УДК 517.977

А.А. АБДУЛЛАЕВ, К.Б. МАНСИМОВ

МНОГОТОЧЕЧНЫЕ НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ПРОЦЕССАХ, ОПИСЫВАЕМЫХ СИСТЕМОЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРЫ

Ключевые слова: *интегральное уравнение Вольтерры, необходимое условие оптимальности, особые управления.*

Для различных классов задач оптимального управления, описываемых системой интегральных уравнений, в работах [1–5] и других установлены необходимые условия оптимальности типа принципа максимума Понтрягина [6]. Однако нередки ситуации, когда условие максимума Понтрягина вдоль исследуемого на оптимальность управления вырождается [7]. В таком случае нужно сформулировать новые необходимые условия оптимальности (необходимые условия оптимальности особых [7] управлений). Рассмотрению особых управлений в процессах, описываемых различными дифференциальными и разностными уравнениями, посвящены работы многих авторов; наиболее полный обзор соответствующих результатов приведен в [7–13].

Насколько известно, особые управления в процессах, описываемых интегральными уравнениями, не исследовались. В настоящей работе рассматривается случай вырождения условия максимума Понтрягина в одной задаче управления интегральными уравнениями типа Вольтерры.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Допустим, что управляемый объект на фиксированном отрезке времени $T=[t_0, t_1]$ описывается системой нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерры второго рода

$$z(t)=\int_{t_0}^{t} K(t,s)f(s,z(s),u(s))ds, \quad t\in T. \tag{1}$$

Здесь $z(t)$ — n-мерный вектор фазовых переменных, $K(t,s)$ — заданная непрерывная на $T\times T$ $(n\times n)$-матричная функция, $f(s,z,u)$ — заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная в $T\times R^n\times R^r$ вместе с частными производными по z до второго порядка включительно, $u(t)$ — r-мерный кусочно-непрерывный (с конечными числами точек разрыва первого рода) вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $U\in R^r$, т.е.

$$u(t)\in U\subset R^r, \quad t\in T. \tag{2}$$

Такие управляющие функции назовем допустимыми управлениями.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $u(t)$ соответствует единственное непрерывное на всем отрезке T решение $x(t)$ уравнения (1).

На решениях системы интегральных уравнений (1), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим функционал

$$S(u)=\varphi(z(t_1)). \tag{3}$$

Здесь $\varphi(z)$ — заданная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция.

Задача заключается в минимизации функционала (3) при ограничениях (1), (2).

Если решение $z(t)$ системы (1), соответствующее допустимому управлению $u(t)$, минимизирует функционал (3), то такое управление назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t), z(t))$ — оптимальным процессом.

ФОРМУЛА ПРИРАЩЕНИЯ КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА

Пусть $(u(t), z(t))$ — фиксированный, а $(\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), \bar{z}(t) = z(t) + \Delta z(t))$ — произвольный допустимые процессы. Далее используются обозначения следующего вида:

$$\Delta_{\bar{u}(s)} f[s] = f(s, z(s), \bar{u}(s)) - f(s, z(s), u(s)), \; f_z[s] = f_z(s, z(s), u(s)),$$

$$H(t, z(t), u(t), \psi(t)) = -\varphi'_z(z(t_1)) K(t_1, t) f(t, z(t), u(t)) +$$

$$+ \int_t^{t_1} \psi'(s) K(s, t) f(t, z(t), u(t)) ds,$$

$$H_z[t] = H_z(t, z(t), u(t), \psi(t)),$$

$$\Delta_{\bar{u}(t)} H[t] = H(t, z(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, z(t), u(t), \psi(t)),$$

$$\Delta_{\bar{u}(t)} H_z[t] = H_z(t, z(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H_z(t, z(t), u(t), \psi(t)),$$

$$H_{zz}[t] = H_{zz}[t, z(t), u(t), \psi(t)].$$

Здесь $\psi = \psi(t)$ — n-мерная кусочно-непрерывная вектор-функция, являющаяся решением линейного неоднородного интегрального уравнения типа Вольтерры (сопряженная система)

$$\psi(t) = \int_t^{t_1} \psi'(s) K(s, t) f_z[t] ds - \varphi'_z(z(t_1)) K(t_1, t) f_z[t]. \tag{4}$$

Очевидно, что $\Delta z(t)$ — решение интегрального уравнения

$$\Delta z(t) = \int_{t_0}^{t} K(t, s)[f(s, \bar{z}(s), \bar{u}(s)) - f(s, z(s), u(s))] ds. \tag{5}$$

С учетом введенных обозначений и (5) приращение функционала (3) можно записать в виде

$$\Delta S(u) = \varphi'_z(z(t_1)) \Delta z(t_1) + \frac{1}{2} \Delta z'(t_1) \varphi_{zz}(z(t_1)) \Delta z(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) \Delta z(t) dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_t^{t_1} \psi'(s) K(s, t)[f(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t)) - f(t, z(t), u(t))] ds \right] dt + o_1(||\Delta z(t_1)||^2. \tag{6}$$

Здесь $||\alpha||$ — евклидова норма вектора в R^n, а величина $o_1(||\Delta z(t_1)||^2)$ определяется из разложения

$$\varphi(\bar{z}(t_1)) - \varphi(z(t_1)) = \varphi'_z(z(t_1)) \Delta z(t_1) + \frac{1}{2} \Delta z'(t_1) \varphi_{zz}(z(t_1)) \Delta z(t_1) + o_1(||\Delta z(t_1)||^2).$$

С учетом вида функции Гамильтона–Понтрягина $H(t, z, u, \psi)$ формула приращения (6) преобразуется к виду

$$\Delta S(u) = \varphi'_z(z(t_1))\Delta z(t_1) + \frac{1}{2}\Delta z'(t_1)\varphi_{zz}(z(t_1))\Delta z(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\Delta z(t)dt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} [H(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, z(t), u(t), \psi(t))]dt + o_1(||\Delta z(t_1)||^2). \qquad (7)$$

Отсюда, используя формулу Тейлора и учитывая, что $\psi(t)$ — решение уравнения (4), имеем

$$\Delta S(u) = -\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}(t)} H[t]dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}(t)} H'_z[t]\Delta z(t)dt + \frac{1}{2}\Delta z'(t_1)\varphi_{zz}(z(t_1))\Delta z(t_1) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \Delta z'(t) H_{zz}[t]\Delta z(t)dt + \eta_1(\Delta u), \qquad (8)$$

где по определению

$$\eta_1(\Delta u) = o_1(||\Delta z(t_1)||^2) - \int_{t_0}^{t_1} o_2(||\Delta z(t)||^2)dt - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \Delta z'(t)\Delta_{\bar{u}(t)} H_{zz}[t]\Delta z(t)dt. \qquad (9)$$

Здесь величина $o_2(||\Delta z(t)||)$ определяется из разложения

$$H(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, z(t), \bar{u}(t), \psi(t)) = H'_z(t, z(t), \bar{u}(t), \psi(t))\Delta z(t) +$$

$$+\frac{1}{2}\Delta z'(t) H_{zz}(t, z(t), \bar{u}(t), \psi(t))\Delta z(t) + o_2(||\Delta z(t)||^2).$$

Далее, из (5) следует, что $\Delta z(t)$ является решением линеаризованной системы

$$\Delta z(t) = \int_{t_0}^{t} K(t, s) f_z[s]\Delta z(s)ds + \int_{t_0}^{t} K(t, s)\Delta_{\bar{u}(s)} f[s]ds + \eta_2(t; \Delta u), \qquad (10)$$

где по определению

$$\eta_2(t; \Delta u) = \int_{t_0}^{t} K(t, s)\Delta_{\bar{u}(s)} f_z[s]\Delta z(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} K(t, s) o_3(||\Delta z(s)||)\, ds.$$

Здесь векторная величина $o_3(||\Delta z(t)||)$ определяется из разложения

$$f(s, \bar{z}(s), \bar{u}(s)) - f(s, z(s), \bar{u}(s)) = f_z(s, z(s), \bar{u}(s)) + o_3(||\Delta z(s)||).$$

Интерпретируя уравнение (10) как линейное неоднородное интегральное уравнение типа Вольтерры относительно $\Delta z(t)$, его решение можно представить в следующем виде [14, 15]:

$$\Delta z(t) = \int_{t_0}^{t} N(t, s)\Delta_{\bar{u}(s)} f[s]ds + \eta_3(t; \Delta u), \qquad (11)$$

где по определению

$$N(t,s)=K(t,s)+\int_s^t R(t,\tau)K(\tau,s)d\tau,$$

$$\eta_3(t;\Delta u)=\eta_2(t;\Delta u)+\int_{t_0}^t R(t,s)\eta_2(s,\Delta u)ds.$$

Здесь $R(t,\tau)$ — резольвента матрицы $K(t,s)f_z[s]$, являющаяся решением интегрального уравнения типа Вольтерры

$$R(t,\tau)=\int_\tau^t K(t,s)f_z[s]R(s,\tau)ds+K(t,\tau)f_z[\tau]. \tag{12}$$

Используя представление (11), преобразуем формулу приращения (8). Очевидно, что

$$\Delta z'(t_1)\varphi_{zz}(z(t_1))\Delta z(t_1)=\int_{t_0}^{t_1}(N(t_1,\tau)\Delta_{\bar u(\tau)}f[\tau])'\varphi_{zz}(z(t_1))\eta_3(t_1,\Delta u)d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\Delta_{\bar u(\tau)}f'[\tau]N'(t_1,\tau)\varphi_{zz}(z(t_1))N(t_1,s)\Delta_{\bar u(s)}f[s]dsd\tau+$$

$$+\eta'_3(t_1;\Delta u)\varphi_{zz}(z(t_1))\Delta z(t_1). \tag{13}$$

Далее, применяя формулу Дирихле [16, с. 136], получаем

$$\int_{t_0}^{t_1}\Delta_{\bar u(t)}H'_z[t]\Delta z(t)dt=\int_{t_0}^{t_1}\Delta_{\bar u(t)}H'_z[t]\eta_3(t;\Delta u)dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_t^{t_1}\Delta_{\bar u(s)}H'_z[s]N(s,t)ds\right]\Delta_{\bar u(t)}f[t]dt. \tag{14}$$

Наконец, используя известное тождество из [17, с. 204], по схеме работ [11, 12] имеем

$$\int_{t_0}^{t_1}\Delta z'(t)H_{zz}[t]\Delta z(t)dt=\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_0}^{t}\Delta_{\bar u(s)}f'[s]N'(t,s)ds\right)H_{zz}[t]\eta_3(t;\Delta u)dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\eta'_3(t;\Delta u)H_{zz}[t]\Delta z(t))dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\Delta_{\bar u(\tau)}f'[\tau]\left\{\int_{\max(\tau,s)}^{t_1}N'(t,\tau)H_{zz}[t]N(t,s)dt\right\}\Delta_{\bar u(s)}f[s]dsd\tau. \tag{15}$$

Учитывая соотношения (13)–(15) и полагая

$$M(\tau,s)=-N'(t_1,\tau)\varphi_{zz}(z(t_1))N(t_1,s)+\int_{\max(\tau,s)}^{t_1}N'(t,\tau)H_{zz}[t]N(t,s)dt, \tag{16}$$

формулу приращения (8) функционала качества (3) запишем в виде

$$\Delta S(u)=-\int_{t_0}^{t_1}\Delta_{\bar u(t)}H[t]dt-\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_t^{t_1}\Delta_{\bar u(s)}H'_z[s]N(s,t)ds\right]\Delta_{\bar u(t)}f[t]dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\Delta_{\bar u(\tau)}f'[\tau]M(\tau,s)\Delta_{\bar u(s)}f[s]dsd\tau+\eta(\Delta u). \qquad (17)$$

Здесь по определению

$$\eta(\Delta u)=\eta_1(\Delta u)-\int_{t_0}^{t_1}\Delta_{\bar u(t)}H'_z[t]\eta_3(t;\Delta u)dt-\frac{1}{2}\eta'_3(t_1;\Delta u)\varphi_{zz}(z(t_1))\Delta z(t_1)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(N(t_1,\tau)\Delta_{\bar u(\tau)}f[\tau])'\varphi_{zz}(z(t_1))\eta_3(t_1;\Delta u)d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_0}^{t}\Delta_{\bar u(s)}f'[s]N'(t,s)ds\right)H_{zz}[t]\eta_3(t;\Delta u)dt-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\eta'_3(t;\Delta u)H_{zz}[t]\Delta z(t)dt.$$

Далее необходима оценка для $||\Delta z(t)||$. С помощью одномерной леммы Гронуолла [18] доказывается, что

$$||\Delta z(t)||\le L_1\int_{t_0}^{t_1}||\Delta_{\bar u(\tau)}f[\tau]||d\tau,\ \ t\in T\ \ (L_1=\text{const}>0). \qquad (18)$$

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Формула приращения (17) функционала качества (3) существенно отличается от аналогичной формулы приращения из [7] для случая системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В формуле (3) нет явной зависимости от приращения траектории, что позволяет получить разнообразные необходимые условия оптимальности первого и второго порядка с единых позиций.

Считая $u(t)$ оптимальным управлением, его специальное приращение определим по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t)=\begin{cases}v-u(t), & t\in[\theta,\theta+\varepsilon),\\ 0, & t\in T\setminus[\theta,\theta+\varepsilon).\end{cases} \qquad (19)$$

Здесь $\theta\in[t_0,t_1)$ — произвольная точка непрерывности оптимального управления $u(t)$, $v\in U$ — произвольный вектор, $\varepsilon>0$ — произвольное, достаточно малое число, такое, что $\theta+\varepsilon<t_1$.

Обозначим $\Delta z_\varepsilon(t)$ специальное приращение траектории $z(t)$, соответствующее приращению (19) управления.

Из (18) сразу следует

$$||\Delta z_\varepsilon(t)||\le L_2\varepsilon,\quad t\in T,\quad L_2=\text{const}>0. \qquad (20)$$

Принимая во внимание оценку (20) и формулу (19), в (17) приходим к разложению

$$\Delta S_\varepsilon(u)=S(u+\Delta u_\varepsilon)-S(u)=-\varepsilon\Delta_v H[\theta]+o(\varepsilon).$$

Отсюда следует условие максимума Понтрягина [1–4] для рассматриваемой задачи: для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в задаче (1)–(3) необходимо, чтобы неравенство

$$\Delta_v H[\theta] \le 0 \tag{21}$$

выполнялось для всех $v \in U$ и $\theta \in [t_0, t_1)$.

Неравенство (21) является необходимым условием оптимальности первого порядка. Рассмотрим случай вырождения условия (21).

По аналогии с [7] введем следующее определение.

Определение 1. Допустимое управление $u(t)$ назовем особым, в смысле принципа максимума Понтрягина, в задаче (1)–(3), если для всех $v \in U$ и $\theta \in [t_0, t_1)$ имеем

$$\Delta_v H[\theta] = 0 . \tag{22}$$

Из определения ясно, что для особых управлений условие максимума Понтрягина, вырождаясь, выполняется тривиальным образом и поэтому теряет содержательные значение. Поэтому нужно сформулировать новые необходимые условия оптимальности, позволяющие выявлять (хотя бы в принципе) неоптимальность особых управлений.

Формула приращения второго порядка (17) критерия качества (3) позволяет получить различные необходимые условия оптимальности особых управлений.

Пусть $u(t)$ — особое, в смысле принципа максимума Понтрягина, управление. Его специальное приращение определим по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{m} \delta u(t, \varepsilon; \theta_i, l_i, v_i). \tag{23}$$

Здесь m — произвольное натуральное число, $\theta_i \in [t_0, t_1)$, $i = \overline{1, m}$ ($t_0 \le \theta_1 \le \le \theta_2 \le \ldots \le \theta_m < t_1$) — произвольные точки непрерывности управления $u(t)$, $v_i \in U$, $i = \overline{1, m}$, — произвольные векторы, $l_i \ge 0$, $i = \overline{1, m}$, — произвольные действительные числа, $\varepsilon > 0$ — произвольное достаточно малое число, такое, что $\theta_m + l_m \varepsilon < t_1$, а $\delta u(t, \varepsilon; \theta_i, l_i, v_i)$ — игольчатая вариация управления, определяемая формулой

$$\delta u(t, \varepsilon; \theta_i, l_i, v_i) = \begin{cases} v_i - u(t), & t \in [\theta_i, \ \theta_i + l_i \varepsilon), \\ 0, & t \in T \setminus [\theta_i, \theta_i + l_i \varepsilon). \end{cases} \tag{24}$$

Суммирование игольчатых вариаций (24) понимается в смысле [19, 20]. А именно: если $\theta_1 \ne \theta_2$, то суммой игольчатых вариаций $\delta u(t, \varepsilon; \theta_1, l_1, v_1)$, $\delta u(t, \varepsilon; \theta_2, l_2, v_2)$ считается вариация вида

$$\Delta u_\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{2} \delta u(t, \varepsilon; \theta_i, l_i, v_i) = \begin{cases} v_i - u(t), & t \in [\theta_i, \theta_i + l_i \varepsilon), \\ 0, & t \in T \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{2} [\theta_i, \theta_i + l_i \varepsilon). \end{cases}$$

Если $\theta_1 = \theta_2$, то суммой игольчатых вариаций $\delta u(t, \varepsilon; \theta_i, l_i, v_i)$, $i = 1, 2$, считается вариация вида

$$\Delta u_\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{2} \delta u(t, \varepsilon; \theta_i, l_i, v_i) = \begin{cases} v_1 - u(t), & t \in [\theta_1, \theta_1 + l_1 \varepsilon), \\ v_2 - u(t), & t \in [\theta_1 + l_1 \varepsilon, \theta_1 + (l_1 + l_2) \varepsilon), \\ 0, & t \in T \setminus [\theta_1, \theta_1 + (l_1 + l_2) \varepsilon). \end{cases}$$

Обозначим $\Delta z_\varepsilon(t_i, \theta_i, l_i, v_i)$ специальное приращение траектории $z(t)$, соответствующее приращению (23) управления $u(t)$.

Из оценки (18) следует

$$\|\Delta z_\varepsilon(t; \theta_i, l_i, v_i)\| \le L_3 \varepsilon, \quad L_3 = \text{const} > 0\,. \tag{25}$$

Принимая во внимание (22), (23), (25) в (17), после некоторых преобразований приходим к разложению

$$\Delta S_\varepsilon(u) = S(u + \Delta u_\varepsilon) - S(u) = -\frac{\varepsilon^2}{2}\left\{ \sum_{i,j=1}^{m} l_i l_j \Delta_{v_i} f'[\theta_i] M(\theta_i, \theta_j) \Delta_{v_j} f[\theta_j] + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{m} l_i \Delta_{v_i} H'_z[\theta_i] \left[l_i N(\theta_i, \theta_i) \Delta_{v_i} f[\theta_i] + 2\sum_{j=1}^{i-1} l_j N(\theta_i, \theta_j) \Delta_{v_j} f[\theta_j] \right] \right\} + o(\varepsilon^2)\,.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что вдоль особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, оптимального управления $u(t)$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{m} l_i l_j \Delta_{v_i} f'[\theta_i] M(\theta_i, \theta_j) \Delta_{v_j} f[\theta_j] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} l_i \Delta_{v_i} H'_z[\theta_i] \left[l_i N(\theta_i, \theta_i) \Delta_{v_i} f[\theta_i] + 2\sum_{j=1}^{i-1} l_j N(\theta_i, \theta_j) \Delta_{v_i} f[\theta_j] \right] \le 0. \tag{26}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. Для оптимальности особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления $u(t)$ в задаче (1)–(3) необходимо, чтобы для любого натурального числа m неравенство (26) выполнялось для всех $v_i \in U$, $l_i \ge 0$,

$$\theta_i \in [t_0, t_1), \; i = \overline{1, m} \quad (t_0 \le \theta_1 \le \theta_2 \le \ldots \le \theta_m < t_1).$$

Необходимое условие оптимальности (26) относится к классу многоточечных необходимых условий оптимальности. Заметим, что многоточечные необходимые условия оптимальности особых управлений позволяют существенно сузить [8–10] множество особых управлений, подозрительных на оптимальность. Обзор работ, посвященных получению многоточечных необходимых условий оптимальности особых управлений для различных задач оптимального управления, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями математической физики, приведен в [8–13].

При $m = 1$ из теоремы 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 2. Вдоль особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, оптимального управления $u(t)$ неравенство

$$\Delta_v f'[\theta] M[\theta, \theta] \Delta_v f[\theta] + \Delta_z H'_z[\theta] N[\theta, \theta] \Delta_v f[\theta] \le 0 \tag{27}$$

выполняется для всех $v \in U$ и $\theta \in [t_0, t_1)$.

Неравенство (27) — аналог необходимого условия оптимальности Р. Габасова [7], полученный для задачи управления, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений методом матричных импульсов.

В заключение отметим, что условие оптимальности (26) остается в силе также при вырождении необходимого условия оптимальности (27).

В задаче оптимального управления, описываемой системой интегральных уравнений типа Вольтерры, установлены многоточечные необходимые условия оптимальности особых управлений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1965. — 628 с.
2. Винокуров В.Р. Оптимальное управление системами, описываемыми интегральными уравнениями // Изв. вузов. Сер. мат. — 1967. — № 7. — С. 21–33
3. Sheng-Chao Huang. Optimal control problems with a system of integral equations and restricted phase coordinates // Siam J. Control. — 1972. — **10**, N 2. — P. 14–36.
4. Carlson D.A. An elementary proof of maximum principle for optimal problems governed by Volterra integral equations // J. Optim. Theory and Appl. — 1987. — **54**, N 1. — P. 113–124.
5. Монастырский М.А. Оптимальное управление системами, описываемыми интегральными уравнениями Вольтерра // Автоматика и телемеханика. — 1975. — № 1. — С. 29–36.
6. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1969. — 391 с.
7. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. — М.: Наука, 1973. — 256 с.
8. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности второго порядка (обзор). — Минск, 1982. — 48 с. — (Препр. / ИМ АН БССР; № 30 (155)).
9. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности второго порядка для систем с распределенными параметрами. — Минск, 1982. — 31 с. — (Препр. / ИМ АН БССР; № 31 (156)).
10. Мансимов К.Б., Марданов М. Дж. Особые управления в системах с распределенными параметрами. — Баку, 2004. — 48 с. — (Препр. / ИК НАН Азербайджана).
11. Мансимов К.Б. К теории необходимых условий оптимальности в задаче с распределенными параметрами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2001. — **41**, № 10. — С. 1505–1520.
12. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. — Баку: ЭЛМ, 1999. — 174 с.
13. Меликов Т.К. Особые управления в системах с последействием. — Баку: ЭЛМ, 2002. — 188 с.
14. Смирнов В.И. Курс высшей математики. — М.: Наука, 1974. — **4**, ч. I. — 336 с.
15. Чикрий А.А., Чикрий Г.Ц., Волянский К.Ю. Квазилинейные позиционные интегральные игры сближения // Проблемы управления и информатики. — 2001. — № 6. — С. 5–28.
16. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
17. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978. — 498 с.
18. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1988. — 580 с.
19. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. — Минск: БГУ, 1981. — 400 с.
20. Гороховик С.Я. Необходимые условия оптимальности в задаче с подвижным правым концом траектории // Дифференц. уравнения. — 1975. — № 10. — С. 1765–1773.

Поступила 19.09.2012