УДК 519.816

Н.К. ТИМОФЕЕВА

ЗАВИСИМОСТЬ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАДАЧЕ РАЗМЕЩЕНИЯ ОБЪЕКТОВ И ЕЕ РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ СТРУКТУРНО-АЛФАВИТНОГО ПОИСКА

Ключевые слова: *комбинаторная оптимизация, размещение разногабаритных объектов, комбинаторная конфигурация, целевая функция, метод структурно-алфавитного поиска, перестановка, разбиение множества.*

ВВЕДЕНИЕ

Задачи размещения объектов возникают в различных отраслях: конструкторском проектировании вычислительной аппаратуры, оптимальном раскрое, моделировании некоторых химических и физических процессов и т. д. [1–37]. Эти задачи разделяются по габаритам объектов, способу задания координат на поверхности для их размещения, а также по структуре входных данных. Каждая такая задача требует специальных подходов для своего решения, в частности, применяются методы линейного программирования [1, 32], оптимального раскроя материалов и плотного размещения [6–10], методы, основанные на дискретных моделях размещения [2–5, 11–17, 19–28, 30, 31], а также алгоритмы, использующие силовые функции [12, 18]. В работах [2, 3, 12] задача размещения сведена к классической задаче о назначениях.

Описанные подходы разрабатывались в зависимости от подкласса решаемых задач: для одних эффективны методы плотного размещения, для других — дискретные модели. Значительная часть алгоритмов размещения разногабаритных модулей, которые ориентированы на конструкторское проектирование узлов ЭВМ, работает примерно по одной схеме: сначала монтажное поле разбивают на прямоугольные позиции разной ширины и фиксированной высоты, потом модули упаковывают в заданные позиции шириной *a*, и высотой, кратной *a* [13–17, 20, 21, 26]. В некоторых алгоритмах монтажное поле разбивают на прямоугольные позиции, в которых может разместиться модуль наибольшего размера с последующей упаковкой в них модулей меньших размеров [24].

В [23] размещение разногабаритных модулей сведено к размещению одногабаритных. Для этого на k-й итерации элементы компонуются в одногабаритные модули с последующим их размещением итерационным алгоритмом в динамически перестроенные позиции на поверхности платы до тех пор, пока не будет размещен модуль с наименьшими габаритами. В [28–31] по определенным правилам объекты объединяются в кластеры (фрагменты) или их множество разбивается на блоки (группы). С использованием методов плотного размещения или других известных методов на поверхности последовательно размещаются как фрагменты, так и вошедшие в них элементы.

В [37] описана задача создания оптимальной клавиатуры, в которой буквы по определенным признакам объединены в кластеры с последующим их размещением на ней. Однако ни в одной из упомянутых работ не проанализированы задачи размещения объектов с выявлением признаков, по которым для их решения выбирается тот или иной подход. Некоторые авторы задачу размещения называют покрытием или разбиением, часто полагая, что аргументом целевой функции в этих задачах является перестановка.

В настоящей статье сделана попытка выявить общие признаки, присущие описанным задачам. Показано, что целевая функция в задаче размещения объек-

© Н.К. Тимофеева, 2013

тов произвольной формы зависит от нескольких переменных (комбинаторных конфигураций различных типов), вследствие чего она естественно разделяется на подзадачи, которые решаются независимыми алгоритмами в итерационном режиме.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ОБЪЕКТОВ В РАМКАХ ТЕОРИИ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Задача размещения объектов формулируется следующим образом: множество одногабаритных или произвольной формы объектов необходимо разместить в области размещения так, чтобы смоделированная по заданным критериям целевая функция принимала оптимальное значение, а расстояние между объектами равнялось определенной величине.

По габаритам объектов, структуре посадочных мест, где они размещаются, а также по структуре входных данных задачу размещения разделяют на подклассы, для которых заданы:

— установочные позиции, в которых размещаются одногабаритные объекты;

— установочные позиции, в которых размещаются как одногабаритные, так и разногабаритные объекты;

— область, в которой размещаются объекты произвольной формы без установочных позиций;

— связи между объектами, если они существуют.

Самая простая из этих задач — размещение одногабаритных объектов в заданные установочные позиции, аргументом целевой функции в которой является перестановка.

Далее рассмотрим задачу размещения, в которой можно аппроксимировать прямоугольниками объекты с существующими между ними связями. Для упрощения ее решения представим объекты геометрическими точками.

Задача размещения задается двумя множествами: A и B. Элементам $a_l \in A$, $l \in \{1, \dots, n\}$, соответствуют объекты, которые необходимо разместить в заданной области. Элементам $b_t \in B$, $t \in \{1, \dots, \tilde{n}\}$, соответствуют установочные позиции для размещения объектов или множество точек геометрической области размещения, где n — количество элементов множества A, $\tilde{n}$ — количество элементов множества B. Положим, что $n \le \tilde{n}$.

Существуют два типа таких задач. К типу I относятся задачи размещения модулей на печатных платах, проектирования сверхбольших интегральных микросхем и оптимального раскроя, к типу II — задача размещения букв алфавита на клавиатуре [37]. В задачах типа I каждое множество представим в виде графа, вершинами которого являются его элементы, а каждому ребру поставлено в соответствие число $c_{lt} \in R$ (R — множество вещественных чисел), т.е. между элементами множеств A и B существуют связи, числовое значение которых назовем весами. Величины c_{lt} назовем входными данными и зададим их матрицами. В задачах типа II между элементами заданных множеств связей не существует, а весами являются числа $v_j \in R$, которым в соответствие поставлены некоторые свойства этих элементов. Их числовые значения задаются конечными последовательностями, которые также являются входными данными. Эти величины определяют значение целевой функции.

Для обоих типов задач из элементов одного из заданных множеств, например $a_l \in A$, образуется комбинаторное множество W — совокупность комбинаторных конфигураций определенного типа (перестановки, разбиения и т.д.). На элементах w комбинаторного множества W вводится целевая функция $F(w)$. Необходимо найти элемент w^* множества W, для которого определенный функционал принимает экстремальное значение при выполнении заданных ограничений, т.е. $F(w^*) = \text{glob} \underset{w \in W^0 \subset W}{\text{extr}} F(w)$, где $\text{extr} \in \{\min, \max\}$, W^0 — подмножество, определяемое ограничениями задачи.

ЗАВИСИМОСТЬ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧЕ РАЗМЕЩЕНИЯ ОБЪЕКТОВ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим задачу типа I, в которой задана область для размещения объектов произвольной формы, но не заданы установочные позиции. Между объектами существуют связи. Полагаем, что объекты аппроксимированы прямоугольниками, которые в процессе решения задачи представляются как геометрические точки. Для этой задачи определим аргумент целевой функции (комбинаторную конфигурацию).

Пусть задано множество $A=\{a_1, \ldots, a_n\}$, каждому элементу $a_s \in A$ которого соответствует определенный объект, размещаемый на прямоугольной поверхности с нанесенной на ней ортогональной координатной сеткой. Перенумеруем ячейки этой сетки и их последовательную нумерацию представим множеством $B=\{b_1, \ldots, b_{\widetilde{n}}\}$.

Сформулируем теорему.

Теорема. Целевая функция в задаче размещения объектов произвольной формы зависит от нескольких переменных, которыми являются комбинаторные конфигурации различных типов. По аргументу целевой функции она естественно разделяется на несколько подзадач.

Доказательство. Задачу размещения объектов произвольной формы сведем к задаче размещения одногабаритных объектов с последующим их размещением на сформированном из элементов множества $B=\{b_1, \ldots, b_{\widetilde{n}}\}$ регулярном поле позиций следующим образом. Элементы множества $A=\{a_1, \ldots, a_n\}$ объединим в одногабаритные блоки, т.е. решим задачу компоновки, аргументом целевой функции в которой является разбиение n-элементного множества на подмножества. Соответственно элементы множества B объединим в посадочные места таким образом, чтобы на каждом из них разместились образованные блоки. В этом случае также решается задача разбиения.

Из элементов a_s базового множества A, $s \in \{1, \ldots, n\}$, образуется комбинаторное множество Θ — совокупность разбиений n-элементного множества на подмножества $\rho \in \Theta$, а из элементов b_l базового множества B образуется комбинаторное множество $\widetilde{\Theta}$ — разбиение элементов множества B на подмножества $\widetilde{\rho} \in \widetilde{\Theta}$. Из упорядочения элементов b_l в $\widetilde{\rho} \in \widetilde{\Theta}$ образуется множество размещений без повторений М. Поскольку образованные подмножества $\rho \in \Theta$ объединяют заданные модули из множества A в одногабаритные объекты, последние несложно разместить на однородном поле позиций из $\widetilde{\rho} \in \widetilde{\Theta}$, в каждой из которых размещается блок (подмножество) $\rho_j \subset \rho \in \Theta$, $j \in \{1, \ldots, \eta\}$, где η — количество подмножеств ρ_j в ρ. Аргументом целевой функции в задаче размещения одногабаритных объектов является перестановка. Соответственно из подмножеств ρ_j разбиения $\rho \in \Theta$ образуем множество перестановок Ω.

Введем целевую функцию на элементах ρ, $\widetilde{\rho}$, ω и μ множеств Θ, $\widetilde{\Theta}$, Ω и М. В результате задача размещения разногабаритных объектов на поверхности заключается в нахождении таких $\rho^* \in \Theta$, $\omega^* \in \Omega$, $\widetilde{\rho}^* \in \widetilde{\Theta}$, $\mu^* \in \mathrm{M}$, для которых смоделированный функционал принимает оптимальное значение при выполнении заданных условий, т.е. $F(\rho^*, \omega^*, \widetilde{\rho}^*, \mu^*) = \underset{\substack{\rho\in\Theta \\ \omega\in\Omega \\ \widetilde{\rho}\in\widetilde{\Theta} \\ \mu\in\mathrm{M}}}{\mathrm{extr}}\, F(\rho, \omega, \widetilde{\rho}, \mu)$, где $\mathrm{extr} \in \{\min, \max\}$.

Из этого следует, что задача размещения объектов произвольной формы разделяется на несколько подзадач, а целевая функция в ней зависит от нескольких переменных, которыми являются комбинаторные конфигурации различных типов, что и доказывает теорему.

Следовательно, задача размещения разногабаритных объектов по аргументу целевой функции естественно разделяется на такие подзадачи:

— компоновка базовых элементов в одногабаритные объекты;

— объединение элементов координатной сетки в регулярное поле позиций, в каждой из которых можно разместить полученные объекты;

— размещение одногабаритных объектов на регулярном поле позиций.

Для решения каждой подзадачи разрабатываются независимые алгоритмы, которые работают как встроенные процедуры в итерационном режиме, что характерно для гибридных алгоритмов [23, 38]. Оптимальное решение находится на нескольких комбинаторных множествах.

С использованием теории комбинаторной оптимизации сформулируем математическую постановку для задачи размещения типа II на примере размещения букв алфавита на клавиатуре [37].

Эта задача также задается двумя множествами: A и B. Каждому элементу $a_l \in A$, $l \in \{1, \dots, n\}$, соответствует определенная клавиша, а элементу $b_t \in B$, $t \in \{1, \dots, \widetilde{n}\}$, — буква алфавита, которую необходимо разместить в заданной области, где n — количество элементов множества A, $\widetilde{n}$ — количество элементов множества B. Положим, что $n = \widetilde{n}$. Таким образом, имеем два множества, между элементами которых отсутствуют связи. Вместо них элементу $a_l \in A$ поставлено в соответствие время, затрачиваемое на нажатие этой клавиши. Введем конечную последовательность (функцию натурального аргумента) $\varphi(j)|_1^n$, где $\varphi(j)$ — значение времени, затрачиваемого на нажатие j-й клавиши. Каждому элементу $b_t \in B$ присвоено значение, соответствующее частоте встречаемости буквы в словах определенного языка. Введем комбинаторную функцию $\beta(f(j), w^k)|_1^n = (\beta_1(f(1), w^k), \dots, \beta_n(f(n), w^k))$, где $\beta_j(f(j), w^k)$ — частота встречаемости j-й буквы в словах определенного языка в k-м варианте решения задачи, $w^k \in W$ — аргумент целевой функции (комбинаторная конфигурация), k — порядковый номер w^k во множестве W. Задача заключается в нахождении такой перестановки $w^k \in W$, для которой целевая функция $F(w^k) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j(f(j), w^k)\,\varphi(j)$ при выполнении заданных ограничений принимает оптимальное значение. В [37] для эффективного решения этой задачи буквы по определенным признакам объединены в кластеры с последующим их размещением на клавиатуре. Целевая функция в этой задаче зависит от двух переменных: перестановки и разбиения n-элементного множества на подмножества, а поиск ее значения проводится на двух комбинаторных множествах.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ОДНОГАБАРИТНЫХ ОБЪЕКТОВ МЕТОДОМ СТРУКТУРНО-АЛФАВИТНОГО ПОИСКА

Для решения задач комбинаторной оптимизации разработано много методов и алгоритмов, среди которых выделим основанные на распознавании структуры входной информации и характеризующиеся большим быстродействием, например метод ближайшего соседа, «жадный» алгоритм и т. д. Метод структурно-алфавитного поиска, примененный при решении задачи размещения одногабаритных объектов, основан на распознавании структуры входной информации [39, 40]. В нем использован известный разрешимый случай, сформулированный следующим образом [41]. Имеем два множества перестановок, заданных системами (d) и (e), на которых введена целевая функция

$\sum de$. Для этих систем определены перестановки, где $\sum de$ принимает наибольшее или наименьшее значение. Если элементы перестановки системы (d) упорядочены по убыванию их величин, а элементы перестановки системы (e) упорядочены по возрастанию, то значение $\sum de$ является глобальным минимумом. Если элементы обеих перестановок упорядочены по возрастанию их величин, то значение $\sum de$ является глобальным максимумом. Этот разрешимый случай не приналежит ни одному из классов задач комбинаторной оптимизации. Он эффективен для задач, решаемых на перестановках и на подмножестве изоморфных комбинаторных конфигураций. Для использования описанного разрешимого случая для решения задач комбинаторной оптимизации методом структурно-алфавитного поиска входные данные смоделируем функциями натурального аргумента. Нахождение оптимального решения осуществляется по этим функциям, которые упорядочены по возрастанию или убыванию их значений. Согласно разработанным правилам определяется последовательность локальных оптимумов таких, что она содержит глобальное или приближенное к глобальному решение.

Для задачи размещения значения весов между элементами множества A зададим симметрической комбинаторной матрицей $Q(w^k)$, а множества B — симметрической матрицей C. Элементы h наддиагоналей симметрической комбинаторной матрицы $Q(w^k)$ представим комбинаторной функцией $\beta(f(j), w^k)|_1^m = (\beta_1(f(1), w^k), \ldots, \beta_m(f(m), w^k)$, а элементы h наддиагоналей симметрической матрицы C — функцией натурального аргумента $\varphi(j)\big|_1^m$, где $m = \frac{n(n-1)}{2}$ — количество элементов h наддиагоналей матриц C и $Q(w^k)$, $h = \overline{1, n-1}$. Целевая функция примет вид $F^{(1)}(w^k) = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j(f(j), w^k)\,\varphi(j)$. В некоторых задачах важно оптимизировать площадь, которую занимают размещаемые объекты, поэтому введем такой критерий $F^{(2)}(w^k) = \sum\limits_{l=1}^{n} S_l(w^k)$, где $S_l(w^k)$ — площадь, занимаемая l-м объектом с учетом расстояния между соседними объектами для k-го варианта размещения.

Введем системы комбинаторных функций H и H', где $\beta(f(j), w^k)|_1^m \in H$ — комбинаторная функция, аргументом которой является перестановка $w^k \in W$, образованная из элементов базового множества $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$, а $\beta(f(j), w'^i)|_1^m \in H'$ — комбинаторная функция, аргументом которой является перестановка $w'^i \in W'$, образованная из элементов базового множества $\widetilde{A}_m = \{\widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_m\}$. Если $\beta(f(j), w^1)|_1^m = \beta(f(j), w'^1)|_1^m$, где w^1, w'^1 — первые перестановки соответственно в W, W' и $\beta(f(j), w^1)|_1^m \in H$, а $\beta(f(j), w'^1)|_1^m \in H'$, то $H \subset H'$. Задачу размещения объектов, входные данные в которой заданы функциями $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ и $\varphi(j)|_1^m$, назовем базовой или задачей системы H. Задачу, входные данные в которой заданы функциями $\overleftarrow{\beta}(f(j), w'^i)|_1^m$ или $\vec{\beta}(f(j), w'^t)|_1^m$, где $\overleftarrow{\beta}(f(j), w'^i) \geq \overleftarrow{\beta}(f(j+1), w'^i)$ или $\vec{\beta}(f(j), w'^t) \leq \vec{\beta}(f(j+1), w'^t)$, и $\vec{\varphi}(j)|_1^m$ или $\overleftarrow{\varphi}(j)|_1^m$, а $\vec{\varphi}(j) \leq \vec{\varphi}(j+1)$ или $\overleftarrow{\varphi}(j) \geq \overleftarrow{\varphi}(j+1)$, образованные из $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ и $\varphi(j)|_1^m$, назовем упорядоченной или задачей системы H'. Значение целевой функции для задачи размещения одногабаритних объектов находится в пределах $\max\limits_{w'^{t*} \in W'} F(w'^{t*}) \geq F(w^k) \geq$ $\geq \min\limits_{w'^{i*} \in W'} F(w'^{i*})$, где $\max\limits_{w'^{t*} \in W'} F(w'^{t*})$, $\min\limits_{w'^{i*} \in W'} F(w'^{i*})$ — соответственно глобальные максимум и минимум системы H', которая совпадает с разрешимым случаем, описанным в [41].

Приведем вычислительную схему нахождения минимального значения целевой функции для задачи размещения одногабаритных объектов методом структурно-алфавитного поиска (максимальное значение определяется аналогично).

Шаг 1. Базовую задачу размещения сведем к упорядоченной, представив входные данные функциями $\vec{\beta}(f(j), w'^t)|_1^m$ и $\bar{\varphi}(j)|_1^m$. Перейдем к шагу 2.

Шаг 2. По функции $\vec{\beta}(f(j), w'^t)|_1^m$, используя правила, изложенные в [42], находим перестановку $w^k \in W$. Если $\vec{\beta}(f(j), w'^t)|_1^m = \beta(f(j), w^k)|_1^m$, то в качестве глобального решения принимаем перестановку $w^k \in W$, которая совпадает с глобальным $w'^t \in W'$ для упорядоченной задачи. Переходим к шагу 10. Иначе полагаем $F^* = F(w'^t)$ и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Находим текущий локальный минимум, начиная с номера $j = 1$ значения комбинаторной функции $\vec{\beta}(f(j), w'^t)|_1^m$. Для $\vec{\beta}(f(j), w'^t)$ строим перестановку по числовой функции $\bar{\varphi}(j)|_1^m$, начиная с номера $l = 1$. Полагаем $\widetilde{l} = l$. Переходим к шагу 4.

Шаг 4. Формируем перестановку следующим образом. Номера строки и столбца, где находится j-е значение комбинаторной функции, являются элементами строящейся перестановки. Номера строки и столбца, где находится l-е значение числовой функции, задают места в перестановке, куда размещаются найденные элементы. Переходим к шагу 5.

Шаг 5. Если текущая перестановка построена, переходим к шагу 6. Иначе полагаем $l = l + 1$. Если $l \leq m$, то переходим к шагу 4, иначе — к шагу 7.

Шаг 6. Для полученной перестановки w^k вычисляем значение целевой функции $F(w^k)$. Если $F(w^k) < F^*$, то переходим к шагу 7. Иначе локальным решением будет предыдущее значение $F(w^{k-1})$. Переходим к шагу 7.

Шаг 7. Если для значения комбинаторной функции j найден локальный минимум, переходим к шагу 8. Иначе полагаем $l = \widetilde{l} + 1$, $\widetilde{l} = l$. Если $l \leq m$, то переходим к шагу 4, иначе — к шагу 8.

Шаг 8. Если по всем локальным минимумам значение целевой функции увеличивается, переходим к шагу 9. В ином случае запоминаем значение целевой функции и перестановку очередного локального минимума $F(w^{k-1})$. Полагаем $j = j + 1$, $l = 1$, $\widetilde{l} = l$, $F^* = F(w^{k-1})$. Если $j \leq m$, то переходим к шагу 4, иначе — к шагу 9.

Шаг 9. В качестве решения задачи принимаем перестановку, для которой из всех локальных минимумов значение целевой функции является наименьшим. Оно может совпадать с глобальным минимумом. Переходим к шагу 10.

Шаг 10. Конец работы алгоритма.

Используя подклассы разрешимых задач, можно доказать, что методом структурно-алфавитного поиска полиномиально находится глобальньное оптимальное решение.

Опишем вычислительную схему гибридного алгоритма, в котором решение некоторых подзадач осуществляется самонастраивающимися алгоритмами размещения разногабаритных модулей на плате [23].

Шаг 1. Полагаем $A^* = \varnothing$, $\widetilde{A} = A \setminus A^*$, где A^* — подмножество, элементы которого соответствуют уже размещенным модулям.

Шаг 2. Определяем установочные позиции с помощью самонастраивающегося алгоритма, в процессе работы которого на очередной итерации осуществляется динамическая перестройка области размещения: из заданных элементов множества $B=\{b_1,\ldots,b_{\widetilde{n}}\}$ образуем регулярную систему установочных позиций $D=\{d_1,\ldots,d_\xi\}$ таких, что в $d_j \in D$ размещается наибольший по габаритам модуль из $\widetilde{A}$.

Шаг 3. Решаем задачу компоновки элементов $a_l \in \widetilde{A}$ самонастраивающимся алгоритмом [43, 44], в котором реализован подход, основанный на распознавании входной информации. Поскольку из-за структуры аргумента целевой функции в процессе решения этой задачи появляется ситуация неопределенности, оптимизация осуществляется с использованием нескольких критериев (постоянных и переменных). Получаем множество $V^k=\{v_1^k,\ldots,v_{\widetilde{\zeta}}^k\}$.

Шаг 4. Размещаем одногабаритные модули $v_j^k \in V^k$ методом структурно-алфавитного поиска на регулярном поле позиций $D=\{d_1,\ldots,d_\xi\}$.

Шаг 5. Включаем модули $v_j^k \in V^k$, которые содержат один элемент, в множество A^*. Фиксируем эти элементы в найденных позициях. Полагаем $\widetilde{A}=A\setminus A^*$.

Шаг 6.. Если $A^*=A$, переходим к шагу 7, иначе — к шагу 2.

Шаг 7. Конец работы алгоритма.

Рассмотрим решение тестовых примеров разрешимых задач методом структурно-алфавитного поиска.

Пример 1. Задано: $n=5$; $\beta(f(j),w^1)|_1^m=(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)$; $\varphi(j)|_1^m=$ $=(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)$. Упорядочим их следующим образом: $\vec{\varphi}(j)|_1^m=$ $=(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)$; $\overleftarrow{\beta}(f(j),w^{'t})|_1^m=(10,9,8,7,6,5,4,3,2,1)$. По этим функциям определим локальные минимумы: $w^1=(5,4,3,2,1)$, для которой $F(w^1)=230$, и $w^2=(5,4,3,1,2)$, для которой $F(w^2)=239$. Перестановка $w^1=(5,4,3,2,1)$ совпадает с глобальным минимумом, полученным полным перебором и является решением данного примера.

Пример 2. Задано: $n=5$; $\beta(f(j),w^1)|_1^m=(5,6,4,7,3,8,2,9,1,10)$; $\varphi(j)|_1^m=$ $=(5,6,4,7,3,8,2,9,1,10)$. Упорядочим их следующим образом: $\vec{\varphi}(j)|_1^m=$ $=(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)$; $\overleftarrow{\beta}(f(j),w^{'t})|_1^m=(10,9,8,7,6,5,4,3,2,1)$. По этим функциям определим локальные минимумы: $w^1=(1,2,5,3,4)$, для которой $F(w^1)=274$, и $w^2=(3,4,1,2,5)$, для которой $F(w^2)=268$. Перестановка $w^2=(3,4,1,2,5)$ совпадает с глобальным минимумом, полученным полным перебором и является решением этого примера.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целевая функция в задаче размещения зависит от нескольких переменных: перестановки, разбиения n-элементного множества на подмножества и размещения без повторений, вследствие чего она разделяется на несколько подзадач. Для решения задач размещения типа I и II как одногабаритных, так и объектов произвольной формы можно использовать один и тот же подход, в котором задача размещения объектов произвольной формы сводится к задаче размещения одногабаритных объектов путем динамической перестройки установочных позиций области размещения и размеров этих объектов, т.е. для их решения необходимо разрабатывать гибридные алгоритмы.

Нахождение оптимального решения задачи размещения одногабаритных объектов методом структурно-алфавитного поиска достигается упорядочением по возрастанию (или убыванию) значений двух конечных последовательностей (функций натурального аргумента), которыми задаются входные данные. Сходимость описанного метода доказана с использованием подклассов разрешимых задач, для которых известно глобальное решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Канторович Л.В., Залгаллер В.А. Рациональный раскрой промышленных материалов. — Новосибирск: Наука, СО АН СССР, 1971. — 299 с.
2. Проектирование цифровых вычислительных машин / С.А. Майоров, Г.И. Новиков, О.Ф. Немолочнов и др. / Под ред. С.А. Майорова. — М.: Высш. шк., 1972. — 344 с.
3. Селютин В.А. Машинное конструирование электронных устройств. — М.: Сов. радио, 1977. — 384 с.
4. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — К.: Наук. думка, 1981. — 281 с.
5. Гуляницкий Л.Ф., Сергиенко И.В., Ходзинский А.Н. Диалоговый пакет программ ВЕКТОР-2. — Киев, 1981. — 55 с. — (АН УССР. Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова;. Препр. 1981. — 63).
6. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. — К.: Наук. думка, 1982. — 552 с.
7. Стоян Ю.Г. Размещение геометрических объектов. — К.: Наук. думка, 1975. — 240 с.
8. Стоян Ю.Г., Гиль Н.И. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. — К.: Наук. думка, 1976. — 247 с.
9. Стоян Ю.Г., Путятин В.П. Размещение источников физических полей. — К.: Наук. думка, 1981. — 184 с.
10. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. — К.: Наук. думка, 1986. — 267 с.
11. Стоян Ю.Г., Соколовский В.З. О решении одной задачи размещения методом сужающихся окрестностей // УСиМ. — 1978. — № 5. — С. 114–116.
12. Справочник. Системы автоматизированного проектирования в радиоэлектронике / Е.В. Авдеев, Т.А. Еремин, И.П. Норенков, М.И. Лесков / Под ред. проф. И.П. Норенкова. — М.: Радио и связь, 1986. — 368 с.
13. Абрайтис Л.Б., Шейнаускас Р.И., Жилявичюс В.А. Автоматизация проектирования ЭВМ. — М.: Сов. радио, 1978. — 272 с.
14. Автоматизация проектирования печатных блоков с модулями произвольной формы / Е.П. Герасименко, В.И. Кот, И.Я. Ландау, В.М. Сомкин. — М.: Машиностроение, 1979. — 167 с.
15. Рубляускас Д.А. Алгоритм размещения разногабаритных элементов на печатной плате // Вычисл. техн. — Каунас, Политехн. ин-т. 1981. — **14**. — С. 100–101.
16. Матицкас И.-К.Л., Ришкус А.В., Чирица В.Ю. Размещение разногабаритных модулей в целочисленно кратных позициях // Там же. — Каунас, Политехн. ин-т. 1978. — **10**. — С. 71–73.
17. Курейчик В.М., Золотько А.Ю. Алгоритм размещения разногабаритных элементов на координатной сетке с фиксированными размерами // Там же. — Каунас, Политехн. ин-т. 1981. — **14**. — С. 107–108.
18. Петренко А.И., Тетельбаум А.Я. Формальное конструирование электронно-вычислительной аппаратуры. — М.: Сов. радио, 1979. — 256 с.
19. Рустамов И.А., Тютин А.А. О решении задачи размещения конструктивных компонентов с учетом требований трассировки // УСиМ. — 1975. — № 6. — С. 107–115.
20. Арбузов В.А., Антонова Н.В. Релаксационный алгоритм размещения методом групповых перестановок // Автоматизация конструкторского проектирования РЭА и ЗВА: Тез. докл. — Пенза: Политехн. ин-т, 1982. — С. 49–50.
21. Матицкас И.-К.Л. Алгоритм размещения разногабаритных элементов в кратные позиции // УСиМ. — 1979. — № 4. — С. 120–123.
22. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Пер. с англ. — М.: Мир, 1985. — 510 с.

23. Гуляницкий Л.Ф., Тимофеева Н.К. О размещении разногабаритных элементов на печатных платах // УСиМ. — 1982. — № 3. — С. 50–53.

24. Кобзева Т.В. К задаче размещения разногабаритных элементов // Там же. — 1982. — № 1. — С. 87–89.

25. Гуляницкий Л.Ф., Малышко С.А., Сергиенко И.В. Один подход к формализации и решению задач размещения разногабаритных элементов РЭА // Там же. — 1990. — № 4. — С. 63–70.

26. Артемов В.Б., Рябов Л.П. Алгоритм размещения модулей разных габаритов на печатной плате // Обмен опытом в радиопромышленности. — 1977. — № 2. — С. 23–31.

27. Путятин В.П., Элькин А.Б. Математическая модель задачи оптимизации разбиений в АПК // Вест. НТУ «ХПИ»: Сб. науч. тр. Тематич. вып. «Системный анализ, управление и информационные технологи». — Х.: Нац. техн. ун-т «Харьк. политехн. ин-т», 2007. — № 18. — С. 98–105.

28. Яремчук С.І., Моргалюк О.М. Використання методу штрафних функцій при розв'язанні мінімаксної задачі розміщення джерел // Системний аналіз. Інформатика, управління, САІУ-2010: Матеріали всеукр. наук.-практ. конф., 4–5 бер. 2010 р. — Запоріжжя: Класич. приват. ун-т., 2010 — С. 208–210.

29. Козін І.В. Математичні моделі розміщення, упаковки, розподілу з умовою інваріантності щодо груп перетворень: Автореф. дис. ... докт. фіз.-мат. наук / ІК НАНУ. — Київ, 2010. — 31 с.

30. Базилевич Р.П., Щерб'юк І.Ф. Штучна ієрархічна кластеризація в задачах розміщення різногабаритних елементів // Искусств. интеллект. — 2002. — № 3. — С. 484–489.

31. Гинзбург Б.Д. Алгоритм размещения модулей на плате // Обмен опытом в радиопромышленности. — 1972. — Вып 4. — С. 31–33.

32. Чуб И.А., Новожилова М.В. Метод решения линеаризованной задачи размещения неориентированных геометрических объектов // УСиМ. — 2011. — № 5. — С. 47–52.

33. Application of data analysis metods and of simulated anuealing for the automatic layout of circuits / J.R. Barra, M. Becker, E.F, Kouka, M. Tricot // Comput.Syst.Sci. end Eng. — 1987. — **2**, N 1. — P. 3–15.

34. Sherlekar Deepak, Jaja J. / Imput sensitive VLSI layouts for graphs of arbitrary degree // Lect. Notes Comput. Sci. 1988. — **319**. — P. 268–277.

35. Chung F.R.K., Graham R.L., Saks M.E. A dynamic location problem for graphs // Combinatorica. — 1989. — **9**, N 2. — P. 111–131.

36. Song L., Vannelli A. A VLSI placement method usined tabu slarch // Microelectron J. — 1992. — **23**, N 3. — P. 167–172.

37. Гаджиев А.Г., Эфендиев Г.Д. О теоретическом и вероятностно-статистическом подходах определения оптимальной раскладки компьютерной клавиатуры // Проблемы управления и информатики. — 2009. — № 5. — С. 100–105.

38. Тимофієва Н.К. Залежність цільової функції в задачах комбінаторної оптимізації від багатьох змінних та гібридні алгоритми // Вісн. Вінниц. політехн. ін-ту. 2009. — № 2. — С. 130–136.

39. Тимофієва Н.К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації: Автореф. дис... докт. техн. наук / ІК НАНУ. — Київ, 2007. — 32 с.

40. Тимофієва Н.К. Залежність цільової функції від структури вхідних даних в задачах комбінаторної оптимізації // Вест. НТУ «ХПИ». Темат. вып. «Системный анализ, управление и информационные технологии»: Сб. науч. тр. — Харьков. — 2005. — № 55. — С. 81–86.

41. Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенства. — М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. — 456 с.

42. Тимофеева Н.К. Матрицы в задачах комбинаторной оптимизации // Проблемы управления и информатики. — 1996. — № 3. — С. 104–113.

43. Тимофеева Н.К. Один алгоритм оптимальной компоновки базовых элементов в корпуса интегральных микросхем // Алгоритмы и программы решения задач дискретной оптимизации. — К.: Ин-т кибернетики АН УССР. — 1980. — С. 3–20.

44. Тимофеева Н.К. О природе неопределенности и переменных критериях в задачах разбиения // Проблемы управления и информатики. — 2009. — № 5. — С. 88–99.

Поступила 16.01.2012