \times D}(x, y, z, v)}. \end{aligned}$$

Далі, використовуючи аналог формули повної ймовірності

$$P(B') = \sum_{i=1}^n P(B_i | A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{im}) P(B' | A'_1, A'_2, \dots, A'_m),$$

можна обчислити ймовірність виходу B' системи нечітких правил за входами $A'_1, A'_2, \dots, A'_m$.

АЛГОРИТМ ЗНАХОДЖЕННЯ ДОСТОВІРНОСТІ ВИХОДУ

Нехай маємо систему нечіткого логічного виведення, яка містить правила $R_1 - R_3$. Для спрощення розрахунків припустимо, що простори X_1, X_2, X_3 однакові, а входи A'_1, A'_2, A'_3 задано нечіткими множинами

$$A'_1 = A_{12}, A'_2 = A_{22}, A'_3 = A_{12}.$$

Припустимо також, що $A_{11} = A_{21} = A_{31} = B_1, A_{12} = A_{22}, A_{13} = A_{23} = A_{33} = B_3$.

Знаходимо вихід системи нечітких правил за наведеним вище алгоритмом. Отже, для рівнів істинності правил маємо

$$\max_{X_1} (A'_1(x_1) \wedge A_{11}(x_1)) = \max_{X_1} \mu_{A'_1 \cap A_{11}}(x_1) = 0.5,$$

$$\max_{X_2} (A'_2(x_2) \wedge A_{21}(x_2)) = \max_{X_2} \mu_{A'_2 \cap A_{21}}(x_2) = 0.5,$$

$$\max_{X_3} (A'_3(x_3) \wedge A_{31}(x_3)) = \max_{X_3} \mu_{A'_3 \cap A_{31}}(x_3) = 0.5,$$

тому $\alpha_1 = 0.5$;

$$\max_{X_1} (A'_1(x_1) \wedge A_{13}(x_1)) = \max_{X_1} \mu_{A'_1 \cap A_{13}}(x_1) = 0.5,$$

$$\max_{X_2} (A'_2(x_2) \wedge A_{23}(x_2)) = \max_{X_2} \mu_{A'_2 \cap A_{23}}(x_2) = 0.5,$$

$$\max_{X_3} (A'_3(x_3) \wedge A_{32}(x_3)) = \max_{X_3} \mu_{A'_3 \cap A_{32}}(x_3) = 1,$$

тому $\alpha_2 = 0.5$;

$$\max_{X_1} (A'_1(x_1) \wedge A_{13}(x_1)) = \max_{X_1} \mu_{A'_1 \cap A_{13}}(x_1) = 0.5,$$

$$\max_{X_2} (A'_2(x_2) \wedge A_{23}(x_2)) = \max_{X_2} \mu_{A'_2 \cap A_{23}}(x_2) = 0.5,$$

$$\max_{X_3} (A'_3(x_3) \wedge A_{33}(x_3)) = \max_{X_3} \mu_{A'_3 \cap A_{33}}(x_3) = 0.5,$$

тому $\alpha_3 = 0.5$.

Обчислюємо індивідуальні виходи кожного правила. Для цього введемо нечіткі множини A_{α_1} , A_{α_2} , A_{α_3} з функціями належності, що дорівнюють константі 0.5. Тоді індивідуальні виходи правил — це нечіткі множини:

$$B'_1 = A_{\alpha_1} \cap B_1,$$

$$B'_2 = A_{\alpha_2} \cap B_2,$$

$$B'_3 = A_{\alpha_3} \cap B_3,$$

з діаграмами Заде, зображеними на рис. 2.

Агрегатний вихід (вихід системи правил) — це нечітка множина

$$B' = B'_1 \cup B'_2 \cup B'_3$$

з діаграмою Заде, зображеною на рис. 3.

Отже, отримали ще одне правило системи, яке позначатимемо R_4 .

Нам потрібно знайти ймовірність нечіткої події B' з входами A'_1 , A'_2 , A'_3 . Нехай $P_{X_1}(x)$, $P_{X_2}(x)$, $P_{X_3}(x)$, $P_Y(x)$ — функції розподілу ймовірностей у просторах X_1 , X_2 , X_3 , Y відповідно. Обчислимо ймовірності нечітких правил системи та ймовірність виходу системи з входами A'_1 , A'_2 , A'_3 . Для цього спочатку обчислюємо ймовірності нечітких подій у правилах R_1 – R_4 . Отже, маємо

$$P(A_{11}) = \int_{X_1} A_{11}(x) \cdot P_{X_1}(x), \quad P(A_{21}) = \int_{X_2} A_{21}(x) \cdot P_{X_2}(x), \quad P(A_{31}) = \int_{X_3} A_{31}(x) \cdot P_{X_3}(x),$$

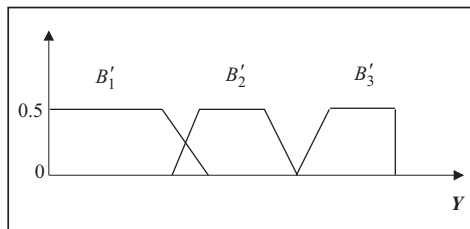


Рис. 2

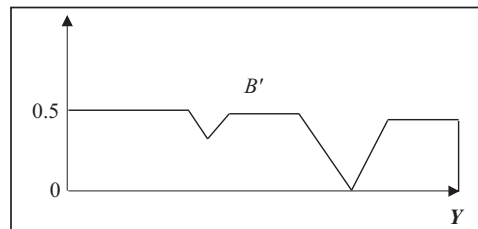


Рис. 3

$$P(A_{12}) = \int_{X_1} A_{12}(x) \cdot P_{X_1}(x), \quad P(A_{22}) = \int_{X_2} A_{22}(x) \cdot P_{X_2}(x), \quad P(A_{32}) = \int_{X_3} A_{32}(x) \cdot P_{X_3}(x),$$

$$P(A_{13}) = \int_{X_1} A_{13}(x) \cdot P_{X_1}(x), \quad P(A_{23}) = \int_{X_2} A_{23}(x) \cdot P_{X_2}(x), \quad P(A_{33}) = \int_{X_3} A_{33}(x) \cdot P_{X_3}(x),$$

$$P(A'_1) = \int_{X_1} A'_1(x) \cdot P_{X_1}(x), \quad P(A'_2) = \int_{X_2} A'_2(x) \cdot P_{X_2}(x), \quad P(A'_3) = \int_{X_3} A'_3(x) \cdot P_{X_3}(x),$$

$$P(B_1) = \int_Y B_1(x) \cdot P_Y(x), \quad P(B_2) = \int_Y B_2(x) \cdot P_Y(x), \quad P(B_3) = \int_Y B_3(x) \cdot P_Y(x).$$

Тоді ймовірність правил R_1 – R_4 обчислюємо як умовні ймовірності. Зокрема, ймовірність правила R_1 обчислюємо як імовірність нечіткої події B_1 за умови, що відбулися нечіткі події A_{11} , A_{21} , A_{31} . Для цього обчислюємо функції розподілу бінарних імовірностей декартових добутків $T_1 \times T_4$, $T_2 \times T_4$, $T_3 \times T_4$. Зокрема, для правила R_1 маємо

$$P_{(T_1, T_4)}(A_{11}, B_1) = \min(P(A_{11}), P(B_1)), \quad P_{(T_2, T_4)}(A_{21}, B_1) = \min(P(A_{21}), P(B_1)), \\ P_{(T_3, T_4)}(A_{31}, B_1) = \min(P(A_{31}), P(B_1));$$

для правила R_2 маємо

$$P_{(T_1, T_4)}(A_{13}, B_2) = \min(P(A_{13}), P(B_2)), \quad P_{(T_2, T_4)}(A_{23}, B_2) = \min(P(A_{23}), P(B_2)), \\ P_{(T_3, T_4)}(A_{32}, B_2) = \min(P(A_{32}), P(B_2));$$

для правила R_3 маємо

$$P_{(T_1, T_4)}(A_{13}, B_3) = \min(P(A_{13}), P(B_3)), \quad P_{(T_2, T_4)}(A_{23}, B_3) = \min(P(A_{23}), P(B_3)), \\ P_{(T_3, T_4)}(A_{33}, B_3) = \min(P(A_{33}), P(B_3));$$

для правила R_4 маємо

$$P_{(T_1, T_4)}(A'_1, B') = \min(P(A'_1), P(B')), \quad P_{(T_2, T_4)}(A'_2, B') = \min(P(A'_2), P(B')), \\ P_{(T_3, T_4)}(A'_3, B') = \min(P(A'), P(B')).$$

Для кожного правила R_1 – R_4 знаходимо значення функцій

$$Q_{R_1}(x, y, z, v), Q_{R_2}(x, y, z, v), Q_{R_3}(x, y, z, v), Q_{R_4}(x, y, z, v)$$

на елементах простору $T_1 \times T_2 \times T_3 \times T_4$, які відповідають нечітким правилам.

Зокрема,

$$Q_{R_1}(A_{11}, A_{21}, A_{31}, B_1) = \begin{cases} \frac{P_{(T_1, T_4)}(A_{11}, B_1)}{P(A_{11})} \cdot \frac{P_{(T_2, T_4)}(A_{21}, B_1)}{P(A_{21})} \cdot \frac{P_{(T_3, T_4)}(A_{31}, B_1)}{P(A_{31})}, \\ 1; \end{cases} \\ Q_{R_2}(A_{13}, A_{23}, A_{32}, B_2) = \begin{cases} \frac{P_{(T_1, T_4)}(A_{13}, B_2)}{P(A_{13})} \cdot \frac{P_{(T_2, T_4)}(A_{23}, B_2)}{P(A_{23})} \cdot \frac{P_{(T_3, T_4)}(A_{32}, B_2)}{P(A_{32})}, \\ 1; \end{cases} \\ Q_{R_3}(A_{13}, A_{23}, A_{33}, B_3) = \begin{cases} \frac{P_{(T_1, T_4)}(A_{13}, B_3)}{P(A_{13})} \cdot \frac{P_{(T_2, T_4)}(A_{23}, B_3)}{P(A_{23})} \cdot \frac{P_{(T_3, T_4)}(A_{33}, B_3)}{P(A_{33})}, \\ 1; \end{cases} \\ Q_{R_4}(A'_1, A'_2, A'_3, B') = \begin{cases} \frac{P_{(T_1, T_4)}(A'_1, B')}{P(A'_1)} \cdot \frac{P_{(T_2, T_4)}(A'_2, B')}{P(A'_2)} \cdot \frac{P_{(T_3, T_4)}(A'_3, B')}{P(A'_3)}, \\ 1. \end{cases}$$

Зауважимо, що значення функції Q_{R_i} дорівнює одиниці, коли хоча б один із знаменників дорівнює нулю.

На наступному кроці знаходимо умовні ймовірності нечітких правил:

$$\begin{aligned} P_{R_1}(A_{11}, A_{21}, A_{31} | B_1) &= \frac{Q_{R_1}(A_{11}, A_{21}, A_{31}, B_1)}{\sum_i Q_{R_i}(x, y, z, v)}, \\ P_{R_2}(A_{13}, A_{23}, A_{32} | B_2) &= \frac{Q_{R_2}(A_{13}, A_{23}, A_{32}, B_2)}{\sum_i Q_{R_i}(x, y, z, v)}, \\ P_{R_3}(A_{13}, A_{23}, A_{33} | B_3) &= \frac{Q_{R_3}(A_{13}, A_{23}, A_{33}, B_3)}{\sum_i Q_{R_i}(x, y, z, v)}, \\ P_{R_4}(A'_1, A'_2, A'_3 | B') &= \frac{Q_{R_4}(A'_1, A'_2, A'_3, B')}{\sum_i Q_{R_i}(x, y, z, v)}. \end{aligned}$$

За узагальненою формулою повної ймовірності знаходимо ймовірність виходу системи нечітких правил з входами A_{11}, A_{21}, A_{31} . Отже, маємо

$$\begin{aligned} P(B') &= P_{R_1}(A_{11}, A_{21}, A_{31} | B_1) \cdot P_{R_4}(A'_1, A'_2, A'_3 | B') + \\ &+ P_{R_2}(A_{13}, A_{23}, A_{32} | B_2) \cdot P_{R_4}(A'_1, A'_2, A'_3 | B') + \\ &+ P_{R_3}(A_{13}, A_{23}, A_{33} | B_3) \cdot P_{R_4}(A'_1, A'_2, A'_3 | B'). \end{aligned}$$

Приклад 1 (скінченні простори). Нехай $X_1 = X_2 = X_3 = \{K, V, S, E, G, I\}$, $Y = \{a, b, c\}$. Як і в неперервному випадку, розбиваємо кожен простір на три частини і задаємо відповідні функції належності. Зокрема, нечіткі множини A_{ij} та B_k задамо у вигляді

$$\begin{aligned} A_{11} &= 1/K + 0.5/V, \quad A_{12} = 0.5/S + 0.5/E, \quad A_{13} = 1/G + 0.5/I, \\ A_{21} &= 1/K + 0.5/V, \quad A_{22} = 0.5/S + 0.5/E, \quad A_{23} = 1/G + 0.5/I, \\ A_{31} &= 1/G + 0.5/I, \quad A_{32} = 0.8/S + 0.8/E, \quad A_{33} = 1/G + 0.5/I, \\ B_1 &= 1/a, \quad B_2 = 0.5/b, \quad B_3 = 1/c. \end{aligned}$$

Нехай на вхід системи нечітких правил

$$\begin{aligned} R_1: & \text{if } x_1 \text{ is } A_{11} \text{ and } x_2 \text{ is } A_{21} \text{ and } x_3 \text{ is } A_{31} \text{ then } y \text{ is } B_1, \\ R_2: & \text{if } x_1 \text{ is } A_{13} \text{ and } x_2 \text{ is } A_{23} \text{ and } x_3 \text{ is } A_{32} \text{ then } y \text{ is } B_3, \\ R_3: & \text{if } x_1 \text{ is } A_{13} \text{ and } x_2 \text{ is } A_{23} \text{ and } x_3 \text{ is } A_{33} \text{ then } y \text{ is } B_3 \end{aligned}$$

подаються значення

$$A'_1 = 0.8/K + 0.5/V, \quad A'_2 = 0.5/S + 0.5/E, \quad A'_3 = 0.6/G + 0.5/I.$$

Знайдемо вихід B' системи нечітких правил за алгоритмом Мамдані. Отже, для рівнів істинності правил маємо

$$\begin{aligned} \max_{X_1} (A'_1(x_1) \wedge A_{11}(x_1)) &= \max(0.8, 0.5) = 0.8, \\ \max_{X_2} (A'_2(x_2) \wedge A_{12}(x_2)) &= \max(0.5, 0.5) = 0.5, \\ \max_{X_3} (A'_3(x_3) \wedge A_{13}(x_3)) &= \max(0.6, 0.5) = 0.6, \end{aligned}$$

тому $\alpha_1 = 0.5$;

$$\max_{X_1} (A'_1(x_1) \wedge A_{21}(x_1)) = \max(0.8, 0.5) = 0.8,$$

$$\max_{X_2} (A'_2(x_2) \wedge A_{22}(x_2)) = \max(0.5, 0.5) = 0.5,$$

$$\max_{X_3} (A'_3(x_3) \wedge A_{23}(x_3)) = \max(0.6, 0.5) = 0.6,$$

тому $\alpha_2 = 0.5$;

$$\max_{X_1} (A'_1(x_1) \wedge A_{31}(x_1)) = \max(0.8, 0.5) = 0.8,$$

$$\max_{X_2} (A'_2(x_2) \wedge A_{32}(x_2)) = \max(0.5, 0.5) = 0.5,$$

$$\max_{X_3} (A'_3(x_3) \wedge A_{33}(x_3)) = \max \mu_{A'_3 \cap A_{33}}(x_3) = 0.5,$$

тому $\alpha_3 = 0.5$.

Обчислюємо індивідуальні виходи кожного правила:

$$B'_1(a) = \min(0.5, B_1(1)) = 0.5,$$

$$B'_2(b) = \min(0.5, B_2(b)) = 0.5,$$

$$B'_3(c) = \min(0.5, B_3(c)) = 0.5.$$

Агрегатний вихід (вихід системи правил) — це нечітка множина

$$B' = 0.5 / a + 0.5 / b + 0.5 / c.$$

Отже, маємо ще одне нечітке правило R_4 , а саме

$$R_4: \text{if } x_1 \text{ is } A'_1 \text{ and } x_2 \text{ is } A'_2 \text{ and } x_3 \text{ is } A'_3 \text{ then } y \text{ is } B'.$$

Нехай $P_1(x)$ — функція розподілу ймовірностей у просторах X_1, X_2, X_3 відповідно, а $P_2(x)$ — функція розподілу ймовірностей у просторі Y . До того ж $P_1(K) = 0.1, P_1(V) = 0.1, P_1(S) = 0.2, P_1(E) = 0.2, P_1(G) = 0.2, P_1(I) = 0.2, P_2(a) = 0.4, P_2(b) = 0.4, P_2(c) = 0.2$.

Обчислимо ймовірності нечітких подій у відповідних правилах:

$$P(A_{11}) = \sum_x A_{11}(x) \cdot P_1(x) = 0.15, P(A_{12}) = \sum_x A_{12}(x) \cdot P_1(x) = 0.2,$$

$$P(A_{13}) = \sum_x A_{13}(x) \cdot P_1(x) = 0.3, P(A_{21}) = \sum_x A_{21}(x) \cdot P_1(x) = 0.15,$$

$$P(A_{22}) = \sum_x A_{22}(x) \cdot P_1(x) = 0.2, P(A_{23}) = \sum_x A_{23}(x) \cdot P_1(x) = 0.3,$$

$$P(A_{31}) = \sum_x A_{31}(x) \cdot P_1(x) = 0.15, P(A_{32}) = \sum_x A_{32}(x) \cdot P_1(x) = 0.32,$$

$$P(A_{33}) = \sum_x A_{33}(x) \cdot P_1(x) = 0.3, P(A'_1) = \sum_x A'_1(x) \cdot P_1(x) = 0.13,$$

$$P(A'_2) = \sum_x A'_2(x) \cdot P_1(x) = 0.2, P(A'_3) = \sum_x A'_3(x) \cdot P_1(x) = 0.22,$$

$$P(B_1) = \sum_x B_1(x) \cdot P_2(x) = 0.4, P(B_2) = \sum_x B_2(x) \cdot P_2(x) = 0.2,$$

$$P(B_3) = \sum_x B_3(x) \cdot P_2(x) = 0.2, P(B') = \sum_x B'(x) \cdot P_2(x) = 0.5.$$

Сформуємо простори терм-множин $T_1 = \{A_{11}, A_{12}, A_{13}\}, T_2 = \{A_{21}, A_{22}, A_{23}\}, T_3 = \{A_{31}, A_{32}, A_{33}\}, T_4 = \{B_1, B_2, B_3\}$ і обчислимо функції розподілу бінарних ймовірностей декартових добутків $T_1 \times T_4, T_2 \times T_4, T_3 \times T_4$.

Зокрема, для правила R_1 :

$$P_{(T_1, T_4)}(A_{11}, B_1) = \min(P(A_{11}), P(B_1)) = 0.15,$$

$$P_{(T_2, T_4)}(A_{12}, B_1) = \min(P(A_{12}), P(B_1)) = 0.2,$$

$$P_{(T_3, T_4)}(A_{13}, B_1) = \min(P(A_{13}), P(B_1)) = 0.3;$$

для правила R_2 :

$$P_{(T_1, T_4)}(A_{21}, B_2) = \min(P(A_{21}), P(B_2)) = 0.15,$$

$$P_{(T_2, T_4)}(A_{22}, B_2) = \min(P(A_{22}), P(B_2)) = 0.2,$$

$$P_{(T_3, T_4)}(A_{23}, B_2) = \min(P(A_{23}), P(B_2)) = 0.2;$$

для правила R_3 :

$$P_{(T_1, T_4)}(A_{31}, B_3) = \min(P(A_{31}), P(B_3)) = 0.15,$$

$$P_{(T_2, T_4)}(A_{32}, B_3) = \min(P(A_{32}), P(B_3)) = 0.2,$$

$$P_{(T_3, T_4)}(A_{33}, B_3) = \min(P(A_{33}), P(B_3)) = 0.2;$$

для правила R_4 :

$$P_{(T_1, T_4)}(A'_1, B') = \min(P(A'_1), P(B')) = 0.13,$$

$$P_{(T_2, T_4)}(A'_2, B') = \min(P(A'_2), P(B')) = 0.2,$$

$$P_{(T_3, T_4)}(A'_3, B') = \min(P(A'_3), P(B')) = 0.22.$$

Для кожного правила R_1 – R_4 знаходимо значення функцій

$$Q_{R_1}(x, y, z, v), Q_{R_2}(x, y, z, v), Q_{R_3}(x, y, z, v), Q_{R_4}(x, y, z, v)$$

на елементах простору $T_1 \times T_2 \times T_3 \times T_4$, які відповідають нечітким правилам.

Зокрема,

$$Q_{R_1}(A_{11}, A_{12}, A_{13}, B_1) = \begin{cases} \frac{P_{(T_1, T_4)}(A_{11}, B_1)}{P(A_{11})} \cdot \frac{P_{(T_2, T_4)}(A_{12}, B_1)}{P(A_{12})} \cdot \frac{P_{(T_3, T_4)}(A_{13}, B_1)}{P(A_{13})} = 1, \\ 1; \end{cases}$$

$$Q_{R_2}(A_{21}, A_{22}, A_{23}, B_2) = \begin{cases} \frac{P_{(T_1, T_4)}(A_{21}, B_2)}{P(A_{21})} \cdot \frac{P_{(T_2, T_4)}(A_{22}, B_2)}{P(A_{22})} \cdot \frac{P_{(T_3, T_4)}(A_{23}, B_2)}{P(A_{23})} = \frac{2}{3}, \\ 1; \end{cases}$$

$$Q_{R_3}(A_{31}, A_{32}, A_{33}, B_3) = \begin{cases} \frac{P_{(T_1, T_4)}(A_{31}, B_3)}{P(A_{31})} \cdot \frac{P_{(T_2, T_4)}(A_{32}, B_3)}{P(A_{32})} \cdot \frac{P_{(T_3, T_4)}(A_{33}, B_3)}{P(A_{33})} = \frac{1}{16}, \\ 1; \end{cases}$$

$$Q_{R_4}(A'_1, A'_2, A'_3, B') = \begin{cases} \frac{P_{(T_1, T_4)}(A'_1, B')}{P(A'_1)} \cdot \frac{P_{(T_2, T_4)}(A'_2, B')}{P(A'_2)} \cdot \frac{P_{(T_3, T_4)}(A'_3, B')}{P(A'_3)} = 1, \\ 1. \end{cases}$$

На наступному кроці знаходимо умовні ймовірності нечітких правил:

$$P_{R_1}(A_{11}, A_{12}, A_{13} | B_1) = \frac{Q_{R_1}(A_{11}, A_{12}, A_{13}, B_1)}{\sum_i Q_{R_i}(x, y, z, v)} = \frac{48}{131},$$

$$P_{R_2}(A_{21}, A_{22}, A_{23} | B_2) = \frac{Q_{R_2}(A_{21}, A_{22}, A_{23}, B_2)}{\sum_i Q_{R_i}(x, y, z, v)} = \frac{96}{393},$$

$$P_{R_3}(A_{31}, A_{32}, A_{33} | B_3) = \frac{Q_{R_3}(A_{31}, A_{32}, A_{33}, B_3)}{\sum_i Q_{R_i}(x, y, z, v)} = \frac{131}{768},$$

$$P_{R_4}(A'_1, A'_2, A'_3 | B') = \frac{Q_{R_4}(A'_1, A'_2, A'_3, B')}{\sum_i Q_{R_i}(x, y, z, v)} = \frac{48}{131}.$$

За узагальноною формулою повної ймовірності знаходимо ймовірність виходу B' системи нечітких правил з входами A_{11}, A_{21}, A_{31} . Отже, маємо

$$\begin{aligned} P(B') &= P_{R_1}(A_{11}, A_{21}, A_{31} | B_1) \cdot P_{R_4}(A'_1, A'_2, A'_3 | B') + \\ &+ P_{R_2}(A_{13}, A_{23}, A_{32} | B_2) \cdot P_{R_4}(A'_1, A'_2, A'_3 | B') + \\ &+ P_{R_3}(A_{13}, A_{23}, A_{33} | B_3) \cdot P_{R_4}(A'_1, A'_2, A'_3 | B') \approx 0.06. \end{aligned}$$

ВИСНОВКИ

Запропонований підхід на основі нечітких моделей дає змогу обчислювати достовірність виходу системи нечітких правил. Вочевидь, що ці результати потребують подальших досліджень. Зокрема, виникають питання щодо меж оцінок достовірності, повноти системи правил, залежності достовірності результатів від кількості правил. Відповіді на деякі з цих питань досить прості, але відповіді на інші потребують досить складних обчислень.

Цей підхід до моделювання нечітких знань використано для побудови геомопатичних діагностичних експертних систем. Є сподівання, що отримані у цій статті результати (можливо, з певними уточненнями в запропонованих формулах) можна використати в подальшому для навчання таких систем з метою отримання найбільш достовірних результатів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Klir G.J., Yuan B. (Eds.). Fuzzy sets, fuzzy logic and fuzzy systems: Selected papers by Lotfi A. Zadeh. *Advances in Fuzzy Systems — Applications and Theory*. Vol. 6. Singapore: World Scientific, 1996. 848 p. <https://doi.org/10.1142/2895>.
2. Leski J. *Systemy neuronowo-rozmyte*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2008. 690 s.
3. Provotar A.I., Lapko A.V., Provotar A.A. Fuzzy inference systems and their applications. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2013. Vol. 49, N 4. P. 517–525. <https://doi.org/10.1007/s10559-013-9537-9>.
4. Rutkowska D., Pilinski M., Rutkowski L. *Sieci neuronowe, algorytmy genetyczne i systemy rozmyte*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1997. 412 s.
5. Zadeh L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Syst.* 1999. Vol. 100, Suppl. 1. P. 9–34. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(99\)80004-9](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(99)80004-9).
6. Kosko B. Fuzzy systems as universal approximators. *IEEE Transactions on Computers*. 1994. Vol. 43, N 11. P. 1329–1333.
7. Buckley J.J. Fuzzy probabilities: New approach and applications. *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Vol. 115. Berlin; Heidelberg: Springer, 2005. 165 p. <https://doi.org/10.1007/3-540-32388-0>.
8. Vejnarová J. Conditional independence relations in possibility theory. *Int. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*. 2000. Vol. 08, N 03. P. 253–269. <https://doi.org/10.1142/S0218488500000186>.
9. Provotar O.I., Provotar O.O. Credibility in fuzzy inference systems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 6. P. 866–876. <https://doi.org/10.1007/s10559-017-9988-5>.

O.I. Provotar, O.P. Ilkun

AN APPROACH TO FINDING CREDIBILITY ESTIMATES IN FUZZY MODELING

Abstract. The author proposes an approach to finding numerical estimates of the credibility of fuzzy knowledge in fuzzy logical inference systems. The “input–output” type system is modeled by means of fuzzy logic. According to Mamdani’s rule, the output of the system is found in the form of fuzzy knowledge with subsequent calculation of its credibility. Elements of the probability theory of fuzzy events are used to calculate the credibility of fuzzy knowledge. An example of calculating the credibility of fuzzy knowledge is given.

Keywords: fuzzy set, conditional probability of a fuzzy event, fuzzy rule

Надійшла до редакції 28.04.2023