УДК 519.21+62

О.И. КИЙКОВСКАЯ, Я.М. ЧАБАНЮК

СЛУЧАЙНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ В СХЕМЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ МАЛОЙ ДИФФУЗИИ С МАРКОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Ключевые слова: *большие уклонения, марковский процесс, экспоненциальный генератор.*

ВВЕДЕНИЕ

Проблеме определения вероятности больших уклонений случайных величин посвящены работы И.Н. Санова, Н.В. Смирнова, Г. Крамера [1–3] и др. Тесно связана с этой проблемой задача оценивания вероятности больших уклонений эмпирической кривой распределения случайной величины ξ после N независимых наблюдений от теоретической кривой распределения, а также от среднего значения членов вариационного ряда выборки из генеральной совокупности случайных величин. Распределения «нормальных» уклонений в этих двух случаях получены в работах Н.В. Смирнова, А.Н. Колмогорова [4] и др.

Одна из проблем состоит в определении нижнего предела для минимального обьема выборки $n = n(\varepsilon, \delta)$, который гарантирует существование теста с данными вероятностями ошибок (малыми) первого и второго рода ε, δ [5].

При исследовании случайных процессов, определяемых дифференциальными уравнениями со случайными возмущениями, важную роль играет анализ асимптотических методов, которые используются в случае, если эти возмущения малы. Такой анализ проводится на больших временных интервалах, когда небольшие уклонения сильно влияют на поведение системы. Чтобы учесть это влияние, необходимо оценить вероятности появления маловероятных событий, т.е. исследовать большие уклонения [6].

Анализу случайных эволюций с асимптотически малой диффузией посвящены работы [6–8].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Проблема больших уклонений рассмотрена для диффузионного процесса с асимптотически малой диффузией, который задан стохастическим дифференциальным уравнением

$$du^{\varepsilon}(t) = C(u^{\varepsilon}(t); x(t/\varepsilon^3))dt + \varepsilon^{-1} C_0(u^{\varepsilon}(t);\ x(t/\varepsilon^3))d(t) +$$

$$+ \varepsilon^{1/2} \sigma(u^{\varepsilon}(t);\ x(t/\varepsilon^3))dw(t). \tag{1}$$

Здесь $C(u; x)$, $u \in R^d$, — функция регрессии [9]. Вторая компонента x функции регрессии определяет влияние внешних факторов, которые описаны равномерно эргодическим марковским процессом $x(t), t \ge 0$, в фазовом измеримом пространстве состояний $(X, \mathbf{X})$ [10]. Генератор марковского процесса определен соотношением [11, 12]:

$$\mathbf{Q}\varphi(x) = q(x) \int_X P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)] \tag{2}$$

в банаховом пространстве $\mathbf{B}(X)$ действительных ограниченных функций $\varphi(x), x \in X$, с нормой $||\varphi(x)|| = \sup_{x \in X} |\varphi(x)|$, где $P(x, B)$, $x \in X$, $B \in \mathbf{X}$, — стохастическое ядро [7]; $q(x) = g^{-1}(x)$, $g(x) = E\theta_x$, θ_x — время пребывания марковского процесса в состоянии x, т.е. $q(x)$ — «интенсивность» времени пребывания в состоянии $x \in X$ [13].

Стационарное распределение $\pi(B), B \in \mathbf{X}$, марковского процесса $x(t)$, $t \geq 0$, опрелеляется соотношением

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), \; q = \int_X \pi(dx)q(x),$$

где $\rho(B), B \in \mathbf{X}$, — стационарное распределение вложенной цепи Маркова $x_n = x(\tau_n), n \geq 0$, а $\tau_{n+1} = \tau_n + \theta_{n+1}, n \geq 0$, и соотношением

$$\mathbb{P}\,(\theta_{n+1} \leq t \,|\, x_n = x) = F_x(t) = \mathbb{P}\,(\theta_x \leq t) = 1 - e^{-q(x)t}, \; t > 0.$$

Для генератора $\mathbf{Q}$ марковского процесса $x(t)$, $t \geq 0$, определен потенциал $R_0 = \Pi - (\Pi + \mathbf{Q})^{-1}$, где $\Pi\varphi(x) = \int_X \pi(dx)\varphi(x)$ — проектор на нуль-пространство оператора $\mathbf{Q}$: $N_Q = \{\varphi \colon \mathbf{Q}\varphi = 0\}$ [14].

АСИМПТОТИЧЕСКИ МАЛАЯ ДИФФУЗИЯ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ ГЕНЕРАТОР БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

Сингулярное возмущение $C_0(u; x)$ функции регрессии $C(u; x)$ удовлетворяет условию баланса

$$\Pi C_0 = \int_E \pi(dx) C_0(u; x) = 0. \tag{3}$$

Случайная эволюция (1) характеризуется генератором двухкомпонентного марковского процесса $u^\varepsilon(t)$, $x_t^\varepsilon = x(t/\varepsilon^3), t \geq 0$, [15]:

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(u; x) = \varepsilon^{-3}\mathbf{Q}\varphi(u) + \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}_1(x)\varphi(u; x) + \mathbf{Q}_2^\varepsilon(x)\varphi(u; x), \tag{4}$$

где

$$\mathbf{Q}_1(x)\varphi(u; x) = C_0(u; x)\varphi'(u; x), \tag{5}$$

$$\mathbf{Q}_2^\varepsilon(x)\varphi(u; x) = C(u; x)\varphi'(u; x) + (1/2)\varepsilon\sigma^2(u; x)\varphi''(u; x). \tag{6}$$

Отметим, что второе слагаемое в (6) определяет асимптотически малую диффузию предельного процесса для (1) [7].

Асимптотика вероятностей маловероятных событий или больших уклонений для случайных эволюций анализируется экспоненциальным генератором [8] больших уклонений для марковского процесса с генератором $\mathbf{L}^\varepsilon$ [7] в схеме серий, который определяется соотношением $\mathbf{H}^\varepsilon\varphi(u) = e^{-\varphi(u)/\varepsilon}\varepsilon\mathbf{L}^\varepsilon e^{\varphi(u)/\varepsilon}$.

Теорема. При выполнении условия баланса (3) и равномерной эргодичности марковского процесса переключений $x(t), t \geq 0$, имеет место сходимость экспоненциальных генераторов

$$\mathbf{H}^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u; x) \to \mathbf{H}\varphi(u), \varphi^\varepsilon(u; x) \to \varphi(u), \varepsilon \to 0, \varphi(u) \in C^4(R^d)$$

на возмущенных тест-функциях

$$\varphi^\varepsilon(u; x) = \varphi(u) + \varepsilon \ln[1 + \varepsilon\varphi_1(u; x) + \varepsilon^2\varphi_2(u; x)]. \tag{7}$$

Предельный экспоненциальный генератор задается равенством

$$\mathbf{H}\varphi(u)=\hat{C}(u)\varphi'(u)+1/2B^2(u)[\varphi'(u)]^2,$$

где

$$\hat{C}(u)=\int_X \pi(dx)C(u;x);\ \ B^2(u)=\rho^2(u)+\sigma^2(u),$$

$$\rho^2(u)=2\Pi C_0(u;x)R_0C_0(u;x),\ \sigma^2(u)=\Pi\sigma^2(u;x).$$

Доказательство теоремы основано на асимптотическом представлении экспоненциальных генераторов.

Лемма 1. Для тест-функций $\varphi(u),\varphi_1(u;\cdot)\in C^3(R^d),\varphi_2(u;\cdot)\in C(R^d)$ имеет место асимптотическое представление экспоненциального генератора

$$\mathbf{H}^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u;x)=\mathbf{H}_Q^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u;x)+\mathbf{H}_{Q_1}^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u;x)+\mathbf{H}_{Q_2^\varepsilon}^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u;x), \tag{8}$$

где

$$\mathbf{H}_Q^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u;x)=\varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi_1(u;x)+\mathbf{Q}\varphi_2(u;x)-\varphi_1(u;x)\mathbf{Q}\varphi_1(u;x)+\Theta_Q^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(u;x),$$

$$\mathbf{H}_{Q_1}^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u;x)=\varepsilon^{-1}\mathbf{Q}_1(x)\varphi(u)+\Theta_{Q_1}^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(u;x),$$

$$\mathbf{H}_{Q_2^\varepsilon}^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u;x)=C(u;x)\varphi'(u)+(1/2)\sigma^2(u;x)[\varphi'(u)]^2+\Theta_{Q_2^\varepsilon}^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(u;x),$$

а остаточные члены имеют представление

$$\begin{aligned}\Theta_Q^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(u;x)=\varepsilon[\varphi_1(u;x)\mathbf{Q}\varphi_2(u;x)+\\ +\varphi_2(u;x)\mathbf{Q}\varphi_1(u;x)+\varepsilon\varphi_2(u;x)\mathbf{Q}\varphi_2(u;x)];\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\Theta_{Q_1}^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(u;x)=\varepsilon[C_0(u;x)\varphi_1'(u;x)+\\ +\varepsilon e^{-\varphi(u)/\varepsilon}\mathbf{Q}_1(x)\,e^{\varphi(u)/\varepsilon}\varphi_2(u;x)\,\varepsilon e^{-\varphi(u)/\varepsilon}\varphi_1(u;x)\mathbf{Q}_1(x)\,e^{\varphi(u)/\varepsilon}\varphi_1(u;x)-\\ -\varepsilon^2e^{-\varphi(u)/\varepsilon}\varphi_1(u;x)\mathbf{Q}_1(x)e^{\varphi(u)/\varepsilon}\varphi_2(u;x)-\varepsilon e^{-\varphi(u)/\varepsilon}\varphi_2(u;x)\mathbf{Q}_1(x)e^{\varphi(u)/\varepsilon}-\\ -\varepsilon^2e^{-\varphi(u)/\varepsilon}\varphi_2(u;x)\mathbf{Q}_1(x)e^{\varphi(u)/\varepsilon}\varphi_1(u;x)-\\ -\varepsilon^3e^{-\varphi(u)/\varepsilon}\varphi_2(u;x)\mathbf{Q}_1(x)e^{\varphi(u)/\varepsilon}\varphi_2(u;x)];\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\Theta_{Q_2^\varepsilon}^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(u;x)=(1/2)\sigma^2(u;x)\,\varepsilon\varphi''(u)+\\ +e^{-\varphi(u)/\varepsilon}\varepsilon^2\mathbf{Q}_2^\varepsilon(x)e^{\varphi(u)/\varepsilon}\varphi_1(u;x)+e^{-\varphi(u)/\varepsilon}\varepsilon^3\mathbf{Q}_2^\varepsilon(x)e^{\varphi(u)/\varepsilon}\varphi_2(u;x)-\\ -e^{-\varphi(u)/\varepsilon}\varepsilon^2\varphi_1(u;x)\mathbf{Q}_2^\varepsilon(x)e^{\varphi(u)/\varepsilon}-e^{-\varphi(u)/\varepsilon}\varepsilon^3\varphi_1\mathbf{Q}_2^\varepsilon(x)e^{\varphi(u)/\varepsilon}\varphi_1(u;x)-\\ -e^{-\varphi(u)/\varepsilon}\varepsilon^4\varphi_1(u;x)\mathbf{Q}_2^\varepsilon(x)e^{\varphi(u)/\varepsilon}\varphi_2(u;x)-e^{-\varphi(u)/\varepsilon}\varepsilon^3\varphi_2(u;x)\mathbf{Q}_2^\varepsilon(x)e^{\varphi(u)/\varepsilon}-\\ -e^{-\varphi(u)/\varepsilon}\varepsilon^4\varphi_2(u;x)\mathbf{Q}_2^\varepsilon(x)e^{\varphi(u)/\varepsilon}\varphi_1(u;x)-\\ -e^{-\varphi(u)/\varepsilon}\varepsilon^5\varphi_2\varphi(u;x)\mathbf{Q}_2^\varepsilon(x)e^{\varphi(u)/\varepsilon}\varphi_2(u;x)+(1/2)\varepsilon\sigma^2(u;x)\varphi''(u).\end{aligned} \tag{11}$$

Доказательство. Рассмотрим экспоненциальный генератор $\mathbf{H}^{\varepsilon}$ на тест-функциях (7):

$$\mathbf{H}^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(u;x) = e^{-\varphi(u)/\varepsilon}[1+\varepsilon\varphi_1(u;x)+\varepsilon^2\varphi_2(u;x)]^{-1}\times$$
$$\times\varepsilon\mathbf{L}^{\varepsilon}e^{\varphi(u)/\varepsilon}[1+\varepsilon\varphi_1(u;x)+\varepsilon^2\varphi_2(u;x)].$$

Учитывая представление (4), выделяем из него слагаемое, которое содержит оператор (2):

$$\mathbf{H}^{\varepsilon}_{Q}\varphi^{\varepsilon}(u;x) = e^{-\varphi(u)/\varepsilon}[1-\varepsilon\varphi_1(u;x)-\varepsilon^2\varphi_2(u;x)+o(\varepsilon^3)]\times$$
$$\times\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}e^{\varphi(u)/\varepsilon}[1+\varepsilon\varphi_1(u;x)+\varepsilon^2\varphi_2(u;x)].$$

Поскольку $\varphi(u)\in N_Q$, то $\mathbf{Q}e^{\varphi(u)/\varepsilon}=0$. Учитывая, что $\mathbf{Q}e^{\varphi(u)/\varepsilon}\varphi_1(u;x) =$ $= e^{\varphi(u)/\varepsilon}\mathbf{Q}\varphi_1(u;x)$, получаем

$$\mathbf{H}^{\varepsilon}_{Q}\varphi^{\varepsilon}(u;x) = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi_1(u;x)+\mathbf{Q}\varphi_2(u;x)-\varphi_1(u;x)\mathbf{Q}\varphi_1(u;x)+\Theta^{\varepsilon}_{Q}(x)\varphi^{\varepsilon}(u;x),$$

где $\Theta^{\varepsilon}_{Q}(x)\varphi^{\varepsilon}(u;x)$ имеет вид (9).

Рассмотрим также слагаемое с оператором $\mathbf{Q}_1(x)$, а именно

$$\mathbf{H}^{\varepsilon}_{Q_1}\varphi^{\varepsilon}(u;x) =$$
$$= e^{-\varphi(u)/\varepsilon}[1-\varepsilon\varphi_1(u;x)-\varepsilon^2\varphi_2(u;x)+o(\varepsilon^3)]\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}_1(x)e^{\varphi(u)/\varepsilon}[1+\varepsilon\varphi_1(u;x)+$$
$$+\varepsilon^2\varphi_2(u;x)] = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}_1(x)\varphi(u)+\Theta^{\varepsilon}_{Q_1}(x)\varphi^{\varepsilon}(u;x),$$

где $\Theta^{\varepsilon}_{Q_1}(x)\varphi^{\varepsilon}(u;x)$ имеет вид (10).

Для слагаемого с оператором $\mathbf{Q}^{\varepsilon}_2(x)$ получим

$$\mathbf{H}^{\varepsilon}_{Q_2}\varphi^{\varepsilon}(u;x) = e^{-\varphi(u)/\varepsilon}[1-\varepsilon\varphi_1(u;x)-\varepsilon^2\varphi_2(u;x)+$$
$$+o(\varepsilon^3)]\varepsilon\mathbf{Q}^{\varepsilon}_2(x)e^{\varphi(u)/\varepsilon}[1+\varepsilon\varphi_1(u;x)+\varepsilon^2\varphi_2(u;x)] =$$
$$= e^{-\varphi(u)/\varepsilon}\varepsilon\mathbf{Q}^{\varepsilon}_2(x)\,e^{\varphi(u)/\varepsilon}+o(\varepsilon^3) = \mathbf{Q}_2(x)\varphi(u)+\mathbf{H}_{\sigma}(x)\varphi(u)+\Theta^{\varepsilon}_{Q_2^{\varepsilon}}(x)\varphi^{\varepsilon}(u;x),$$

где $\mathbf{H}_{\sigma}(x)\varphi(u) = (1/2)\sigma^2(u;x)[\varphi'(u)]^2$, а $\Theta^{\varepsilon}_{Q_2^{\varepsilon}}(x)\varphi^{\varepsilon}(u;x)$ имеет вид (11).

Следствие. Экспоненциальный генератор (8) имеет следующее асимптотическое представление:

$$\mathbf{H}^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(u;x) = \varepsilon^{-1}[\mathbf{Q}\varphi_1(u;x)+\mathbf{Q}_1(x)\varphi(u)]+\mathbf{Q}\varphi_2(u;x)-\varphi_1(u;x)\mathbf{Q}\varphi_1(u;x)+$$
$$+C(u;x)\varphi'(u)+(1/2)\sigma^2(u)[\varphi'(u)]^2+\Theta^{\varepsilon}(x)\varphi^{\varepsilon}(u;x), \tag{12}$$

где

$$\Theta^{\varepsilon}(x)\varphi^{\varepsilon}(u;x) = \Theta^{\varepsilon}_{Q}(x)\varphi^{\varepsilon}(u;x)+\Theta^{\varepsilon}_{Q_1}(x)\varphi^{\varepsilon}(u;x)+\Theta^{\varepsilon}_{Q_2^{\varepsilon}}(x)\varphi^{\varepsilon}(u;x). \tag{13}$$

Лемма 2. Решение проблемы сингулярного возмущения [13] оператора (12) определяется предельным представлением

$$\mathbf{H}^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(u;x)=\mathbf{H}\varphi(u)+\Theta^{\varepsilon}(x)\varphi^{\varepsilon}(u;x), \tag{14}$$

где

$$\mathbf{H}\varphi(u)=\hat{C}(u)\varphi'(u)+(1/2)B^{2}(u)[\varphi'(u)]^{2}.$$

Доказательство. Условие баланса (3) и представление (5) оператора $Q_1(x)$ дает возможность из равенства $\mathbf{Q}\varphi_1(u;x)+\mathbf{Q}_1(x)\varphi(u)=0$ определить тест-функцию $\varphi_1(u;x)$ в виде

$$\varphi_1(u;x)=-R_0\mathbf{Q}_1(x)\varphi(u)=-R_0C_0(u;x)\varphi'(u). \tag{15}$$

Условие разрешимости проблемы сингулярного возмущения имеет вид [7]:

$$\mathbf{Q}\varphi_2(u;x)-\varphi_1(u;x)\mathbf{Q}\varphi_1(u;x)+\mathbf{Q}_2(x)\varphi(u)+(1/2)\sigma^{2}(u;x)[\varphi'(u)]^{2}=\mathbf{H}\varphi(u). \tag{16}$$

Поскольку $\mathbf{Q}R_0=\Pi-I$, для второго слагаемого (16) имеем

$$-\varphi_1(u;x)\mathbf{Q}\varphi_1(u;x)=\varphi_1(u;x)\mathbf{Q}R_0C_0(u;x)\varphi'(u)=$$

$$=-R_0C_0(u;x)\varphi'(u)\Pi C_0(u;x)\varphi'(u)+$$

$$+R_0C_0(u;x)\varphi'(u)C_0(u;x)\varphi'(u)=C_0(u;x)R_0C_0(u;x)[\varphi'(u)]^{2}.$$

Следовательно, оператор

$$\mathbf{H}(x)\varphi(u):=\mathbf{H}_{\rho}(x)\varphi(u)+\mathbf{Q}_2(x)\varphi(u)+\mathbf{H}_{\sigma}(x)\varphi(u), \tag{17}$$

где $\mathbf{H}_{\rho}(x)\varphi(u)=C_0(u;x)R_0C_0(u;x)[\varphi'(u)]^{2}$. Оператор $\mathbf{H}(x)$ имеет предельный оператор $\mathbf{H}=\Pi\,\mathbf{H}(x)\Pi$ согласно решению проблемы сингулярного возмущения [13].

Для тест-функции $\varphi_2(u;x)$ из (16) и (17) получаем уравнение

$$\mathbf{Q}\varphi_2(u;x)+\mathbf{H}(x)\varphi(u)=\mathbf{H}\varphi(u),$$

откуда

$$\varphi_2(u;x)=R_0\widetilde{\mathbf{H}}(x)\varphi(u), \tag{18}$$

где $\widetilde{\mathbf{H}}(x)\varphi(u)=\mathbf{H}(x)-\mathbf{H},\ \varphi(u)\in C^{3}(R^{d})$.

Таким образом, учитывая представления (17) и (6), получаем

$$\mathbf{H}\varphi(u)=\Pi[C_0(u;x)R_0C_0(u;x)[\varphi'(u)]^{2}+C(u;x)\varphi'(u)+(1/2)\sigma^{2}(u;x)[\varphi'(u)]^{2}]=$$

$$=\hat{C}(u)\varphi'(u)+(1/2)B^{2}(u)[\varphi'(u)]^{2}$$

в обозначениях теоремы.

Доказательство теоремы. Для завершения доказательства теоремы установим свойство

$$\sup_{x\in X}|\Theta^{\varepsilon}(x)\varphi^{\varepsilon}(u;x)|\to 0,\ \ \varepsilon\to 0,\ \ \varphi(u)\in C^{3}(R^{d}). \tag{19}$$

Из представления тест-функций (15) и (18), аналитического вида остаточного члена (13) и гладкости функции $\varphi(u)\in C^{3}(R^{d})$ легко видеть, что имеет место (19). Таким образом, из (14) получаем утверждение теоремы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построение предельного экспоненциального генератора для случайной эволюции в схеме асимптотически малой диффузии позволяет рассмотреть предельные свойства экспоненциального генератора процедуры стохастической аппроксимации [14, 16] в схеме асимптотически малой диффузии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Санов И.И. О вероятности больших отклонений случайных величин // Мат. сб. — 1957. — **42**, № 1. — С. 14–44.
2. Смирнов Н.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Избранне труды. — М.: Наука, 1970. — 300 с.
3. Крамер Г. Математические методы статистики. — М.: Мир, 1976. — 648 с.
4. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. — М.: Наука, 1974. — 120 с.
5. Боровков А.А., Могульский А.А. Большие уклонения и проверка статистических гипотез. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1992. — 222 с.
6. Freidlin M.J., Wentzell A.D. Random perturbation of dynamical systems. — New York: Springer-Verlag, 1998. — 430 p.
7. Koroluyk V.S. Random evolutions with locally independent increments on increasing time intervals // J. Math. Sci. — 2011. — **179**, N 2. — P. 273–289.
8. Feng J., Kurtz T. Large deviations for stochastic processes. — Providence (RI): Amer. Math. Soc., 2006. — 404 p.
9. Kiykovska O.I., Chabanyuk Ya.M. Convergence of stochastic process with Markov switchings // Математичні студії. — 2012. — **37**, N 2. — P. 203–208.
10. Korolyuk V.S., Korolyuk V.V. Stochastic models of systems. — Dordrecht: Kluwer, 1999. — 185 p.
11. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов: В 3 т. — М.: Наука, 1971–1975. — Т. 1. — 664 с.; Т. 3. — 604 с.
12. Скороход А.В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. — К.: Наук. думка, 1987. — 328 с.
13. Korolyuk V.S., Limnios N. Stochastic systems in merging phase space. — Singapore: World Scientific, 2005. — 330 p.
14. Чабанюк Я.М. Процедура стохастической аппроксимации в эргодическом пространстве Маркова // Математичні студії. — 2004. — **21**, № 1. — С. 81–86.
15. Кійковська О.І. Збіжність процедури стохастичної апроксимації з дифузійним збуренням // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: Зб. наук. праць. — Кам’янець-Под.: Кам’янець-Под. нац. ун-т, 2012. — С. 124–132.
16. Чабанюк Я.М. Непрерывная процедура стохастической аппроксимации с сингулярным возмущением в условиях баланса // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 3. — С. 133–139.

Поступила 19.09.2012