

В.Л. МАКАРОВІнститут математики НАН України, Київ, Україна,
e-mail: makarovimath@gmail.com**Н.В. МАЙКО**Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: mayko@knu.ua**В.Л. РЯБІЧЕВ**Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: ryabichev@knu.ua**НЕПОКРАЩУВАНІ ОЦІНКИ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ
МЕТОДУ ПЕРЕТВОРЕННЯ КЕЛІ ДЛЯ НАБЛИЖЕННЯ
ОПЕРАТОРНОЇ ЕКСПОНЕНТИ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ¹**

Анотація. Одержано інтегральну оцінку точності методу перетворення Келі розв'язування абстрактної задачі Коші для диференціального рівняння 1-го порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом у Гільбертовому просторі. Оцінка свідчить, що цей метод має степеневу швидкість збіжності, порядок якої автоматично залежить від гладкості початкового вектора, а отже, він є методом без насичення точності. Доведено також непокращуваність оцінки за порядком N (параметр дискретизації N характеризує кількість доданків частинної суми в апроксимації наближеного розв'язку).

Ключові слова: диференціальне рівняння, задача Коші, операторна експонента, Гільбертів простір, перетворення Келі, оцінка похибки.

ВСТУП

Математичні моделі багатьох процесів, що досліджуються в науці та техніці, можна подати у вигляді абстрактних диференціальних задач у Банаховому та Гільбертовому просторах. Одним з ефективних методів розв'язання таких задач є метод перетворення Келі, уперше запропонований у працях [1, 2].

У Гільбертовому просторі H зі скалярним добутком (u, v) і нормою $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ розглянемо задачу Коші для диференціального рівняння 1-го порядку:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} + Ax(t) &= 0, \quad t > 0, \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (1)$$

де A — самоспряжений додатно визначений оператор із щільною в H областю визначення $D(A)$.

Розглянемо основні результати, одержані в [1, 2]. Доведено, що у випадку скінченної гладкості початкового вектора $x_0 \in D(A^\sigma)$, $\sigma > 1$, розв'язок $x(t)$ задачі (1) можна подати у вигляді ряду

$$x(t) = e^{-tA} x_0 = e^{-\gamma t} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma t) T_\gamma^p (I + T_\gamma) x_0, \quad (2)$$

де $\gamma > 0$ — довільне число, $L_p^{(0)}(t)$ — поліноми Лагерра [3], I — одиничний оператор, T_γ — перетворення Келі оператора A :

$$T_\gamma = (\gamma I + A)^{-1} (\gamma I - A). \quad (3)$$

¹ Роботу виконано за часткової підтримки Національного фонду досліджень України. Грант № 2020.02/0121.

В [1, 2] також зазначено, що ряд (2) збігається рівномірно в H на промені $t \geq 0$ для початкового вектора $x_0 \in D(A^\sigma)$ і для $\sigma > 0$. Це означає, що для $\sigma > 0$ сума $x(t)$ ряду (2) є неперервною функцією на промені $t \geq 0$, а отже, може розглядатися як узагальнений розв'язок задачі (1).

Як наближений розв'язок задачі (1) запропоновано частинну суму ряду (2):

$$x_N(t) = e^{-\gamma t} \sum_{p=0}^N (-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma t) T_\gamma^p (I + T_\gamma) x_0. \quad (4)$$

Точність такого наближення визначається оцінкою [1, 2]

$$\|x(t) - x_N(t)\| \leq \frac{C}{N^\sigma} \|A^\sigma x_0\|, t \geq 0, \quad (5)$$

з додатною сталою C , не залежною від N та x_0 .

Дослідження методу перетворення Келі продовжено в праці [4], в якій одержано інтегральну оцінку типу (5):

$$z_N \equiv \left\{ \int_0^{+\infty} \|x(t) - x_N(t)\|^2 dt \right\}^{1/2} \leq \frac{C}{N^{\sigma+1/2}} \|A^\sigma x_0\|, \quad (6)$$

де $\sigma > 0$, а $C > 0$ — стала, не залежна від N та x_0 .

В [4] доведено, що оцінка (6) непокрещувана (з точністю до логарифма) за порядком N . Точніше, існують оператор A і початковий вектор x_0 такі, що за умов $\lambda_0 = \gamma \leq 1$, $\sigma > 0$, $2\gamma \leq 1 + \sigma$ справджується оцінка

$$z_N^2 \geq \frac{4^{-1/2-\sigma}}{(N + \gamma/2)^{2\sigma+1} \ln^2(2N)}. \quad (7)$$

Мета цієї статті — отримати оцінку типу (6) зі сталою $C > 0$ у явному вигляді та довести непокрещуваність цієї оцінки за порядком N без логарифма.

ОЦІНКА ПОХИБКИ МЕТОДУ ПЕРЕТВОРЕННЯ КЕЛІ

Дослідимо точність методу перетворення Келі (4).

Теорема 1. Нехай оператор A і початковий вектор x_0 задачі (1) задовольняють умови $A = A^* \geq \lambda_0 I$, $\lambda_0 > 0$; $x_0 \in D(A^\sigma)$, $\sigma > 0$, $0 < \gamma \leq \lambda_0$. Тоді точність наближеного розв'язку (4) характеризується оцінкою

$$z_N \equiv \left\{ \int_0^{+\infty} \|x(t) - x_N(t)\|^2 dt \right\}^{1/2} \leq \frac{C}{N^{\sigma+1/2}} \|A^\sigma x_0\|, \quad (8)$$

де $C = \frac{(1+\sigma)^{2(1+\sigma)}}{(2\sigma+1)(2\gamma)^{2\sigma+1}}$ — додатна стала, не залежна від N і x_0 ;
 $N+1 \geq \frac{\lambda_0(1+\sigma)}{2\gamma}$.

Доведення. Відомо [1, 2], що неперервна задача (1) породжує дискретну задачу

$$y_{\gamma, n+1} = T_\gamma y_{\gamma, n}, \quad n=0, 1, \dots, \quad y_{\gamma, 0} = x_0.$$

Її розв'язок можна подати за допомогою дискретної напівгрупи T_γ^n :

$$y_{\gamma, n} = T_\gamma^n y_{\gamma, 0} \equiv T_\gamma^n x_0, \quad n=0, 1, \dots \quad (9)$$

Тоді

$$x(t) - x_N(t) = e^{-\gamma t} \sum_{p=N+1}^{\infty} (-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma t) (y_{\gamma,p} + y_{\gamma,p+1}), \quad t \geq 0,$$

а отже,

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_N(t)\|^2 &= (x(t) - x_N(t), x(t) - x_N(t)) = \\ &= \left(e^{-\gamma t} \sum_{p=N+1}^{\infty} (-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma t) (y_{\gamma,p} + y_{\gamma,p+1}), \right. \\ &\quad \left. e^{-\gamma t} \sum_{p=N+1}^{\infty} (-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma t) (y_{\gamma,p} + y_{\gamma,p+1}) \right) = \\ &= e^{-2\gamma t} \sum_{j,k=N+1}^{\infty} (-1)^{j+k} L_j^{(0)}(2\gamma t) L_k^{(0)}(2\gamma t) (y_{\gamma,j} + y_{\gamma,j+1}, y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1}), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Узагальнені поліноми Лагерра $L_n^{(\alpha)}(t)$, $\alpha > -1$, задовольняють умову ортогональності з ваговою функцією [3]:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha} L_j^{(\alpha)}(t) L_k^{(\alpha)}(t) dt = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{k!} \delta_{jk}, \quad j, k = 0, 1, \dots, \alpha > -1, \quad (11)$$

де δ_{jk} — символ Кронекера. Зокрема, для $\alpha = 0$ маємо співвідношення

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t} L_j^{(0)}(2\gamma t) L_k^{(0)}(2\gamma t) dt = \frac{1}{2\gamma} \frac{\Gamma(k+1)}{k!} \delta_{jk} = \frac{1}{2\gamma} \delta_{jk}, \quad j, k = 0, 1, \dots \quad (12)$$

Інтегруючи обидві частини рівності (10) з урахуванням формули (12), одержуємо

$$\begin{aligned} z_N^2 &\equiv \int_0^{+\infty} \|x(t) - x_N(t)\|^2 dt = \\ &= \sum_{j,k=N+1}^{\infty} (-1)^{j+k} \int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t} L_j^{(0)}(2\gamma t) L_k^{(0)}(2\gamma t) dt (y_{\gamma,j} + y_{\gamma,j+1}, y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1}) = \\ &= \frac{1}{2\gamma} \sum_{k=N+1}^{\infty} (y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1}, y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1}) = \frac{1}{2\gamma} \sum_{k=N+1}^{\infty} \|y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1}\|^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Унаслідок (3) і (9) маємо

$$\begin{aligned} y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1} &= T_{\gamma}^k (I + T_{\gamma}) x_0 = \\ &= (\gamma I + A)^{-k} (\gamma I - A)^k (I + (\gamma I + A)^{-1} (\gamma I - A)) x_0 = \\ &= (\gamma I + A)^{-k} (\gamma I - A)^k 2\gamma (\gamma I + A)^{-1} A^{-\sigma} A^{\sigma} x_0 \quad (\sigma > 0). \end{aligned} \quad (14)$$

Нехай E_{λ} — спектральний розклад одиниці оператора A . Тоді

$$y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1} = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \left(\frac{\gamma - \lambda}{\gamma + \lambda} \right)^k \frac{2\gamma}{\gamma + \lambda} \frac{1}{\lambda^{\sigma}} dE_{\lambda} A^{\sigma} x_0,$$

а отже,

$$\|y_{\gamma,k} + y_{\gamma,k+1}\|^2 = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \left(\frac{\gamma - \lambda}{\gamma + \lambda} \right)^{2k} \frac{(2\gamma)^2}{(\gamma + \lambda)^2} \frac{1}{\lambda^{2\sigma}} d\|E_{\lambda} A^{\sigma} x_0\|^2. \quad (15)$$

З урахуванням формули (15) співвідношення (13) набуває вигляду

$$z_N^2 = 2\gamma \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_{\lambda_0}^{+\infty} \left(\frac{\gamma - \lambda}{\gamma + \lambda} \right)^{2k} \frac{1}{(\gamma + \lambda)^2} \frac{1}{\lambda^{2\sigma}} d\|E_{\lambda} A^{\sigma} x_0\|^2. \quad (16)$$

Розглянемо функцію

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{2\rho}} \left(\frac{\gamma - \lambda}{\gamma + \lambda} \right)^{2k} \quad (\rho = \sigma + 1).$$

Її похідна

$$\varphi'(\lambda) = \frac{-2\rho}{\lambda^{2\rho+1}} \frac{(\lambda - \gamma)^{2k-1}}{(\lambda + \gamma)^{2k+1}} \left(\lambda^2 - \frac{2k\gamma}{\rho} \lambda - \gamma^2 \right)$$

має два додатні корені $\lambda_1 = \gamma$ і $\lambda_2 = \frac{\gamma}{\rho} \left(k + \sqrt{k^2 + \rho^2} \right)$. Вочевидь, для всіх

$k \in \mathbb{N}$ виконується $\lambda_1 < \lambda_2$. Виберемо сталу $\gamma > 0$ з умови $\gamma \leq \lambda_0$. Тоді для всіх $k \in \mathbb{N}$ таких, що

$$\lambda_0 < \lambda_2 = \frac{\gamma}{\rho} \left(k + \sqrt{k^2 + \rho^2} \right), \quad (17)$$

справджується співвідношення $\lambda_1 = \gamma \leq \lambda_0 < \lambda_2$. Звідси випливає оцінка

$$\begin{aligned} \max_{\lambda \geq \lambda_0} \varphi(\lambda) &= \varphi(\lambda_2) = \\ &= \frac{\rho^{2\rho}}{\gamma^{2\rho} \left(k + \sqrt{k^2 + \rho^2} \right)^{2\rho}} \left(1 - \frac{2\rho}{k + \sqrt{k^2 + \rho^2} + \rho} \right)^{2k} < \frac{\rho^{2\rho}}{\gamma^{2\rho} (2k)^{2\rho}}. \end{aligned}$$

Застосовуючи цю нерівність у правій частині зображення (16), для всіх $k \geq \frac{\lambda_0 \rho}{2\gamma} = \frac{\lambda_0 (1 + \sigma)}{2\gamma}$ одержуємо оцінку

$$\begin{aligned} z_N^2 &\leq 2\gamma \frac{(1 + \sigma)^{2(1 + \sigma)}}{(2\gamma)^{2(1 + \sigma)}} \|A^{\sigma} x_0\|^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2(1 + \sigma)}} \leq \\ &\leq \frac{(1 + \sigma)^{2(1 + \sigma)}}{(2\gamma)^{2\sigma+1}} \|A^{\sigma} x_0\|^2 \int_N^{+\infty} \frac{ds}{s^{2(1 + \sigma)}} = \frac{(1 + \sigma)^{2(1 + \sigma)}}{(2\sigma + 1)(2\gamma)^{2\sigma+1}} \frac{1}{N^{2\sigma+1}} \|A^{\sigma} x_0\|^2. \end{aligned}$$

Теорему доведено.

НЕПОКРАЩУВАНІСТЬ ОЦІНКИ ПОХИБКИ

Доведемо твердження, яке доповнює результат теореми 1.

Теорема 2. Оцінка (8) непокрощувана щодо показника степеня параметра N .

Доведення. Достатньо запропонувати оператор A і початковий вектор x_0 , для яких виконуються умови теореми 1, а точність методу (4) оцінюється знизу за порядком N так само, як в оцінці (8).

Нехай оператор A має зліченну множину власних значень

$$0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

та відповідних власних векторів e_k , $k=0, 1, 2, \dots$, які утворюють ортонормований базис в H : $(e_j, e_k) = \delta_{jk}$, $j, k=0, 1, 2, \dots$. Тоді для будь-якого початкового вектора $x_0 \in D(A^\sigma)$, $\sigma > 0$, справджується зображення

$$A^\sigma x_0 = \sum_{i=0}^{\infty} (A^\sigma x_0, e_i) e_i.$$

Співвідношення (14) набуває вигляду

$$y_{\gamma, k} + y_{\gamma, k+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma - \lambda_i}{\gamma + \lambda_i} \right)^k \frac{2\gamma}{\gamma + \lambda_i} \frac{1}{\lambda_i^\sigma} (A^\sigma x_0, e_i) e_i,$$

а отже,

$$\|y_{\gamma, k} + y_{\gamma, k+1}\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma - \lambda_i}{\gamma + \lambda_i} \right)^{2k} \left(\frac{2\gamma}{\gamma + \lambda_i} \right)^2 \frac{1}{\lambda_i^{2\sigma}} (A^\sigma x_0, e_i)^2.$$

Тоді формулу (16) можна подати так:

$$z_N^2 = 2\gamma \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma - \lambda_i}{\gamma + \lambda_i} \right)^{2k} \frac{1}{(\gamma + \lambda_i)^2} \frac{1}{\lambda_i^{2\sigma}} (A^\sigma x_0, e_i)^2. \quad (18)$$

Позначаючи скорочено $x_0^\sigma = A^\sigma x_0$ та покладаючи $\lambda_i = i$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, маємо

$$\begin{aligned} z_N^2 &\geq 2\gamma \sum_{i=1}^{2N+2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{i-\gamma}{i+\gamma} \right)^{2k} \frac{1}{(i+\gamma)^2} \frac{1}{i^{2\sigma}} (x_0^\sigma, e_i)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2N+2} \frac{1}{i^{2\sigma+1}} \left(\frac{i-\gamma}{i+\gamma} \right)^{2N+2} (x_0^\sigma, e_i)^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{2^{2\sigma+2} (N+1)^{2\sigma+1}} \sum_{i=1}^{2N+2} \left(\frac{i-\gamma}{i+\gamma} \right)^{2N+2} (x_0^\sigma, e_i)^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Покажемо, що за умов $\gamma = \frac{1}{2N+2}$ та $(x_0^\sigma, e_i)^2 = \frac{1}{i^2}$, $i \in \mathbb{N}$, границя

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2N+2} \frac{1}{i^2} \left(\frac{i - \frac{1}{2N+2}}{i + \frac{1}{2N+2}} \right)^{2N+2} = 0.50\dots$$

існує і додатна. Для зручності, не обмежуючи загальності, розглянемо числову послідовність

$$S_N = \sum_{i=1}^N \frac{1}{i^2} \left(\frac{i - \frac{1}{N}}{i + \frac{1}{N}} \right)^N, \quad N \in \mathbb{N},$$

та доведемо її обмеженість і монотонність. Справді, оскільки

$$S_N = \sum_{i=1}^N \frac{1}{i^2} \left(\frac{i - \frac{1}{N}}{i + \frac{1}{N}} \right)^N < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1.644934068\dots,$$

і навіть точніше:

$$S_N = \sum_{i=1}^N \frac{1}{i^2} \left(\frac{i - \frac{1}{N}}{i + \frac{1}{N}} \right)^N < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-2/i}}{i^2} = 0.5012176777\dots,$$

то послідовність (S_N) додатних чисел обмежена зверху.

Далі, розглянемо різницю

$$\begin{aligned} S_{N+1} - S_N &= \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{(i+1)^2} \left\{ \left(\frac{i - \frac{1}{N+1}}{i + \frac{1}{N+1}} \right)^{N+1} - \left(\frac{i - \frac{1}{N}}{i + \frac{1}{N}} \right)^N \right\} + \frac{1}{(N+1)^2} \left(\frac{N+1 - \frac{1}{N+1}}{N+1 + \frac{1}{N+1}} \right)^{N+1} \end{aligned}$$

і покажемо, що вона додатна для всіх $N \in \mathbb{N}$. З цією метою уведемо функцію

$$g(N) = \left(\frac{i - \frac{1}{N}}{i + \frac{1}{N}} \right)^N, \quad N > 0,$$

та знайдемо її похідну

$$g'(N) = \left(\frac{iN-1}{iN+1} \right)^N \left[\ln \frac{iN-1}{iN+1} + \frac{2iN}{(iN)^2 - 1} \right].$$

Для визначення знака виразу у квадратних дужках позначимо $(iN)^{-1} = x$ та розглянемо допоміжну функцію

$$\varphi(x) = \ln \frac{1-x}{1+x} + \frac{2x}{1-x^2}, \quad x \in [0, 1).$$

Оскільки $\varphi'(x) = \frac{4x^2}{(1-x^2)^2} > 0$ для всіх $x \in (0, 1)$, то функція $\varphi(x)$ строго

зростає на проміжку $[0, 1)$, а внаслідок рівності $\varphi(0) = 0$ виконується нерівність $\varphi(x) > 0$ для всіх $x \in (0, 1)$. Це означає, що $g'(N) > 0$ для всіх $N > 0$, тобто функція $g(N)$ строго зростає, а отже, $S_{N+1} - S_N > 0$ для всіх $N \in \mathbb{N}$. Звідси випливає, що числова послідовність (S_N) строго зростає.

З монотонності й обмеженості послідовності (S_N) випливає її збіжність. Границя $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ вочевидь додатна. Тоді існують номер $N^* \in \mathbb{N}$ і стала $\tilde{C} > 0$ такі, що $S_N \geq \tilde{C}$ для всіх $N \geq N^*$. Отже, з нерівності (19) випливає оцінка

$$z_N^2 \geq \frac{C}{(N+1)^{2\sigma+1}}$$

для всіх $N \geq N^*$ зі сталою $C > 0$, не залежною від N . Теорему доведено.

ВИСНОВОК

Одержана в теоремі 1 інтегральна оцінка (8) означає, що метод перетворення Келі (4) має степеневу швидкість збіжності та властивість ненасичення точності в сенсі К. Бабенка [5], тобто швидкість збіжності методу автоматично залежить від гладкості вхідних даних (що кращі диференціальні властивості початкового вектора $x_0 \in D(A^\sigma)$, то вищою є точність методу). У теоремі 2 доведено, що оцінка (8) є непокресованою за порядком N .

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Gavriluk I.P., Makarov V.L. The Cayley transform and the solution of an initial value problem for a first order differential equation with an unbounded operator coefficient in Hilbert space. *Numerical Functional Analysis and Optimization*. 1994. Vol. 15, N 5–6. P. 583–598. <https://doi.org/10.1080/01630569408816582>.
2. Arov D.Z., Gavriluk I.P., Makarov V.L. Representation and approximation of solutions of initial value problems for differential equations in Hilbert space based on the Cayley transform. *Elliptic and Parabolic Problems (Pont-à-Mousson, 1994)*, Pitman Res. Notes Math. Ser. Vol. 325. Harlow: Longman Sci. Tech., 1995. P. 40–50.
3. Bateman H., Erdélyi A. Higher transcendental functions. Vol. 2. New York: McGraw-Hill, 1953. 316 p.
4. Makarov V.L., Vasilik V.B., Ryabichev V.L. Unimprovable order-of-magnitude estimates of the rate of convergence of the Cayley transform method for approximation of an operator exponent. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2002. Vol. 38, N 4. P. 632–636. <https://doi.org/10.1023/A:1021122622419>.
5. Бабенко К.И. Основы численного анализа. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 848 с.

V. L. Makarov, N. V. Mayko, V. L. Ryabichev

UNIMPROVABLE ERROR ESTIMATES OF THE CAYLEY TRANSFORM METHOD FOR THE OPERATOR EXPONENTIAL FUNCTION IN A HILBERT SPACE

Abstract. We obtain the error estimate of the Cayley transform method for solving the abstract Cauchy problem for the first-order differential equation with an unbounded operator coefficient in a Hilbert space. The estimate indicates that our method has a power rate of convergence which automatically depends on the smoothness of the initial data (i.e., our method is a method without saturation of accuracy). Moreover, we substantiate that the estimate is unimprovable in the order of N (the discretization parameter N characterizes the number of summands in the partial sum for the approximate solution).

Keywords: differential equation, Cauchy problem, operator exponential function, Hilbert space, Cayley transformation, error estimate.

Надійшла до редакції 23.06.2023