

М.Я. КУШНІР

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна,
e-mail: *myk.kushnir@chnu.edu.ua*.

К.А. ТОКАРЄВА

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна,
e-mail: *tokarieva.chnu@gmail.com*.

ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ARIMA-МОДЕЛІ НА НЕЛІНІЙНИЙ ТА НЕПЕРЕРВНИЙ ВИПАДКИ

Анотація. Наведено один метод розширення класичних ARIMA- та GARCH-моделей на неперервний та нелінійний випадки. Як розширені моделі розглянуто стохастичні диференціально-функціональні рівняння, які є природним узагальненням сум незалежних випадкових величин. Запропоновано нову модель і відповідну оптимізаційну задачу оцінювання параметрів моделі, причому непараметричну задачу зведено до параметричної. Нову модель протестовано на реальних даних та зроблено порівняльний аналіз результатів прогнозування і класичних моделей.

Ключові слова: стохастичні диференціально-функціональні рівняння, генетичний алгоритм, прогнозування фінансових процесів, стохастична оптимізація.

ВСТУП

Аналіз та прогнозування складних систем є однією із найбільш досліджуваних задач різних прикладних галузей математики [1–7]. Розглянемо найбільш вивчені моделі, що використовують для дослідження складних систем. Це насамперед часові ряди, які є однією з найпоширеніших структур даних для моделювання [8, 9]. Використання часових рядів зумовлене простотою задання моделі та інтерпретацією результатів оцінювання параметрів моделі [10], що включає в себе чимало тестів для визначення стаціонарності досліджуваного процесу, наявності одиничного кореня, перевірки гомоскедастичності залишків тощо. Безсумнівно, використання саме часових рядів і стало початком розроблення багатьох інших математичних моделей, які певною мірою розширюють сферу застосування останніх.

ОГЛЯД ОСНОВНИХ МОДЕЛЕЙ

Насамперед розглянемо, так звані неперервні авторегресійні моделі (continuous autoregressive models, CAR model) або неперервні авторегресійні моделі рухомого середнього (continuous parameter ARMA, CARMA model) [8–14], які базуються на припущенні про неперервність досліджуваного процесу. Найчастіше такі процеси описують за допомогою стохастичних диференціальних рівнянь Іто, оскільки ці рівняння є природним узагальненням звичайних диференціальних рівнянь та містять випадковості у вигляді інтеграла Іто. Наприклад, у [12] основне припущення полягає в тому, що реальний процес описують за допомогою стохастичного диференціального рівняння Іто

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t), \quad (1)$$

де $W(t)$, $t \geq 0$, — стандартний Вінерів процес відносно фільтрації $F = \{F_t\}_{t \geq 0}$. У [12] розглянуто моделі Кокса–Росса–Інтерсолла, Холла–Уайта та деякі моделі типу процесів Орнштейна–Уленбека.

У [10] наведено CARMA-моделі, що мають вигляд

$$\begin{aligned} B^p x(t) + a_1 B^{p-1} x(t) + \dots + a_p x(t) = \\ = b_0 B W(t) + b_1 B^2 W(t) + \dots + b_q B^{q+1} W(t), \end{aligned} \quad (2)$$

де B — лаговий оператор, який задано співвідношенням $Bx(t) = x(t-1)$.

Зауважимо, що рівняння (2) можна записати у вигляді векторного рівняння (1), причому коефіцієнт біля dt буде лінійним функціоналом від розв'язку x на інтервалі $[t-p, t]$. Унаслідок лінійності цього коефіцієнта розв'язок рівняння (2) має низку властивостей, що характеризують чимало реальних процесів на фінансовому ринку. Наприклад, коваріаційну функцію для процесу (2) можна визначити співвідношенням

$$\gamma(h) = \text{cov}(x(t), x(t+h)) = \sum_{i=1}^p \beta_i e^{\lambda_i |h|},$$

де λ_i — власні значення допоміжної матриці до рівняння (2), β_i , $i=1, \dots, p$, — деякі коефіцієнти. На відміну від [9], у [8] розглянуто моделі типу Орнштейна-Уленбека

$$B^p x(t) + a_1 B^{p-1} x(t) + \dots + a_p x(t) = \sigma W(t). \quad (3)$$

Також детально розглянуто методи оцінювання параметрів моделі (3), властивості кореляційної матриці, методи оцінювання невідомого параметра p , оцінка якого є першим кроком до отримання оцінки ARIMA-моделей або їхніх модифікацій.

У [13] основною є модель вигляду

$$x(t) = \int_{-\infty}^0 h(t-s; \theta) dW(s), \quad (4)$$

де $h(t-s; \theta)$ — деяка відома функція, залежна від відомого параметра θ . Таким чином, рівняння (4) можна інтерпретувати як розширення рівняння (2) на неперервний випадок функції $h(t-s; \theta)$. У [13] приділено увагу оцінюванню невідомого параметра θ на основі методу максимальної правдоподібності.

Дещо інший підхід, що відображає врахування екзогенних змінних як додаткового джерела невизначеності, наведено в [8, 15]. Так, у [8] класичну ARMA-модель розвинуто до ARMA-моделі із врахуванням прихованих марковських процесів, тобто розглянуто часовий ряд

$$x(t) - m = \sum_{i=1}^p \phi_i(\xi_t)(x(t-i) - m) + \sum_{j=0}^q \theta_j(\xi_t) \varepsilon_j, \quad (5)$$

де ξ_t — дискретний ланцюг Маркова з матрицею переходу за один крок P , а елементи матриці P визначають як імовірності

$$P_{ij} = P(\xi_t = j | \xi_{t-1} = i), \quad i, j \in S.$$

Тут S — множина станів дискретного ланцюга Маркова ξ_t . Таким чином, у розширеній моделі (5) враховано переключення, які інколи називають зовнішніми до залишків моделі ε_j .

У [15] розширено поняття класичної ARIMA-моделі на процеси Леві. Аналогічний підхід, проте із напівмарковськими процесами, запропоновано у [16].

Ще одним напрямом розширення моделей часових рядів можна вважати багаточарові моделі, в яких прогнозування проводиться на основі багаторівневих моделей або нейронних мереж. У [17] розроблено нейронну мережу, зв'язки у якій являють собою не класичні лінійні моделі із функціями активації, а з випадковими

процесами, параметри яких залежать від оцінюваних процесів у попередні моменти часу. Отже, у [17] описано композицію нейронних мереж із часовими рядами, наведено алгоритм оцінювання параметрів моделі та доведено достатні умови збіжності відповідного алгоритму, який базується на Баєсовому підході. Автори в [17] також звернули увагу на оцінювання параметрів часових рядів, що разом із нейронними мережами дають змогу будувати достатньо точні прогнози для деяких реальних фінансових ринків. Зауважимо, що в [17] вибрано моделі, близькі до розширених фільтрів Калмана та Калмана–Бюсі, проте для оцінювання їхніх параметрів використовують методи bootstrap.

У [18] досліджено тести на перевірку лінійності моделей часових рядів, що використовують в нейронних мережах.

З огляду на викладене можемо стверджувати, що перехід від класичних дискретних моделей до більш загальних неперервних моделей відбувається з використанням різних математичних моделей включно зі стохастичними диференціальними рівняннями та моделями нейронних мереж. Найбільшою перевагою неперервних моделей є відсутність припущення про однакові проміжки часу між спостереженнями процесу. Тобто для оцінювання параметрів або гіперпараметрів неперервних моделей часи спостережень $x(t_1), \dots, x(t_N)$ не повинні задовольняти класичного співвідношення $t_n - t_{n-1} = t_m - t_{m-1}$, $n \neq m$, що дає змогу розглядати дані з пропусками (gaps). Крім того, сучасні методи оцінювання вартості активів дають змогу відслідковувати їхню динаміку майже неперервно, що також є підставою для використання неперервних моделей.

ОСНОВНА МОДЕЛЬ ТА ДОПОМІЖНИЙ РЕЗУЛЬТАТ

Найбільш поширеними для дослідження є моделі лінійних часових рядів, особливо ARMA-модель та її модифікації [19], тобто досліджуваний процес $x(t)$, $t \geq 0$, задовольняє співвідношення

$$x(t) - m = \sum_{i=1}^p \phi_i (x(t-i) - m) + \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_j,$$

де ϕ_i , θ_j , $m \in \mathbb{R}$; p , q — відомі параметри ARMA-моделі; ε_j — незалежні однаково розподілені випадкові величини із нульовим математичним сподіванням та скінченною дисперсією $\sigma^2 < \infty$.

Проте, як було показано в багатьох дослідженнях, класична $\text{ARMA}(p, q)$ -модель недостатньо точно визначає динаміку реальних процесів, оскільки порушуються умови гомоскедастичності дисперсії, незалежності залишків тощо. Крім того, $\text{ARMA}(p, q)$ -модель є лінійною, що ускладнює вибір моделі для реальних нелінійних систем.

Проаналізуємо основну модель, на базі якої будемо розглядати оцінювання та побудову прогнозів для реальних процесів. Основною математичною моделлю, наведеною в цій роботі, є нелінійне стохастичне диференціально-функціональне рівняння Іто, яке задане співвідношенням

$$dx(t) = Lx_t dt + Gx_t dW(t) \quad (6)$$

з початковою умовою

$$x(t) = x_0(t), \quad t \in [-h, 0], \quad (7)$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^d$, W — одновимірний стандартний Вінерів процес, $L, G: C([-h, 0]) \rightarrow \mathbb{R}^d$ — функціонали, що зазвичай визначаються за допомогою інтегрального представлення,

$$Lu_t = \int_{-h}^0 l(t, s, u(t+s)) ds, \quad Gu_t = \int_{-h}^0 g(t, s, u(t+s)) ds.$$

Якщо функція l лінійна за третім аргументом, отримуємо лінійний випадок. Проблема вибору моделі (1) базується на оцінюванні невідомих параметрів h , l та g . Параметр h відіграє роль максимального запізнення або передісторії, на основі якої конструюється значення процесу $x(t)$ згідно з співвідношенням (6). Для подальшого розгляду визначимо детермінований процес $y(t) = Ex(t)$, який задовольняє диференціально-функціональне рівняння

$$dy(t) = Ly_t dt. \quad (8)$$

Розглянемо деякі властивості розв'язків диференціально-функціональних рівнянь (6), (8). Перша властивість стосується представлення розв'язку рівняння (6) на основі розв'язку рівняння (8).

Лема 1. Нехай $l(t, s, x)$ є лінійною функцією за третім аргументом та не залежить від першого аргументу t . Тоді розв'язок задачі Коші (6), (7) має такий вигляд:

$$x(t) = y(t) + \int_0^t X(t-s)Gx_s dW(s), \quad (9)$$

де $y(t)$ — розв'язок задачі Коші (7), (8), $X(t)$ — розв'язок рівняння (8) за початкової умови

$$X(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-h, 0), \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Доведення. Розглянемо диференціал випадкового процесу (9), використовуючи лінійність функціонала L ,

$$dx(t) = d \left(y(t) + \int_0^t X(t-s)Gx_s dW(s) \right) = dy(t) + d \left(\int_0^t X(t-s)Gx_s dW(s) \right).$$

Застосовуючи властивості інтеграла Іто, запишемо диференціал від другого доданка у вигляді

$$\begin{aligned} d \left(\int_0^t X(t-s)Gx_s dW(s) \right) &= X(t-t)Gx_t dW(t) + \int_0^t dX(t-s)Gx_s dW(s) = \\ &= Gx_t dW(t) + \int_0^t LX_{t-s}Gx_s dW(s)dt. \end{aligned}$$

Згідно з припущенням про лінійність функціонала L формалізуємо вираз

$$\int_0^t LX_{t-s}Gx_s dW(s) = L \int_0^t X_{t-s}Gx_s dW(s).$$

Отже,

$$\begin{aligned} dx(t) &= dy(t) + Gx_t dW(t) + L \int_0^t X_{t-s}Gx_s dW(s)dt = \\ &= Ly_t dt + Gx_t dW(t) + L \int_0^t X_{t-s}Gx_s dW(s)dt = \\ &= \left(Ly_t + L \int_0^t X_{t-s}Gx_s dW(s) \right) dt + Gx_t dW(t) = \\ &= L \left(y_t + \int_0^t X_{t-s}Gx_s dW(s) \right) dt + Gx_t dW(t) = Lx_t dt + Gx_t dW(t), \end{aligned}$$

що і доводить твердження леми 1.

Лему 1 буде використано для аналізу та оцінювання параметрів запропонованої моделі. Далі розглядатимемо лише стохастичні диференціально-функціональні рівняннями (6), які будуть задовольняти умови леми 1. Тобто, функціонал L матиме вигляд

$$Lu_t = \int_{-h}^0 l(s, u(t+s))ds = \int_{-h}^0 l(s)u(t+s)ds. \quad (10)$$

У подальшому будемо досліджувати оцінку моделі (1), а саме оцінку невідомої трійки

$$(h, l(s), g(t, s, x)) \quad (11)$$

на основі мінімізації функціонала якості

$$I(h, l, g) = \frac{1}{T} \int_0^T E(x(t) - x_{\text{sample}}(t))^2 dt + h, \quad (12)$$

де $x_{\text{sample}}(t)$ — значення спостережуваного процесу, $[0, T]$ — час спостереження. Побудова функціонала якості (12) за умови лінійності (10) базується на побудові квадратичного відхилення від спостережуваного значення та врахуванні величини запізнення h . Аналогічний підхід також використовують для побудови інформаційних критеріїв Акаїке та Шварца.

МЕТОД ОЦІНЮВАННЯ НЕВІДОМИХ ПАРАМЕТРІВ

Згідно з побудовою функціоналів L , G та результатом леми 1 можна оцінювати параметри (11) на основі уточнення класів функцій $l(s)$ та $g(t, s, x)$. Одним із найбільш загальних є припущення про неперервність функцій за всіма змінними, тобто

$$l \in C[-h, 0], \quad g \in C([0, T] \times [-h, 0] \times R^d).$$

Проте ці класи є занадто широкими для практичного застосування. Тому далі будемо вибирати простіші класи, які частіше застосовують в прогнозуванні фінансових активів

$$\begin{aligned} l \in \mathbf{L}_{n,m} &= \{l \in C([-h, 0]): l(s) = l_0 + l_{1,1}s + \dots + l_{1,n}s^n + \\ &+ l_{2,1} \log(s+1) + \dots + l_{2,1} \log^m(s+1)\}, \\ g \in \mathbf{G}_{n_t, m_t, n_s, m_s, k} &= \left\{ g \in C([0, T] \times [-h, 0] \times R^d): g(t, s, x) = \right. \\ &= \sum_{k_0=0}^k x^{k_0} \left(\sum_{n=0}^{n_t} g_{k_0, n}^{t,1} t^n + \sum_{m=1}^{m_t} g_{k_0, m}^{t,2} \log^m(t+1) \right) \times \\ &\times \left(\sum_{n=0}^{n_s} g_{k_0, n}^{s,1} s^n + \sum_{m=1}^{m_s} g_{k_0, m}^{s,2} \log^m(s+1) \right) \Bigg\}. \end{aligned}$$

Розмірності розглянутих просторів такі:

$$\begin{aligned} \dim(\mathbf{L}_{n,m}) &= n + m + 1, \\ \dim(\mathbf{G}_{n_t, m_t, n_s, m_s, k}) &= (k+1)(n_t + m_t + 1)(n_s + m_s + 1). \end{aligned}$$

Шукаючи мінімальне значення функціонала якості на просторах $L_{n,m}$, $G_{n_t, m_t, n_s, m_s, k}$, зводимо розглядувану задачу до параметричної задачі оптимізації на відміну від непараметричної задачі оптимізації на ширших просторах $C([-h, 0])$ та $C([0, T] \times [-h, 0] \times R^d)$ відповідно. Отже, звузивши простори пошуку, перейдемо до параметричної задачі оптимізації, що значно полегшує наступне оцінювання. Крім того, для обмежених значень $x \in R^d$ можна стверджувати, що об'єднання множин $L_{n,m}$ та $G_{n_t, m_t, n_s, m_s, k}$ є всюди щільними в $C([-h, 0])$ та $C([0, T] \times [-h, 0] \times \{x: |x| < K\})$ відповідно для довільного $0 < K < \infty$. Інакше кажучи, для довільного $\varepsilon > 0$ та довільних $u_1 \in C([-h, 0])$, $u_2 \in C([0, \infty) \times [-h, 0] \times \{x: |x| < K\})$ існують значення параметрів $(n, m, n_t, m_t, n_s, m_s, k)$ та відповідних функцій $\tilde{u}_1 \in L_{n,m}$ та $\tilde{u}_2 \in G_{n_t, m_t, n_s, m_s, k}$, для яких виконується співвідношення $|u_i - \tilde{u}_i| < \varepsilon$, $i = 1, 2$.

Для оцінювання невідомого вектора параметрів

$$par = (l_0, l_{1,1}, \dots, l_{1,n}, l_{2,1}, \dots, g_{0,0}^{t,1}, \dots, g_{m_s,k}^{s,2})$$

далі будемо використовувати метод рою частинок [6], оскільки він виявився найбільш точним для досліджуваних даних.

АНАЛІЗ РЕАЛЬНИХ ДАНИХ

Для аналізу нової моделі використаємо три часові ряди, які відображають динаміку трьох фінансових процесів:

- 1) вартість акцій компанії Apple (дані за добу у період з 1.05.2022 по 1.05.2023, 250 вимірювань);
- 2) обмінний курс BTC/USD (дані за добу у період з 1.05.2022 по 1.05.2023, 261 вимірювань);
- 3) обмінний курс EUR/USD (дані за добу у період з 1.05.2022 по 1.05.2023, 366 вимірювань).

Динаміку розглянутих процесів проілюстровано на рис. 1–3. Водночас з динамікою відповідних процесів наведено також значення автокореляційних функцій (ACF) та частинних автокореляційних функцій (PACF). Зазначимо, що у всіх трьох випадках процеси є нестационарними, про це свідчать результати тестів Дікі–Фуллера, Льюнга–Бокса та Квятковського–Філіпса–Шмідта–Шина. Для першого (Apple) та другого (обмінний курс BTC/USD) процесів порядок інтегровності становить $d=1$, для третього процесу (обмінний курс EUR/USD) значення порядку інтегровності $d=2$.

У запропонованій статті більше уваги приділено саме оцінюванню моделі за даними, а не врахуванню кількості параметрів у моделі, тому для перевірки точності моделей на навчальних даних та порівняння прогнозів моделей на тестових даних використано три основні показники:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)^2},$$

$$MAE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |y_t - \hat{y}_t|, \quad MAPE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right| \cdot 100\%,$$

де T — кількість спостережень, y_t — реальні значення процесу у час t , $\hat{y}_t$ — наближення y_t за моделлю або прогноз у час t .

Для аналізу вибрано оптимальну ARIMA-модель та дві GARCH-специфікації: спрощену мультиваріантну sGARCH та узагальнену із розривними дисперсіями gjrGARCH. Ці дві GARCH-специфікації виявилися найбільш оптимальними, оскільки мінімізують значення RMSE, MAE, MAPE. Дані розділено

на два інтервали: навчальний у період з 1.05.2022 по 31.03.2023 та тестовий з 1.04.2023 по 1.05.2023. Для порівняння моделей на навчальних даних будемо використовувати табл. 1. Як видно з табл. 1 на навчальних даних усі три моделі дають приблизно однаковий результат, що може бути інтерпретоване як специфічний вибір моделі для середнього в GARCH-моделі, що збігається з оптимальною ARIMA-моделлю. Проте аналіз показує, що на навчальних даних значення RMSE, MAE, MAPE відрізняються більш суттєво.

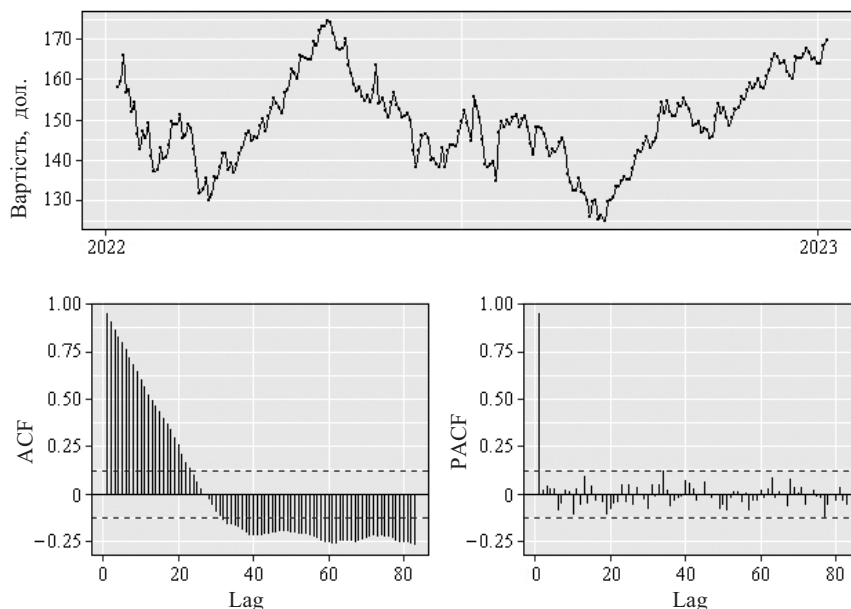


Рис. 1. Вартість акцій компанії Apple у період з 1.05.2022 по 1.05.2023 разом із автокореляційною функцією (ACF) та частинною автокореляційною функцією (PACF)

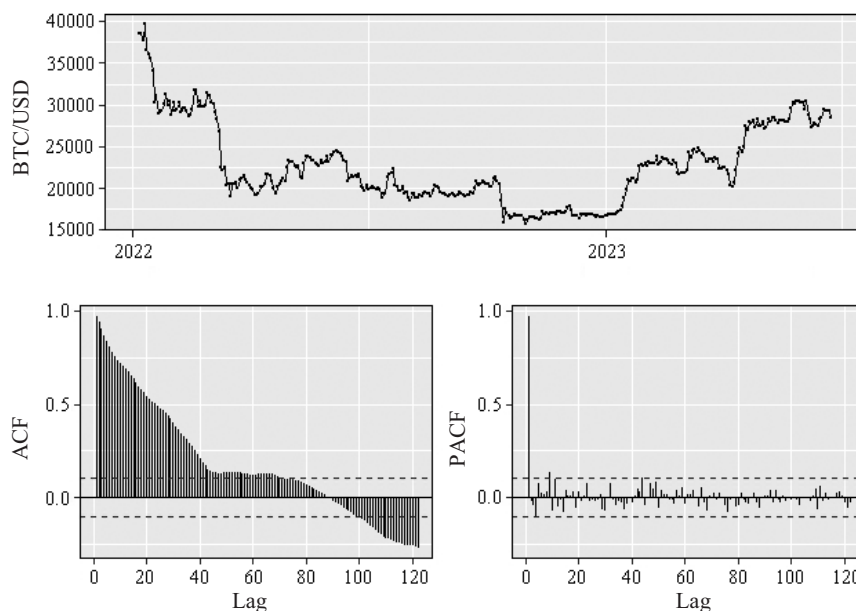


Рис. 2. Обмінний курс BTC/USD у період з 1.05.2022 по 1.05.2023 разом із автокореляційною функцією (ACF) та частинною автокореляційною функцією (PACF)

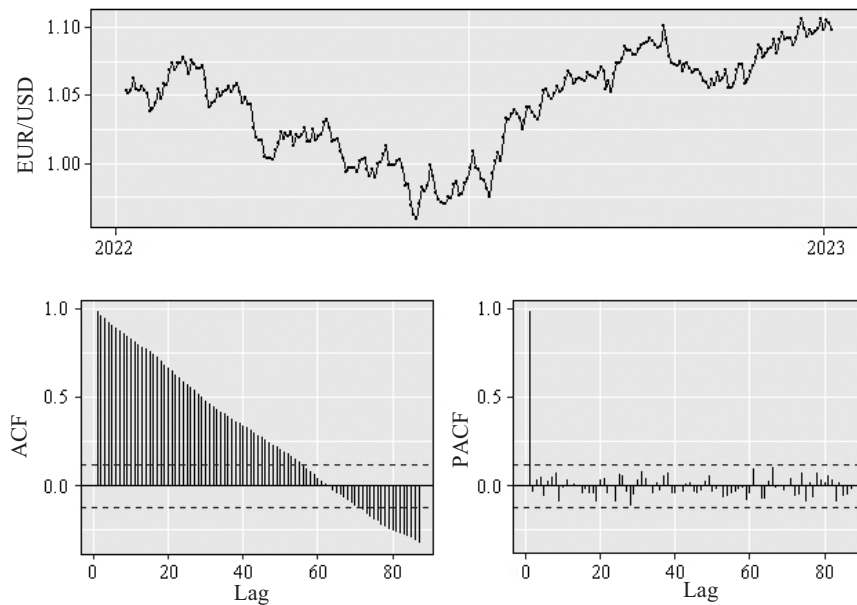


Рис. 3. Обмінний курс EUR/USD у період з 1.05.2022 по 1.05.2023 разом із автокореляційною функцією (ACF) та частинною автокореляційною функцією (PACF)

Розглянемо тепер аналіз наведених моделей та нової запропонованої моделі (6) для $L_{n,m}$ та $G_{n_t, m_t, n_s, m_s, k}$, причому будемо вважати що всі константи в цих просторах однакові, тобто

$$n = m = n_t = m_t = n_s = m_s = k \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Таблиця 1. Числові характеристики для трьох процесів на навчальних вибірках

Apple				
Моделі	RMSE	MAE	MAPE (%)	logLik
ARIMA(4,1,1)	3.014875	2.234123	1.51676	-587.93
sGARCH(4,1,1)(1,1)	3.025881	2.222184	1.510279	-586.3425
gjrGARCH(4,1,1)(1,1)	3.025102	2.223523	1.511729	-585.1905
BTC/USD				
Моделі	RMSE	MAE	MAPE (%)	logLik
ARIMA(0,2,1)	741.3196	463.484	2.030672	-2690.52
sGARCH(0,2,1)(1,1)	745.9248	458.2985	2.014739	-2662.567
gjrGARCH(0,2,1)(1,1)	744.017	457.5174	2.012519	-2661.796
EUR/USD				
Моделі	RMSE	MAE	MAPE (%)	logLik
ARIMA(0,1,0)	0.006248042	0.004683876	0.4534139	855.18
sGARCH(0,1,0)(1,1)	0.006246513	0.004674132	0.4535177	855.2357
gjrGARCH(0,1,0)(1,1)	0.006246636	0.004676206	0.4537088	856.1199

Таблиця 2. Числові характеристики для трьох процесів на навчальних вибірках

Apple			
Моделі	RMSE	MAE	MAPE (%)
ARIMA(4,1,1)	3.683801	3.238859	1.9497963
sGARCH(4,1,1)(1,1)	2.253259	1.712294	1.0455451
gjrGARCH(4,1,1)(1,1)	2.161535	1.620379	0.9864241
Нова модель, $n = 1$	4.4890	4.21678	2.45854
Нова модель, $n = 2$	4.00785	2.148923	1.843941
Нова модель, $n = 3$	2.047652	1.634870	0.978273
Нова модель, $n = 4$	1.622162	1.100354	0.835698
BTC/USD			
Моделі	RMSE	MAE	MAPE (%)
ARIMA(0,2,1)	1771.8733	1438.0472	5.063041
sGARCH(0,2,1)(1,1)	1963.9042	1590.3372	5.613335
gjrGARCH(0,2,1)(1,1)	989.8264	886.2989	3.067350
Нова модель, $n = 1$	2851.3414	2051.3746	11.35465
Нова модель, $n = 2$	845.3452	765.4656	2.93745
Нова модель, $n = 3$	841.2938	753.3984	2.87374
Нова модель, $n = 4$	841.2938	753.3984	2.87374
EUR/USD			
Моделі	RMSE	MAE	MAPE (%)
ARIMA(0,1,0)	0.01297121	0.011561217	1.0525709
sGARCH(0,1,0)(1,1)	0.01089572	0.009608173	0.8746997
gjrGARCH(0,1,0)(1,1)	0.01151610	0.010181460	0.9268951
Нова модель, $n = 1$	0.164759	0.163545	3.4657567
Нова модель, $n = 2$	0.009845	0.009154	0.852643
Нова модель, $n = 3$	0.008754	0.008765	0.828991
Нова модель, $n = 4$	0.008754	0.008765	0.828991

Результати оцінювання показників якості моделі RMSE, MAE, MAPE на тестовій вибірці показано в табл. 2. Як бачимо із табл. 2, з використанням нового методу прогнозу є більш точними, а також оцінки точності для $n = 3$ та $n = 4$ практично збігаються, тобто використання просторів $L_{n,m}$ та $G_{n_t, m_t, n_s, m_s, k}$ із одночасним збільшенням всіх розмірностей є недоцільним. Крім того, для першого процесу (вартість акцій компанії Apple) для $n = 2$ точність є значно гіршою ніж для класичних лінійних моделей. Це можна пояснити тим, що оптимальна ARIMA-модель та її GARCH-модифікації мають високий рівень залежності від передісторії, тобто порядку автокореляції $p = 4$. Тому для досягнення точності класичних моделей слід використовувати простори більш високих розмірностей. Проте для $n = 4$ точність у всіх розглянутих реальних процесах перевищує точність класичних ARIMA- та GARCH-моделей.

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто новий метод оцінювання прогнозу процесів фінансових ринків, який ґрунтується на стохастичних диференціальних рівняннях із запізненням. У теорії часових рядів на основі цього підходу будують нелінійні моделі та неперервні моделі, що дає змогу складати точніший прогноз для даних із замірюваннями через нерівномірні інтервали часу. Для основних класичних моделей часових рядів розроблено алгоритми оцінювання параметрів, проте для нелінійних моделей створення аналогічних алгоритмів ускладнюється формою нелінійності. Тому для оцінювання параметрів моделі використано генетичний алгоритм, а саме метод рою частинок, оскільки останній виявився найбільш оптимальним для розглядуваної задачі. Зауважимо, що методи послідовних наближень (див., наприклад, [20]) не можуть бути використані для цієї задачі.

У роботі вказано один із підходів переходу від оптимізаційної задачі за класом функцій до параметричної оптимізаційної задачі, що дає змогу ефективніше використовувати генетичні алгоритми пошуку оптимальних параметрів. Крім того, на основі леми 1 можна оцінювати параметри функціоналів L та G за таким алгоритмом: спочатку оцінювати функціонал L , використовуючи детерміноване рівняння з $g = 0$, потім — функціонал G з використанням дисперсії реального процесу.

Отримані теоретичні результати протестовано на реальних даних із використанням динаміки трьох реальних фінансових процесів. Результати тестування показали, що нова модель краще апроксимує реальні фінансові процеси, оскільки враховує як нелінійності моделей, так і нерегулярність між замірами реальних процесів.

Як зазначено, розроблена модель містить низку недоліків. Основний з них полягає у тому, що перехід від дискретної до неперервної моделі часто залежить від додаткових припущень щодо властивостей теоретичного наближення. Інший недолік моделі полягає у відсутності ітераційного процесу оцінювання параметрів, тому у роботі використано генетичні алгоритми для оцінювання невідомих параметрів нової моделі.

У подальшому планується використати цей підхід для побудови нових моделей на основі нейронних мереж, де переходи будуть ґрунтуватися на основі моделі (6).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Barro D., Consigli G., Varun V. A stochastic programming model for dynamic portfolio management with financial derivatives. *Journal of Banking & Finance*. 2022. Vol. 140. 106445. <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2022.106445>.
2. de Feo F., Federico S., Świąch A. Optimal control of stochastic delay differential equations and applications to path-dependent financial and economic models. arXiv preprint arXiv:2302.08809. 17 Feb 2023. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2302.08809>.
3. Blechschmidt J. Numerical methods for stochastic control problems with applications in financial mathematics. Chemnitz University of Technology, 2022. 223 p. URL: <https://d-nb.info/1258447126/34>.
4. Mohammadi M., Rezakhah S., Modarresi N., Amindavar H. Continuous-time autoregressive models excited by semi-Lévy process for cyclostationary signal analysis. *Digital Signal Processing*. 2021. Vol. 118. P. 103–195. <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2021.103195>.
5. Атоєв К.Л., Кнопов П.С., Пепеляєва Т.В. Розробка нових моделей оцінювання ефективності природокористування за умов змін клімату та зростання невизначеності. *Теорія оптимальних рішень*. 2017. № 2017. С. 72–77.
6. Кнопова В.П., Пепеляєва Т.В. О некоторых стохастических моделях финансовой математики. *Кибернетика и системный анализ*. 2001. № 3. С. 152–158.

7. Кнопов П.С., Пепеляева Т.В. О некоторых торговых стратегиях на рынке ценных бумаг. *Кибернетика и системный анализ*. 2002. № 5. С. 117–121.
8. Costacurta J., Duncker L., Sheffer B., Williams A., Gillis W., Weinreb C., Markowitz J., Datta S., Linderman S. Distinguishing discrete and continuous behavioral variability using warped autoregressive HMMs. *bioRxiv*. June 28, 2022. <https://doi.org/10.1101/2022.06.10.495690>.
9. Демченко С.С., Кнопов П.С., Чорней Р.К. Оптимальные стратегии для полумарковской системы запасов. *Кибернетика и системный анализ*. 2002. № 1. С. 146–160.
10. Пепеляева Т.В. Об оптимальных моментах переключения между портфелями ценных бумаг. *Кибернетика и системный анализ*. 2002. № 1. С. 130–137.
11. Pham Dinh-Tuan. Estimation of continuous-time autoregressive model from finely sampled data. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2020. Vol. 48, Iss. 9. P. 2576–2584. <https://doi.org/10.1109/78.863060>.
12. Yang L., Gao T., Yubin L., Duan J., Liu T. Neural network stochastic differential equation models with applications to financial data forecasting. *Applied Mathematical Modelling*. 2023. Vol. 115. P. 279–299. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2022.11.001>.
13. Kennedy J., Eberhart R. Particle swarm optimization. *Proc. of IEEE International Conference on Neural Networks*. 1995. Vol. IV. P. 1942–1948.
14. Kirshner H., Unser M., Ward J. On the unique identification of continuous-time autoregressive models from sampled data. *Signal processing. IEEE Transactions on Signal Processing*. 2014. Vol. 62, Iss. 6. P. 1361–1376. <https://doi.org/10.1109/TSP.2013.2296879>.
15. Ari Y. Continuous autoregressive moving average models: From discrete AR to Lévy–Driven CARMA models. In: *Methodologies and Applications of Computational Statistics for Machine Intelligence*. 2021. P. 118–141. <https://doi.org/10.4018/978-1-7998-7701-1.ch007>.
16. Кнопов П.С., Пепеляева Т.В., Демченко И.Ю. Об одной полумарковской модели управления запасами. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. Т. 52, № 5. С. 81–88.
17. Норкин Б.В. Стохастический метод последовательных приближений для оценки риска неплатежеспособности страховой компании. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. № 6. С. 116–130.
18. Armillotta M., Fokianos K., Krikidis I. Bootstrapping network autoregressive Models for testing linearity. *Data Science in Applications*. 2023. P. 99–116. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-031-24453-7_6.
19. Brockwell P.J., Davis R.A. *Introduction to time series and forecasting*. 3rd ed. Springer, 2016. 425 p.
20. Норкин Б.В. Применение метода последовательных приближений для нахождения вероятности неразорения страховой компании при наличии случайных премий. *Кибернетика и системный анализ*. 2006. № 1. С. 112–127.

M. Kushnir, K. Tokarieva

A GENERALIZATION OF THE ARIMA MODEL TO THE NONLINEAR AND CONTINUOUS CASES

Abstract. A method of extending the classical ARIMA and GARCH models to the continuous and nonlinear cases is considered. Stochastic functional differential equations, which are a natural generalization of the sums of independent random variables, are considered extended models. Along with the new model, a relevant optimization problem for estimating model parameters is considered, and the non-parametric problem is reduced to a parametric one. The new model was tested on real data, and the forecast results were compared with classical models.

Keywords: stochastic functional differential equations, genetic algorithm, forecasting of financial processes, stochastic optimization.

Надійшла до редакції 12.05.2023