УДК 517.954:532.546

В.М. БУЛАВАЦКИЙ

ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ НЕРАВНОВЕСНЫХ ГЕОМИГРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ И ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Аннотация. Приведены аналитические решения краевых задач с нелокальными граничными условиями для двух дробно-дифференциальных математических моделей динамики неравновесного во времени геомиграционного процесса. Рассмотрены модели, базирующиеся на уравнениях с производными дробного порядка Капуто и Хильфера.

Ключевые слова: математическое моделирование, локально-неравновесные во времени процессы геомиграции, дробно-дифференциальные математические модели, системы дробно-дифференциальных уравнений, производные Капуто и Хильфера, краевые задачи, нелокальные граничные условия.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи математического моделирования динамики геомиграционных процессов представляют интерес, в частности, в связи с созданием новых геотехнологий для добычи полезных ископаемых, а также обеспечением условий экологически безопасной эксплуатации различных гидротехнических сооружений. В настоящее время математическое моделирование геомиграционных процессов, являясь одним из важнейших предметных направлений геоинформатики, развивается преимущественно в рамках классических постановок задач, характерных для теории сплошной среды, на основе общепринятых методов и подходов математической физики [1, 2]. Однако создание современных технологий, имеющих целью функционирование в сложных горно-геологических условиях, где существенным образом проявляются эффекты неравновесности геомиграционных процессов [3], требует дальнейшего развития и уточнения моделей и методов моделирования указанных процессов. Проявляющиеся в сложных горно-геологических условиях эффекты неравновесности обусловлены рядом причин объективного характера (сложность структуры среды, микронеоднородность, кавернозность и др. [4]). Попытки учесть указанные эффекты при описании динамики процессов переноса в геопористой среде стимулируют разработку методов математического моделирования геомиграционных процессов в локально-неравновесных условиях.

Следует отметить, что значительный прогресс в области математического моделирования процессов переноса в неравновесных условиях функционирования связан с использованием формализма интегро-дифференцирования дробного порядка [5–8]. Поскольку во многих случаях систем со сложной пространственно-временной структурой математические модели переноса базируются на дифференциальных уравнениях дробного порядка, они описывают процессы, являющиеся нелокальными во времени и (или) пространстве. Результаты по математическому моделированию обобщенных процессов переноса в пористых средах на основе дробно-дифференциальных математических моделей широко представлены в специальной литературе. Не имея возможности изложить полный обзор существующих публикаций, отметим работы [9–17].

Как правило, математическое моделирование геомиграционных процессов выполняется в предположении насыщенности массивов геопористой среды чистой водой, однако в настоящее время особую актуальность приобретают исследования в области математического моделирования динамики указанных процессов в пористых средах (в частности, фрактальной структуры), насыщенных солевыми растворами, что в значительной мере обусловлено рядом проблем экологии, например задачами охраны грунтов и грунтовых вод от загрязнений токсичным содержимым поверхностных накопителей промышленных и бытовых стоков.

В связи с этим в работе [14] построена и изучена дробно-дифференциальная математическая модель локально-неравновесного во времени фильтрационно-консолидационного процесса в геомассиве, насыщенном солевым раствором и находящемся в изотермических условиях. Обобщение указанной модели на случай временной нелокальности, описываемой дробно-дифференциальными уравнениями переменного порядка, выполнено в [15]. Учет неизотермичности условий протекания геомиграционного процесса произведен в [16], временной и пространственной нелокальностей одновременно — в работе [17].

В настоящей статье построены новые математические модели для исследования динамики изотермического фильтрационно-консолидационного процесса (с учетом осмоса и ультрафильтрации) в насыщенной солевым раствором глинистой геопористой среде в условиях сильной временной нелокальности, базирующиеся на системе дробно-дифференциальных уравнений с производными в смысле Капуто либо Хильфера. В рамках этих моделей получены аналитические решения соответствующих одномерных краевых задач с нелокальными граничными условиями для случаев фильтрационной консолидации насыщенных солевыми растворами глинистых оснований конечной мощности.

ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ЛОКАЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНОГО ВО ВРЕМЕНИ ГЕОМИГРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА

Рассматривая одномерную по геометрической переменной математическую модель локально-неравновесного во времени геомиграционного (в частности, фильтрационно-консолидационного) процесса в насыщенной солевым раствором геопористой среде, будем исходить из следующего обобщения классических законов Дарси и Фика на случай наличия осмоса и ультрафильтрации:

$$u_x = D_t^{1-\alpha}\frac{\partial}{\partial x}(-kH+\nu C), \tag{1}$$

$$q_C = D_t^{1-\alpha}\left(-d\frac{\partial C}{\partial x}+CJ_t^{1-\alpha}u_x+\gamma d_u\frac{\partial H}{\partial x}\right). \tag{2}$$

Здесь u_x — скорость геофильтрации, $H = p/\gamma$ — избыточный напор, p — поровое давление, γ — удельный вес жидкости, C — концентрация солей в жидкой фазе, k — коэффициент фильтрации, ν — коэффициент химического осмоса, q_C — диффузионный поток, d — коэффициент конвективной диффузии, d_u — коэффициент ультрафильтрации (обратноосмотический эффект), $J_t^{1-\alpha}$ — дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка $1-\alpha$ $(0<\alpha\le 1)$, $D_t^{1-\alpha}$ — оператор дробного дифференцирования Римана–Лиувилля того же порядка по переменной t [5–8].

Отсюда, с учетом уравнения неразрывности фильтрационного потока и соотношения баланса массы солей в жидкой фазе [18], получаем систему уравнений модели в виде

$$D_t^{(\alpha)}H = C_v\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}-\mu\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \tag{3}$$

$$\sigma D_t^{(\alpha)}C = d\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial}{\partial x}(kH-\nu C)\right)-\gamma d_u\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \tag{4}$$

где σ — пористость геосреды, $\mu = \frac{\nu C_v}{k}$, C_v — коэффициент консолидации геопористого массива, $D_t^{(\alpha)}$ — оператор регуляризованной дробной производной Капуто порядка α по переменной t [5–8].

Далее будем рассматривать локально-неравновесный во времени фильтрационно-консолидационный процесс в глинистом геопористом массиве, насыщенном солевым раствором. В этом случае, ввиду малых скоростей фильтрации поровой жидкости в уплотняющейся глинистой среде, пренебрегаем в первом приближении конвективной составляющей в неклассическом уравнении конвективной диффузии (4). В результате такой линеаризации получаем дробно-дифференциальную математическую модель для описания динамики локально-неравновесного во времени фильтрационно-консолидационного процесса (с учетом осмоса и ультрафильтрации) в насыщенном солевым раствором глинистом основании, базирующуюся на следующей системе уравнений:

$$D_t^{(\alpha)} H = C_v \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \tag{5}$$

$$\sigma D_t^{(\alpha)} C = d \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \gamma d_u \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}. \tag{6}$$

В частности, при $\alpha \to 1$ из уравнений (5) и (6) дробно-дифференциальной математической модели получаем систему уравнений динамики равновесного процесса геомиграции в классической постановке [19]

$$\frac{\partial H}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \tag{7}$$

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} = d \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \gamma d_u \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}. \tag{8}$$

В рамках фильтрационно-консолидационной модели, описываемой системой уравнений (7), (8), к настоящему времени известны решения основных краевых задач теории консолидации насыщенных пористых сред с классическими локальными граничными условиями [19].

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ

В предположениях дробно-дифференциальной математической модели моделирование динамики локально-неравновесного во времени изотермического консолидационного процесса при фильтрации солевого раствора в глинистой геопористой среде в случае, например, массива конечной мощности l с проницаемой верхней гранью и равенством потоков на гранях сводится к решению в области $(0, l) \times (0, \infty)$ системы уравнений (5), (6) при следующих краевых условиях:

$$H(0, t) = 0, \; H_x(0, t) = H_x(l, t), \tag{9}$$

$$C(0, t) = C_0, \quad C_x(0, t) = C_x(l, t), \tag{10}$$

$$H(x, 0) = h(x), \quad C(x, 0) = C_s(x), \tag{11}$$

где $h(x), C_s(x)$ — заданные функции начального избыточного напора в массиве и начальной концентрации, C_0 — заданное значение концентрации солей на входе фильтрационного потока.

Отметим, что неклассические (нелокальные) граничные условия (9), (10) математически выражают равенство потоков жидкости и концентрации на гранях рассматриваемого массива при одновременном задании значений напора и концентрации на одной из его граней и известны как условия Самарского–Ионкина [20, 21].

Введем в рассмотрение безразмерные переменные и параметры соотношениями

$$x' = \frac{x}{l}, \; t' = \left(\frac{C_v}{l^2}\right)^{1/\alpha} t, \quad C' = \frac{C}{C_0}, \quad H' = \frac{H}{H_0}, \quad h' = \frac{h}{H_0}, \quad C_s' = \frac{C_s}{C_0},$$

$$\mu' = \frac{\mu C_0}{C_v H_0}, \quad a_1' = \frac{a_1}{C_v}, \quad a_2' = \frac{a_2 H_0}{C_v C_0}, \tag{12}$$

где $a_1 = \dfrac{d}{\sigma}, \quad a_2' = \dfrac{\gamma d_u}{\sigma}, \; H_0 = \text{const}.$

Переходя в соотношениях (5), (6), (9)–(11) к безразмерным переменным согласно соотношениям (12) и опуская в дальнейшем знак «штрих» над безразмерными величинами, получаем следующую краевую задачу:

$$D_t^{(\alpha)} H = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \tag{13}$$

$$D_t^{(\alpha)} C = a_1 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - a_2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \tag{14}$$

$$H(0, t) = 0, \quad H_x(0, t) = H_x(1, t), \tag{15}$$

$$C(0, t) = 1, \quad C_x(0, t) = C_x(1, t), \tag{16}$$

$$H(x, 0) = h(x), \quad C(x, 0) = C_s(x). \tag{17}$$

Умножая уравнение (13) на неопределенный действительный коэффициент q и сложив полученный результат с (14), получаем

$$D_t^{(\alpha)} (qH + C) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ((q - a_2) H + (a_1 - \mu q) C)\,. \tag{18}$$

Положим в (18)

$$q - a_2 = qr, \ \ a_1 - \mu q = r, \tag{19}$$

где r — некоторая действительная постоянная, определяемая ниже.

Из соотношений (19) имеем квадратное уравнение для определения r

$$r^2 - (1 + a_1) r + a_1 - \mu a_2 = 0, \tag{20}$$

откуда

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} (1 + a_1 \pm \sqrt{\Delta}), \quad \Delta = (1 - a_1)^2 + 4 \mu a_2 > 0\,. \tag{21}$$

При этом корням $r = r_i$ $(i = 1, 2)$ соответствуют два значения q: $q_i = \dfrac{a_2}{1 - r_i}$ $(r_i \neq 1, \ i = 1, 2)$.

Положим

$$\psi_i (x, t) = q_i H(x, t) + C(x, t) \ \ (i = 1, 2). \tag{22}$$

С учетом (18), (19), (22) получаем для отыскания неизвестных функций ψ_i $(i = 1, 2)$ совокупность уравнений

$$D_t^{(\alpha)} \psi_i = r_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} \ \ (i = 1, 2). \tag{23}$$

Соответствующие (23) краевые условия принимают вид

$$\psi_i (0, t) = 1, \ \psi_{i_x} (0, t) = \psi_{i_x} (1, t) \ \ (i = 1, 2), \tag{24}$$

$$\psi_i (x, 0) = q_i h(x) + C_s (x) \ \ (i = 1, 2)\,. \tag{25}$$

Следует отметить, что для физической корректности рассматриваемых задач необходимо выполнение условий $r_i > 0$ $(i = 1, 2)$. Неравенство $r_1 > 0$ очевидно выполнено, а неравенство $r_2 > 0$ имеет место при $\nu \gamma d_u < kd$.

Приведем граничные условия в точке $x = 0$ к соответствующим однородным условиям с помощью подстановки

$$u_i (x, t) = \psi_i (x, t) + x - 1 \ \ (i = 1, 2)\,. \tag{26}$$

Тогда задачи (23)–(25) перепишутся в виде

$$D_t^{(\alpha)} u_i = r_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \ \ (i = 1, 2), \tag{27}$$

$$u_i(0,t)=0,\ u_{i_x}(0,t)=u_{i_x}(1,t)\ \ (i=1,2), \tag{28}$$

$$u_i(x,0)=\theta_i(x)\ \ (i=1,2), \tag{29}$$

где $\theta_i(x)=x-1+q_i h(x)+C_s(x)$.

Задачи (27)–(29) — аналог задачи Самарского–Ионкина применительно к уравнениям дробного порядка. Для их решения используем подход, предложенный в [20, 21] для классического уравнения теплопроводности.

Согласно указанному подходу решение задач (27)–(29) ищем в виде следующих биортогональных рядов:

$$u_i(x,t)=\omega_0^{(i)}(x)X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[w_k^{(i)}(t)X_{2k-1}(x)+\omega_k^{(i)}(t)X_{2k}(x)]\ \ (i=1,2), \tag{30}$$

где $X_0(x)=x,\ X_{2k}(x)=\sin(\sqrt{\lambda_k}x)$ — собственные функции спектральной задачи

$$X''(x)+\lambda X(x)=0\quad (0<x<1), \tag{31}$$

$$X(0)=0,\ X'(0)=X'(1), \tag{32}$$

соответствующие собственным значениям $\lambda_k=(2\pi k)^2$.

Присоединенные функции $X_{2k-1}(x)$, соответствующие собственным значениям λ_k, имеют вид $X_{2k-1}(x)=x\cos(\sqrt{\lambda_k}x)$ [20]. Отметим также, что, как показано в [21], система собственных и присоединенных функций сопряженной к (31), (32) задачи записывается в виде

$$Y_0(x)=2,\ Y_{2k-1}(x)=4\cos(\sqrt{\lambda_k}x),\ Y_{2k}(x)=4(1-x)\sin(\sqrt{\lambda_k}x)\,.$$

Разложив в биортогональные ряды начальные функции $\theta_i(x)$,

$$\theta_i(x)=\zeta_0^{(i)}X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[\eta_k^{(i)}X_{2k-1}(x)+\zeta_k^{(i)}X_{2k}(x)]\quad (i=1,2), \tag{33}$$

где

$$\zeta_k^{(i)}=(\theta_i(x),Y_{2k}(x))\ \ (k=0,1,2,\ldots;\ i=1,2),$$

$$\eta_k^{(i)}=(\theta_i(x),Y_{2k-1}(x))\ \ (k=1,2,\ldots;\ i=1,2),$$

на основании (27), (29) получим для определения функций $\omega_k^{(i)}(t)$ $(k=0,1,2,\ldots;\ i=1,2)$ и $w_k^{(i)}(t)$ $(k=1,2,\ldots;\ i=1,2)$ следующие задачи:

$$D_t^{(\alpha)}\omega_0^{(i)}(t)=0,\ \omega_0^{(i)}(0)=\zeta_0^{(i)}\quad (i=1,2), \tag{34}$$

$$D_t^{(\alpha)}w_k^{(i)}(t)+r_i\lambda_k w_k^{(i)}(t)=0,\ w_k^{(i)}(0)=\eta_k^{(i)}\quad (k=1,2,\ldots;\ i=1,2), \tag{35}$$

$$D_t^{(\alpha)}\omega_k^{(i)}(t)+r_i\lambda_k\omega_k^{(i)}(t)=-2r_i\sqrt{\lambda_k}w_k^{(i)}(t),\ \omega_k^{(i)}(0)=\zeta_k^{(i)}\ (k=1,2,\ldots;\ i=1,2). \tag{36}$$

С учетом [5, 6] решения задач (34)–(36) запишем в виде

$$\omega_0^{(i)}(t)=\zeta_0^{(i)},\ w_k^{(i)}(t)=\eta_k^{(i)}E_\alpha(-r_i\lambda_k t^\alpha), \tag{37}$$

$$\omega_k^{(i)}(t)=\zeta_k^{(i)}E_\alpha(-r_i\lambda_k t^\alpha)-2r_i\sqrt{\lambda_k}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-r_i\lambda_k(t-\tau)^\alpha)w_k^{(i)}(\tau)d\tau \tag{38}$$

$$(k=1,2,\ldots;\ i=1,2),$$

где $E_\alpha(z)$, $E_{\alpha,\alpha}(z)$ — соответственно функция Миттаг–Леффлера и обобщенная функция Миттаг–Леффлера [5–8].

Таким образом, решение задач (27)–(29) определяется соотношениями (30), где функции $\omega_0^{(i)}(t)$, $\omega_k^{(i)}(t)$, $w_k^i(t)$ $(k=1,2,\ldots;\ i=1,2)$ определяются соотношениями (37), (38). Относительно условий сходимости рядов (30) необходимо отметить следующее. Пусть для функций $\theta_i(x)$ $(i=1,2)$ имеют место свойства: $\theta_i(x)\in C^2[0,1]$, $\theta_i(0)=0$, $\theta_i'(0)=\theta_i'(1)$ $(i=1,2)$. Тогда согласно [22] ряды $\sum_{k=1}^{\infty}(\eta_k^{(i)}+\zeta_k^{(i)})$ $(i=1,2)$ абсолютно сходящиеся. Очевидно, что для $x\in[0,1]$ имеем

$$|S_k^{(i)}(x,t)|\equiv|w_k^{(i)}(t)X_{2k-1}(x)+\omega_k^{(i)}(t)X_{2k}(x)|\le M_1(|w_k^{(i)}(t)|+|\omega_k^{(i)}(t)|) \quad (39)$$

$$(i=1,2,\ \ M_1>0).$$

С учетом асимптотических оценок для функций $E_\alpha(z)$ и $E_{\alpha,\alpha}(z)$ [5–8] из соотношений (37), (38) получаем следующие равномерные по k оценки:

$$|w_k^{(i)}(t)|+|\omega_k^{(i)}(t)|\le M_2(|\eta_k^i|+|\zeta_k^i|)\ \ (i=1,2,\ \ M_2>0). \quad (40)$$

Тогда из (39), (40) находим

$$|S_k^{(i)}(x,t)|< M(|\eta_k^i|+|\zeta_k^i|)\ \ (i=1,2,\ \ M>0). \quad (41)$$

Следовательно, мажорантными для рядов (30) являются абсолютно сходящиеся ряды. Таким образом, ряды (30) сходятся равномерно для $(x,t)\in\overline{D}_T\equiv$ $\equiv[0,1]\times[0,T]$ и $u_i(x,t)\in C(\overline{D}_T)$ $(i=1,2)$. Аналогично устанавливается равномерная сходимость рядов $\sum_{k=1}^{\infty}D_t^{(\alpha)}S_k^{(i)}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial S_k^{(i)}}{\partial x}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2 S_k^{(i)}}{\partial x^2}$ $(i=1,2)$. Для окончательного решения задачи необходимо выполнить переход к функциям напора и концентрации. Указанный переход с учетом (22) осуществляется по формулам

$$H=\frac{\psi_1-\psi_2}{q_1-q_2},\ C=\frac{q_1\psi_2-q_2\psi_1}{q_1-q_2}, \quad (42)$$

$$\psi_i(x,t)=1-x+u_i(x,t)\ \ (i=1,2). \quad (43)$$

Отметим, что решение рассматриваемой задачи для системы (7), (8) (классическая математическая модель равновесного геомиграционного процесса в условиях осмоса и ультрафильтрации) также определяется соотношеними (42), (43), (30), однако с очевидными изменениями:

$$\omega_0^{(i)}(t)=\zeta_0^{(i)},\ \omega_k^{(i)}(t)=(\zeta_k^{(i)}-2r_i\sqrt{\lambda_k}\,\eta_k^{(i)}t)e^{-r_i\lambda_k t},\ w_k^{(i)}(t)=\eta_k^{(i)}e^{-r_i\lambda_k t}$$

$$(k=1,2,\ldots;\ i=1,2). \quad (44)$$

ОБОБЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ГЕОМИГРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА НА ОСНОВЕ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ХИЛЬФЕРА

Обобщим изложенную выше дробно-дифференциальную математическую модель геомиграционного процесса в глинистых средах, вводя в рассмотрение вместо производных по Капуто производные по Хильферу [23]. Отметим, что обобщенная производная Хильфера порядка α $(0<\alpha\le1)$ типа δ $(0\le\delta\le1)$ от функции $u(t)$ по переменной t определяется соотношением [23–25]

$$D_t^{\alpha,\delta}u(t)=J_t^{\delta(1-\alpha)}\frac{d}{dt}J_t^{(1-\delta)(1-\alpha)}u(t)\,, \quad (45)$$

где $J_t^{\alpha} u(t)$ — правосторонний интеграл Римана–Лиувилля порядка α от функции $u(t)$. Поскольку $D_t^{\alpha,1} u(t) \equiv D_t^{(\alpha)} u(t)$ и $D_t^{\alpha,0} u(t) \equiv D_t^{\alpha} u(t)$, оператор (45) определяет непрерывную по параметру μ интерполяцию операторов Римана–Лиувилля и Капуто [23]. Таким образом, применение обобщенных производных Хильфера позволяет описать в рамках единой математической модели некоторый класс неравновесных геомиграционных процессов с параметрически непрерывно изменяемой степенью временной неравновесности.

При использовании понятия дробной производной Хильфера базовые уравнения рассмотренной математической модели неравновесного геомиграционного процесса принимают вид

$$D_t^{\alpha,\delta} H = C_v \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \tag{46}$$

$$\sigma D_t^{\alpha,\delta} C = d \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \gamma d_u \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \tag{47}$$

где сохранены все введенные выше обозначения, причем $D_t^{\alpha,\delta}$ — оператор Хильфера порядка α типа δ [23–25]. В рамках данной модели рассмотрим задачу математического моделирования динамики локально-неравновесного во времени геомиграционного процесса (с учетом химического осмоса и ультрафильтрации) в насыщенном солевым раствором глинистом геомассиве конечной мощности l с проницаемой верхней гранью при равенстве потоков жидкости и концентрации на гранях массива, которая сводится к решению в области $(0, l) \times (0, \infty)$ системы уравнений (46), (47) с условиями

$$H(0, t) = 0, \quad H_x(0, t) = H_x(l, t), \tag{48}$$

$$C(0, t) = 0, \quad C_x(0, t) = C_x(l, t), \tag{49}$$

$$J_t^{(1-\alpha)(1-\delta)} H(x, 0) = h_0(x), \quad J_t^{(1-\alpha)(1-\delta)} C(x,0) = C_0(x), \tag{50}$$

где $h_0(x), C_0(x)$ — начальные значения избыточного напора и концентрации солей в жидкой фазе соответственно. Методика получения решения краевой задачи (46)–(50) кратко состоит в следующем.

Вводя в рассмотрение безразмерные переменные и параметры соотношениями вида (12) и используя описанный при решении задачи (13)–(17) подход, получаем краевые задачи

$$D_t^{\alpha,\delta} \Psi_i = r_i \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x^2} \ (i = 1, 2), \tag{51}$$

$$\Psi_i(0, t) = 0, \quad \Psi_{i_x}(0, t) = \Psi_{i_x}(1, t) \ (i = 1, 2), \tag{52}$$

$$J_t^{(1-\alpha)(1-\delta)} \Psi_{i_x}(x, 0) = \tilde{\theta}_i(x) \ (i = 1, 2), \tag{53}$$

где $\tilde{\theta}_i(x) = q_i h_0(x) + C_0(x)$, $\Psi_i(x, t) = q_i H(x, t) + C(x, t)$ $(i = 1, 2)$.

Представляя согласно [20, 21] решения задач (51)–(53) в виде биортогональных рядов

$$\Psi_i(x, t) = \tilde{\varpi}_0^{(i)}(x) X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [\tilde{w}_k^{(i)}(t) X_{2k-1}(x) + \tilde{\varpi}_k^{(i)}(t) X_{2k}(x)] \quad (i = 1, 2), \tag{54}$$

получаем для определения неизвестных коэффициентов разложения $\tilde{\varpi}_k^{(i)}(t)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2)$ и $\tilde{w}_k^{(i)}(t)$ $(k = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2)$ следующие задачи:

$$D_t^{\alpha,\delta} \tilde{\varpi}_0^{(i)}(t) = 0, \ J_t^{(1-\alpha)(1-\delta)} \tilde{\varpi}_0^{(i)}(0) = \tilde{\zeta}_0^{(i)} \ (i = 1, 2), \tag{55}$$

$$D_t^{\alpha,\delta} \tilde{w}_k^{(i)}(t) + r_i \lambda_k \tilde{w}_k^{(i)}(t) = 0, \ J_t^{(1-\alpha)(1-\delta)} \tilde{w}_k^{(i)}(0) = \tilde{\eta}_k^{(i)} \ (k = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2), \tag{56}$$

$$D_t^{\alpha,\delta}\widetilde{\omega}_k^{(i)}(t)+r_i\lambda_k\widetilde{\omega}_k^{(i)}(t)=-2r_i\sqrt{\lambda_k}\,\widetilde{w}_k^{(i)}(t),\;\; J_t^{(1-\alpha)(1-\delta)}\widetilde{\omega}_k^{(i)}(0)=\widetilde{\xi}_k^{(i)}$$

$$(k=1,2,\ldots;\; i=1,2), \tag{57}$$

где

$$\widetilde{\xi}_k^{(i)}=(\widetilde{\theta}_i(x),Y_{2k}(x))\quad (k=0,1,2,\ldots;\; i=1,2),$$

$$\widetilde{\eta}_k^{(i)}=(\widetilde{\theta}_i(x),Y_{2k-1}(x))\quad (k=1,2,\ldots;\; i=1,2).$$

Решения задач (55)–(57) на основании работ [24–26] имеют вид

$$\widetilde{\omega}_0^{(i)}(t)=\frac{\widetilde{\xi}_0^{(i)}}{\Gamma(\alpha+\delta-\alpha\delta)}\,t^{-(1-\alpha)(1-\delta)}\quad (i=1,2), \tag{58}$$

$$\widetilde{w}_k^{(i)}(t)=\widetilde{\eta}_k^{(i)}t^{-(1-\alpha)(1-\delta)}E_{\alpha,1-(1-\alpha)(1-\delta)}(-r_i\lambda_k t^{\alpha})\;\; (k=1,2,\ldots;\; i=1,2), \tag{59}$$

$$\widetilde{\omega}_k^{(i)}(t)=\widetilde{\xi}_k^{(i)}t^{-(1-\alpha)(1-\delta)}E_{\alpha,1-(1-\alpha)(1-\delta)}(-r_i\lambda_k t^{\alpha})-$$

$$-2r_i\sqrt{\lambda_k}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-r_i\lambda_k(t-\tau)^{\alpha})\widetilde{w}_k^{(i)}(\tau)d\tau\;\; (k=1,2,\ldots;\; i=1,2), \tag{60}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера [1].

Таким образом, решение задачи (46)–(50) в рамках обобщенной модели с производными Хильфера записывается в виде

$$H=\frac{\Psi_1-\Psi_2}{q_1-q_2},\quad C=\frac{q_1\Psi_2-q_2\Psi_1}{q_1-q_2}, \tag{61}$$

где Ψ_i $(i=1,2)$ определяются соотношениями (54), (58)–(60). При этом равномерная сходимость полученных рядов в области $\overline{D}_T$ устанавливается так же, как и выше.

Отметим, что аналогично можно получить решение задачи моделирования динамики локально-неравновесного во времени консолидационного процесса при фильтрации солевого раствора в глинистой геопористой среде и в случае более общих, чем условия (9), (10), граничных условий Самарского–Ионкина [27, 28], в частности при нелокальных условиях вида

$$H(0,t)=0,\quad H_x(0,t)=H_x(1,t)+\gamma H(1,t), \tag{62}$$

$$C(0,t)=0,\;\; C_x(0,t)=C_x(1,t)+\gamma C(1,t), \tag{63}$$

где $\gamma\ge 0$ — вещественный параметр. В этом случае при решении методом Фурье соответствующих краевых задач для уравнений (27) приходим к спектральной задаче (31), (32), где второе из условий (32) заменяется условием $X'(0)=X'(1)+\gamma X(1)$. Решение указанной спектральной задачи получено в [28]. На основании результатов этой работы методика отыскания решения задач (5), (6), (62), (63), (11) сводится к повторению (с необходимыми соответствующими изменениями) выкладок, изложенных выше при решении задачи (13)–(17).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные в настоящей работе результаты позволяют более полно, чем в рамках классической математической модели, охарактеризовать динамику геомиграционных процессов в неравновесных во времени условиях, что способствует повышению степени адекватности моделирования. В отличие от моделирования динамики процесса в рамках классической математической модели применение с указанной целью дробно-дифференциальных математических моделей дает возможность теоретически описывать процессы переноса в существенно локально-неравновесных условиях протекания, в частности, в геопористых средах фрактальной структуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972. — 259 с
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды: В 2 т. — М.: Наука, 1973. — Т. 2. — 584 с.
3. Хасанов М.М., Булгакова Г.Т. Нелинейные и неравновесные эффекты в реологически сложных средах. — Москва–Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. — 288 с.
4. Соболев С.Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса // Успехи физ. наук. — 1997. — **167**, № 10. — С. 1095–1106.
5. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006. — 523 p.
6. Podlubny I. Fractional differential equations. — New York: Acad. Press, 1999. — 341 p.
7. Gorenflo R., Mainardi F. Fractional calculus: integral and differential equations offractional order // Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics / Eds. A. Carpinteri, F. Mainardi. — Wien: Springer-Verlag, 1997. — P. 223–276.
8. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
9. Учайкин В.В. Метод дробных производных. — Ульяновск: Артишок, 2008. — 512 с.
10. Gorenflo R., Mainardi F., Moretti D., Paradisi P. Time fractional diffusion: a discrete random walk approach // Nonlinear Dynamics. — 2002. — **29**, N 1–4. — P. 129–143.
11. Paradisi P., Cesari R., Mainardi F., Tampieri F. The fractional Fick's law for nonlocal transport processes // Physica A. — 2001. — **293**, N 1–2. — P. 130–142.
12. Sun H.G., Chen W. , Li C., Chen Y.Q. Fractional differential models for anomalous diffusion // Ibid. — 2010. — **389**. — P. 2719–2724.
13. Булавацкий В.М. Некоторые математические модели геоинформатики для описания процессов переноса в условиях временной нелокальности // Проблемы управления и информатики. — 2011. — № 3. — С. 128–137.
14. Булавацкий В.М. Математическая модель геоинформатики для исследования динамики локально-неравновесных геофильтрационных процессов // Там же. — 2011. — № 6. — С. 76–83.
15. Булавацкий В.М., Кривонос Ю.Г. Об одной геоинформационной дробно-дифференциальной модели переменного порядка // Там же. — 2012. — № 3. — С. 66–72.
16. Булавацкий В.М. Неклассическая математическая модель геоинформатики для решения задач динамики неравновесных неизотермических геофильтрационных полей // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 6. — С. 79–88.
17. Булавацкий В.М., Кривонос Ю.Г. Математическое моделирование в геоинформационной задаче о динамике процесса геомиграции в условиях пространственно-временной нелокальности // Там же. — 2012. — № 4. — С. 73–82.
18. Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. — Киев: Наук. думка, 1991. — 264 с.
19. Kaczmarek M., Huekel T. Chemo-mechanical consolidation of clays: analytical solution for a linearized one-dimensional problem // Transport in Porous Media. — 1998. — **32**. — P. 49–74.
20. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. — 1977. — **13,** № 2. — С. 294–304.
21. Ионкин Н.И. Об устойчивости одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Там же. — 1979. — **15**, № 7. — С. 1280–1283.
22. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981. — 512 с.
23. Hilfer R. Fractional time evolution // Applications of fractional calculus in physics / Ed. R. Hilfer. — Singapore: World scientific, 2000. — P. 87–130.
24. Hilfer R., Luchko Y., Tomovski Z. Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann–Liouville fractional derivatives // Fraction. Calculus and Appl. Analysis. — 2009. — **12**, N 3. — P. 299–318.
25. Tomovski Z., Hilfer R., Srivastava H.M. Fractional and operational calculus with generalized fractional derivative operators and Mittag–Leffler type functions // Integral Transforms and Special Functions. — 2010. — N 11. — P. 797–814.
26. Sandev T., Metzler R., Tomovski Z. Fractional diffusion equation with a generalized Riemann–Liouville time fractional derivative // J. Physics A. — 2011. — **44**. — P. 5–52.
27. Ионкин Н.И., Моисеев Е.И. О задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. — 1979. — **15**, № 7. — С. 1284–1295.
28. Мокин А.Ю. Об одном семействе начально-краевых задач для уравнения теплопроводности // Там же. — 2009. — **45**, № 1. — С. 123–137.

Поступила 18.12.2012