



УДК 519. 21

П.С. КНОПОВ

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: knopov1@yahoo.com.

Т.В. ПЕПЕЛЯЄВА

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: pepelaev@yahoo.com.

ДЕЯКІ БАГАТОНОМЕНКЛАТУРНІ МОДЕЛІ КЕРУВАННЯ ЗАПАСАМИ ДЛЯ КРИТЕРІЮ З ПЕРЕОЦІНКОЮ¹

Анотація. Розглянуто багатономенклатурну модель керування запасами. Досліджено задачу знаходження оптимальних у класі стаціонарних детермінованих марківських стратегій. Доведено твердження, що дає змогу зводити знаходження оптимальних стратегій до задачі знаходження оптимальних параметрів.

Ключові слова: марківські процеси, керування запасами, (s, S) -стратегія, критерій оптимальності, оптимальна стратегія.

В умовах сучасності під час розв'язування різноманітних прикладних задач підвищений інтерес становить застосування достатньо розвиненої теорії керованих випадкових процесів для знаходження оптимальних стратегій. Задача керування запасами є однією з них. Особливий інтерес до таких задач на цей час багато в чому пов'язаний з такими фактами. Будучи важливим елементом багатьох економічних систем, таких, наприклад, як торгівля, постачання, виробнича і ділова сфери, стратегії керування запасами, великою мірою визначають ефективність функціонування цих систем у цілому. Для однономенклатурних задач теорії запасів проблема знаходження умов оптимальності широко відомої в теорії запасів (s, S) -стратегії розглядалася у роботах [1–4] та інш. У цій статті досліджується багатономенклатурна модель керування запасами, а також задача знаходження оптимальних у класі стаціонарних детермінованих марківських стратегій для систем керування запасами з опуклими функціями вартості. Схожу задачу, але за деякими іншими припущеннями щодо структури витрат, досліджено в роботах [5–8].

Розглянемо модель керування системою з багатовимірними фазовим простором і простором прийняття рішень. Нехай простір станів є Декартовим добутком m множин, тобто $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$. Простір прийняття рішень має вигляд $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$.

Для кожної пари $(x_i \in X_i, a_i \in A_i)$ позначимо $r_i(x_i, a_i)$ очікувані витрати за один період, якщо i -а підсистема перебуває в стані x_i на початку періоду і приймається рішення $a_i \in A_i$.

¹ Роботу виконано за часткової підтримки Національного фонду досліджень України. Грант № 2020.02/0121.

Нехай очікувані витрати всієї системи за один період $r(x, a)$, де $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, є сепарабельною функцією, тобто має вигляд $r(x, a) = \sum_{i=1}^m r_i(x_i, a_i)$.

Далі вважатимемо, що простори $X_i, A_i, i=1, \dots, m$, є сепарабельними метричними просторами з Борелевими σ -алгебрами $\mathfrak{N}_i$ і $\mathfrak{A}_i$, а $r_i(x_i, a_i)$ є обмеженими функціями на Δ_i і виконується умова $|r_i(x_i, a_i)| \leq C_i < \infty, (x, a) \in \Delta$, для деякого $0 < C_i < \infty$. Будемо вважати, що $\Delta_i = \{(x_i, a_i), x_i \in X_i, a_i \in A_{x_i}\} \in (\mathfrak{N}_i \otimes \mathfrak{A}_i)$ — Борелеві підмножини простору $X_i \times A_i$. Простори X і A є сепарабельними метричними просторами з Борелевими σ -алгебрами $\mathfrak{N}$ і $\mathfrak{A}$. Тоді критерій ψ β -оптимальності цієї стратегії запишемо в такий спосіб:

$$\begin{aligned} \psi_{\beta}(x, \delta) &= E_x^{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k r(x_k, D_k) = E_x^{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \sum_{i=1}^m r_i(x_i^k, d_i^k) = \\ &= E_x^{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^m \beta^k r_i(x_i^k, d_i^k), \end{aligned}$$

де $X_k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_m^k)$ — стан системи в момент часу k ; $D_k = (d_1^k, d_2^k, \dots, d_m^k)$ — вибране керування в момент часу k .

Позначимо $\Xi_1(X)$ Банахів простір обмежених вимірних за Борелем функцій на X з нормою $v(x) = \sum_{i=1}^m \sup_{x_i \in X_i} |v_i(x_i)|$.

Далі опишемо модель керування запасами. Розглянемо систему керування запасами m продуктів, кожен з яких може неперервно поповнюватись. Максимальний рівень запасу i -го продукту дорівнює Q_i , тому запас i -го продукту набуває значень на $[0, Q_i]$.

Стан запасів кожного продукту перевіряють у дискретні моменти часу і потім приймають відповідні рішення щодо поповнення складів таким чином. Якщо рівень запасів i -го продукту в момент часу $n \in \mathbb{N}$ становить $X_i^n = x_i \in [0, Q_i]$, то виконується замовлення цього продукту $D_i^n \in A_i^x, A_i^x := [0, Q_i - x_i]$.

Позначимо $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m, X_i = [0, Q_i], X = (X^n: n \in \mathbb{N})$ — простір станів системи, що визначає розвиток системи в часі, а $A = A_1^x \times A_2^x \times \dots \times A_m^x$ позначимо простір прийняття рішень.

У момент часу $(n+)$ на кожен i -й продукт надходить випадкова вимога ξ_i^n і $\xi_i = (\xi_i^n: n \in \mathbb{N}), i=1, m$, — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з функціями розподілу $G_i(x), x \geq 0, i=1, m$.

Позначимо $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ і будемо вважати, що $\xi_n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \dots, \xi_m^n), n \in \mathbb{N}$, не залежать від історії системи до моменту часу n включно, $G_i(x) > 0, G(Q) = G_1(Q_1) \times \dots \times G_m(Q_m), Q = (Q_1, \dots, Q_m)$, а також $G_i(\cdot)$ є неперервними.

Еволюцію процесу запаса системи визначає рівняння

$$X^{n+1} = (X^n + D^n - \xi^n)_+, n \in \mathbb{N},$$

де $(a)_+ = \max(a, 0)$ — додатна частина $a \in \mathbb{R}_+$, або для кожного i -го

продукту ($i = \overline{1, m}$) маємо

$$X_i^{n+1} = (X_i^n + D_i^n - \xi_i^n)_+, \quad n \in \mathbb{N}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Допускатимемо, що вартість замовлення (яка може містити витрати виробництва) визначається сумою фіксованої вартості та лінійної функції, а саме замовлення $x_i > 0$ товарів призводить до очікуваних витрат замовлення $C_i(x_i) = A_i + c_i \cdot x_i$, $A_i \geq 0$, $c_i \geq 0$.

Далі припустимо, що загальні витрати зберігання та дефіциту за період часу $f_i(x_i)$ залежать від рівня запасів $x_i \geq 0$, де $f_i(\cdot)$ — напівнеперервні знизу функції.

Наведемо деякі відомості (означення та результати) з теорії керування запасами, які далі будемо використовувати.

Нехай маємо модель системи керування запасами з фазовим простором $X = [0, Q]$ і простором припустимих керувань $A_x = \{d_a, a \in [0, Q - x]\}$, де d_a — рішення про додаткове замовлення за розміром a . У момент часу n надходить випадкова вимога ξ_n , а $\xi = (\xi_n, n \in \mathbb{N})$ — послідовність незалежних однаково розподілених величин з функцією розподілу $G(x)$, $x \geq 0$, при цьому припускаємо, що $G(x)$ є неперервною. Позначимо $D_n \in A_x$ замовлення в момент часу n , якщо рівень запасу в момент n дорівнює x .

Еволюція процесу запасання має вигляд $x_{n+1} = (x_n + D_n - \xi_n)_+$, $n \in \mathbb{N}$, $(a)_+ = \max(a, 0)$.

Ймовірності переходу для будь-якої Борелевої підмножини $[0, Q]$ задають співвідношення

$$P\{[y_1, y_2] / x, d_a\} = G(x + a - y_1) - G(x + a - y_2), \quad (1)$$

$$a \in [0, Q - x], \quad 0 < y_1 \leq y_2 \leq x, \quad 0 < x \leq y_1 \leq y_2 \leq x + a,$$

$$P\{\{0\} / x, d_a\} = 1 - G(x + a), \quad a \in [0, Q - x]. \quad (2)$$

Припускаємо, що вартість замовлення $C(x)$ має вигляд

$$C(x) = A + Cx, \quad A > 0, \quad C > 0.$$

Нехай $f(x)$ — функція втрат, що пов'язана із зберіганням та дефіцитом товару за розміром x , яку вважатимемо опуклою та неперервною.

Отже, функція витрат $r(x, d_a)$ має вигляд

$$r(x, d_0) = f(x), \quad (3)$$

$$r(x, d_a) = f(x + a) + C(a). \quad (4)$$

Як критерій функціонування системи виберемо сумарні переоцінені витрати з коефіцієнтом переоцінки $\beta \in (0, 1)$

$$\psi_\beta(x, \delta) = E_x^\delta \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k r(x_k, D_k),$$

де $E_x^\delta(\cdot)$ — математичне сподівання за ймовірнісною мірою, що індукована стратегією керування $\delta = \{\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n, \dots\}$, яка складається з послідовностей перехідних імовірностей, зосереджених на A_{x_n} .

Нехай R — клас припустимих стратегій і R_1 — клас стаціонарних детермінованих марківських стратегій.

Стратегія δ^* називається оптимальною, якщо

$$\psi_\beta(x, \delta^*) = \inf_{\delta \in R} \psi_\beta(x, \delta).$$

Наведемо твердження з роботи [9], яке далі використовуватимемо.

Теорема 1. Нехай множина керувань A і множина станів X компактні і виконуються умови:

- 1) функція витрат $r(x, a)$ є напівнеперервною знизу за (x, a) ;
- 2) перехідна ймовірність $P\{\cdot / x, a\}$ слабонеперервна за (x, a) .

Тоді для будь-якого коефіцієнта переоцінки $0 < \beta < 1$ в R_1 існує ψ_β -оптимальна стратегія δ^* і мінімальні витрати $\psi_\beta(x) = \psi_\beta(x, \delta^*)$ єдиним чином визначені в $M(X)$ — Банаховому просторі обмежених вимірних за Борелем функцій на X з нормою $\|u\| = \sup_{x \in X} |u(x)|$, розв'язком рівняння оптимальності

$$\psi_\beta(x) = \inf_{\delta \in R} \{r(x, a) + \beta \int \psi_\beta(y) P(dy / x, a)\}, \quad x \in X.$$

Має місце таке твердження [2, 3].

Теорема 2. Нехай $r(x, a)$ визначено співвідношеннями (3) і (4), а $P(B / x, a)$ — співвідношеннями (1) і (2). Тоді в класі R_1 існує ψ_β -оптимальна стратегія, яку можна отримати методом послідовних наближень.

Надалі використовуємо поняття A -опуклою функції.

Означення [10]. Диференційовна функція $\varphi(y)$ називається A -опуклою, якщо для деякого $A > 0$, будь-якого y і будь-якого $\alpha \geq 0$ виконується нерівність

$$A + \varphi(x + y) - \varphi(y) - \alpha \varphi'(y) > 0.$$

Лема 1 [3, 10]. Нехай $S \in [0, Q]$ — точка локального мінімуму функції $F(x)$. Нехай в точці $x \in [0, S]$, для якої $F(x) > A + F(S)$, крива $F(x)$ не має локальних максимумів і в точці $x > S$ функція $F(x)$ монотонно зростає. Тоді існує єдина точка x , в якій криві $z_1 = F(x)$ та $z_2 = A + \min_{a \in [0, Q-x]} F(x + a)$ перетинаються.

Лема 2 [3, 10]. Нехай функція $F(x)$ A -опукла для $x \leq S$ і монотонна для $x > S$. Тоді крива $F(x)$ не має відносних максимумів в точках $x \in [0, S]$, для яких $F(x) > A + F(S)$.

Нехай $F(x)$ визначається співвідношенням

$$F(x) = cx + f(x) + \int_0^x \psi_\beta(y) dG(x - y),$$

$$F_n(x) = cx + f(x) + \int_0^x \psi_\beta^{(n-1)}(y) dG(x - y),$$

$$\psi_\beta^n(y) = L \psi_\beta^{n-1}(y),$$

$$\text{де } LF(x) = \min_{x \in A_x} \{cx + f(x) + \int F(y) P(dy / x, a)\}.$$

Теорема 3 [10]. Нехай функція $f(x)$ опукла на $[0, S]$, а функція $G(x)$ диференційовна на $[0, S]$. Тоді функція $F(x)$ A -опукла і

$$F(x) = cx + f(x) + \int_0^x \psi_\beta(y) dG(x-y).$$

Нехай $S \in [0, Q]$ — точка локального мінімуму функції $F(x)$.

Теорема 4 [3]. Нехай $C(x) = A + Cx$, $f(x)$ — опукла диференційовна на $[0, S]$ функція і існує $g(x) = G'(x)$. Тоді в класі R_1 існує ψ_β -оптимальна стратегія

$$\delta^* = \begin{cases} d_{S^*-x}, & x \leq x^*, \\ d_0, & x > x^*, \end{cases} \quad \text{якщо } A > 0, \\ \delta^* = d_{S^*-x}, \quad A = 0,$$

де $S^* = \arg \min_{x \in [0, Q]} F(x)$, $x^* \in [0, S^*]$.

Доведення випливає з лем 1, 2 та теореми 3.

У роботі [3] розглянуто випадок, коли $S^* = Q$, і доведено таке твердження.

Теорема 5. Нехай функція $Cx + f(x)$ монотонно спадає. Тоді в класі R_1 існує оптимальна стратегія вигляду

$$\delta^* = \begin{cases} d_{Q-x}, & x < x^*, \\ d_0, & x \geq x^*, \end{cases} \quad \text{якщо } A > 0, \\ \delta^* = d_{Q-x}, \quad A = 0.$$

Повернімося до попередньої багатомовної моделі, що описана на початку цієї статті. Для системи, що знаходиться в стані x на початку періоду, у разі прийняття рішення $a \in A$ очікувані витрати за один період складають $r(x, a) = \sum_{i=1}^m r_i(x_i, a_i)$, де $r_i(x_i, a_i)$ — очікувані витрати за i -м продуктом за один період часу, якщо стан цього продукту дорівнює x_i , і на початку періоду прийнято рішення d^{a_i} :

$$r_i(x_i, d^0) = f_i(x_i), \quad i = \overline{1, m}, \quad (5)$$

а для $a_i > 0$

$$r_i(x_i, d^{a_i}) = f_i(x_i + a_i) + C_i(a_i), \quad i = \overline{1, m}. \quad (6)$$

Ймовірності переходу на X_i для будь-якої Борелевої підмножини $[0, Q_i]$ задаються співвідношеннями

$$P([y_i^1, y_i^2] / x_i, d^{a_i}) = G_i(x_i + a_i - y_i^1) - G_i(x_i + a_i - y_i^2), \quad (7)$$

$$a_i \in [0, Q_i - x_i], \quad 0 \leq y_i^1 \leq y_i^2 \leq x_i + a_i,$$

$$P(\{0\} / x_i, d^{a_i}) = 1 - G_i(x_i + a_i -), \quad x_i \in [0, Q_i]. \quad (8)$$

Ймовірності переходу системи мають вигляд

$$P(B / x, d^a) = \prod_{i=1}^m P(B_i / x_i, d^{a_i}),$$

де B_i — Борелеві підмножини $[0, Q_i]$.

Теорема 6. Нехай $r(x, a)$ визначається співвідношеннями (5) і (6), а $P(B/x, a)$ — співвідношеннями (7) і (8). Тоді в класі R_1 існує ψ_β -оптимальна стратегія, яку можна отримати методом послідовних наближень.

Доведення. Виконання умов 1 та 2 теореми 1 впливає з неперервності функції $f(x)$ і слабкої неперервності перехідних імовірностей $P(\cdot/x, a)$, що визначені співвідношеннями (7) і (8). Існування оптимальної стратегії в класі R_1 впливає з [9].

Зупинимось на знаходженні вигляду оптимальної стратегії.

Нехай $F_i(x_i)$, $i = \overline{1, m}$, визначаються співвідношеннями

$$F_i(x_i) = c_i x_i + f_i(x_i) + \int_0^{x_i} \psi_\beta(y_i) dG_i(x_i - y_i),$$

$$F_i^n(x_i) = c_i x_i + f_i(x_i) + \int_0^{x_i} \psi_\beta^{(n-1)}(y_i) dG_i(x_i - y_i),$$

$$\psi_\beta^n(y_i) = L\psi_\beta^{n-1}(y_i),$$

$$\text{де } L F_i(x_i) = \min_{x_i \in A_{x_i}} \{c_i x_i + f_i(x_i) + \int F_i(y_i) P(dy_i / x_i, a_i)\}.$$

Нехай $S_i \in [0, Q_i]$ — точка локального мінімуму функції $F_i(x_i)$, $i = \overline{1, m}$, $A_i > 0$ дано в означенні A_i -опуклої функції, $i = \overline{1, m}$.

Теорема 7. Нехай $C_i(x_i) = A_i + C_i x_i$, $f_i(x_i)$ — опукла диференційовна на $[0, S_i]$ функція для кожного $i = \overline{1, m}$ та існує $g_i(x_i) = G'_i(x_i)$, $i = \overline{1, m}$. Тоді в класі R_1 існує ψ_β -оптимальна стратегія $\delta^* = (\delta_1^*, \dots, \delta_m^*)$ вигляду

$$\delta_i^* = \begin{cases} d_{S_i^* - x_i}, & x_i < x_i^*, \\ d_0, & x_i \geq x_i^*, \end{cases} \text{ якщо } A_i > 0,$$

$$\delta_i^* = d_{S_i^* - x_i}, \quad A_i = 0,$$

де $S_i^* = \arg \min_{x_i \in [0, Q_i]} F_i(x_i)$, $x_i^* \in [0, S_i^*]$ для $i = \overline{1, m}$, $x^* = (x_1^*, \dots, x_m^*)$.

Доведення впливає з теореми 4, оскільки для кожного $i = \overline{1, m}$ умови теореми 4 виконано.

Для розв'язування практичних задач важливим є випадок, коли $S^* = Q$.

Доведемо наступне твердження.

Теорема 8. Нехай функція $C_i x_i + f_i(x_i)$ монотонно спадає для кожного $i = \overline{1, m}$. Тоді в класі R_1 існує оптимальна стратегія $\delta^* = (\delta_1^*, \dots, \delta_m^*)$ вигляду

$$\delta_i^* = \begin{cases} d_{Q_i - x_i}, & x_i < x_i^*, \\ d_0, & x_i \geq x_i^*, \end{cases} \text{ якщо } A_i > 0,$$

$$\delta_i^* = d_{Q_i - x_i}, \quad A_i = 0.$$

Доведення впливає з теореми 5, оскільки для кожного $i = \overline{1, m}$ умови теореми 5 виконано.

Отже, отримані результати дають змогу звести знаходження оптимальної стратегії до задачі знаходження оптимальних параметрів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Daduna H., Knopov P.S., Tur L.P. Optimal strategies for an inventory system with cost functions of general form. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1999. Vol. 35, N 4. P. 602–618. <https://doi.org/10.1007/BF02835856>.
2. Demchenko S.S., Knopov A.P., Pepelyaev V.A. Optimal strategies for inventory control systems with a convex cost functions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2000. Vol. 36, N 6. P. 891–897. <https://doi.org/10.1023/A:1009413511883>.
3. Кнопов О.П., Пепеляев В.А. Про оптимальні стратегії для систем керування запасами з опуклими функціями вартості. *Комп'ютерна математика*. 2005. № 3. С. 116–121.
4. Knopov A.P., Pepelyaev V.A. Some continuous models of inventory control. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2005. Vol. 41, N 3. P. 465–467. <https://doi.org/10.1007/s10559-005-0080-1>.
5. Пепеляева Т.В., Вовк Л.Б., Демченко И.Ю. Об одной задаче многономенклатурной модели теории запасов. *Управляющие системы и машины*. 2015. № 2. С. 32–38.
6. Pepelyaeva T.V., Vovk L.B., Demchenko I.Yu. Optimal strategies for the multi-task inventory control model. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52, N 1. P. 107–112. <https://doi.org/10.1007/s10559-016-9805-6>.
7. Knopov P.S., Pepelyaeva T.V., Demchenko I.Yu. A semi-Markov inventory control model. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52, N 5. P. 730–736. <https://doi.org/10.1007/s10559-016-9874-6>.
8. Knopov P.S., Pepelyaeva T.V. Some multidimensional stochastic models of inventory control with a separable cost function. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2022. Vol. 58, N 4. P. 523–529. <https://doi.org/10.1007/s10559-022-00487-6>.
9. Губенко Л.Г., Штатланд Э.С. Об управляемых марковских процессах с дисконтным временем. *Теор. вер. и мат. статист.* 1972. Вып. 7. С. 51–64.
10. Headly G., Whitin T.M. Analysis of inventory systems. N.J. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1963. 365 p.

P.S. Knopov, T.V. Pepelyaeva

SOME MULTI-PRODUCT INVENTORY CONTROL MODELS FOR CRITERION WITH RE-EVALUATION

Abstract. The multi-task model of the inventory theory is considered. The problem of finding the optimal in the class of deterministic stationary Markov strategies is investigated. The theorems for finding the optimal strategies for the problem of finding optimal parameters are proved.

Keywords: Markov processes, inventory control, (s, S) -strategy, optimality criterion, optimal strategy.

Надійшла до редакції 09.05.2023