

КОМБИНАТОРНЫЙ АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА ПРИЗНАКОВ ДЛЯ КЛАССИФИКАЦИИ МНОГОМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

Аннотация. Рассмотрен комбинаторный алгоритм поиска наилучшего набора обобщенных переменных для построения единой структуры моделей объектов классификации по заданным наборам данных на принципах метода группового учета аргументов. Предлагается строить классификатор в пространстве параметров найденной структуры моделей, наилучшим образом представляющих характеристики классифицируемых объектов.

Ключевые слова: классификация, моделирование, комбинаторный алгоритм, критерий селекции.

ВВЕДЕНИЕ

Для задачи классификации важным является вариант, когда объект характеризуется не одиночными измерениями в многомерном пространстве признаков, а их подмножествами, причем для каждого подмножества допускается частичное пересечение объектов из различных классов. Такое условие позволяет при классификации объекта использовать не отдельные точки, а разрабатывать специальные подходы, где возможно оперировать множествами измерений или характеристиками, полученными на основе этих множеств, либо параметрами целесообразных разложений в модельный ряд имеющихся характеристик [1–4].

Цель настоящей статьи — разработка подхода к классификации объектов на основе различения их моделей в пространстве параметров структуры, наилучшим образом представляющей модели объектов классификации.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В области пространства $Q \subset R^M$ исходных признаков $z_1, \dots, z_M$ представлены объекты $d_1, \dots, d_n$, каждый из которых принадлежит одному из классов C_k , $k = 1, \dots, K$, где K — число классов. Объекты $d_1, \dots, d_n$ представлены подмножествами точек (строк) $Z^d = \{Z_j\}_d$ матрицы данных. При этом данные в матрице объект-свойства упорядочены по классам. Обозначим n_k количество объектов

в k -м классе, $n = \sum_{k=1}^K n_k$ — количество объектов в матрице; $N_k = n_k \cdot N_{W(k)}$ — количество точек в k -м классе, если количество точек $N_{W(k)}$ в каждом объекте

k -го класса $d(k)$ одинаково; $N_k = \sum_{i=1}^{n_k} N_{W(k,i)}$, если количество точек $N_{W(k,i)}$

в объектах класса $d(k)$ неодинаково. Здесь $W(k)$, $W(k,i)$ — подмножества точек в соответствующих классах и отдельных объектах k -го класса соответственно. Общее количество точек (строк) в матрице данных составляет

$$N = \sum_{k=1}^K N_k = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} N_{W(k,i)}.$$

Отметим, что для каждого объекта $d(k,i)$ известна не одна, а некоторое подмножество точек $Z^{d(k,i)} = \{Z_j\}_{d(k,i)}$, $j = \sum_{p=1}^{k-1} N_p + \sum_{q=1}^{i-1} N(k,q) + 1, \dots, \sum_{p=1}^{k-1} N_p + \sum_{q=1}^i N(k,q)$, где i — номер объекта в классе k .

Существенным также является то, что в общем случае области $Q_{d_i}, Q_{d_j} \subset Q$, представленные в обучении подмножествами точек $Z^{d_i} = \{\mathbf{Z}_i\}_{d_i}$, $Z^{d_j} = \{\mathbf{Z}_i\}_{d_j}$ и являющиеся объектами d_i и d_j , могут частично пересекаться. Такие объекты в общем случае могут также принадлежать разным классам. Рассмотрим механизм классификации объектов d .

АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ

Особенность задачи заключается в невозможности в общем случае классифицировать объекты d_i и d_j , принадлежащие разным классам, по отдельным точкам $\mathbf{Z}_i$ в исходном пространстве признаков $z_1, \dots, z_M$ ввиду вероятных частичных пересечений областей пространства Q_{d_i}, Q_{d_j} , которым принадлежат множества $Z^{d_i} = \{\mathbf{Z}_i\}_{d_i}$, $Z^{d_j} = \{\mathbf{Z}_i\}_{d_j}$.

Рассмотрим возможные способы решения проблемы.

1. Определим свертку типа $\mathbf{Z}_{d_j} = \sum_{t \in W(k,j)} \theta_t \mathbf{Z}_t$ подмножества точек $Z^{d_j} = \{\mathbf{Z}_i\}_{d_j}$

в некоторую точку $\mathbf{Z}_{d_j}$ таким образом, чтобы она однозначно определяла объект d_j в своем классе k в исходном пространстве признаков $z_1, \dots, z_M$. Нахождение такой свертки должно сопровождаться условиями наилучшей классификации объектов в данном классе сверток.

2. Опишем объект d , который задается подмножеством точек $Z^d = \{\mathbf{Z}_i\}_d$ с неизвестными характеристиками объекта $f_d(\mathbf{z}) = 0$. Тогда число указанных характеристик будет соответствовать числу объектов

$$f_d(\mathbf{z}) = 0, \quad d = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Далее без потери общности рассмотрим случай, когда среди исходных переменных $z_1, \dots, z_M$ возможно выделить выходную переменную y .

Определим новое пространство признаков $\mathbf{x}$, как пространство обобщенных переменных (ОП) $x_1, x_2, \dots, x_{M1}$ исходного пространства $\mathbf{z}$, наилучшим образом представляющих характеристики $f_d(\mathbf{z}) = 0, d = 1, \dots, n$, по исходным множествам точек $Z^d = \{\mathbf{Z}_i\}_d$ уже как линейную свертку по x_i . С точностью до переобозначения характеристик (1) будем находить их в виде

$$y = r_0 + \sum_{i=1}^M r_i \varphi_i(z) = r_0 + \sum_{i=1}^M r_i x_i.$$

Здесь M — размерность нового пространства обобщенных переменных $\mathbf{x}$ для представления объекта d .

Тогда решение задачи классификации переведем в пространство параметров $R = \{r_j\}_{j=0, \dots, M}$ характеристик $y = r_0 + \sum_{i=1}^M r_i x_i$, сопряженное пространству обобщенных переменных $\mathbf{x}$. Это позволит рассматривать объекты d уже не как множества $Z^d = \{\mathbf{Z}_i\}_d$ и не как характеристики $f_d(\mathbf{z}) = 0, d = 1, \dots, n$, а как точки в пространстве параметров R . Отдельные точки $\mathbf{r}_d$ уже однозначно определяют объекты d ввиду отсутствия полностью совпадающих подмножеств точек $Z^d = \{\mathbf{Z}_i\}_d$. В дальнейшем предполагается классифицировать объекты d как точки $\mathbf{r}_d$ в пространстве параметров R .

В настоящей работе рассматривается второй способ построения классификатора. Невозможность применения данного подхода может быть связана с нарушением гипотезы компактности и сопутствующих проблем, сопряженных с выбором меры близости в полученном пространстве R при решении задачи классификации. Однако такие проблемы существуют в любой задаче, и обоснованность такого подхода подтверждается (или не подтверждается) результатами классификации на проверочной и экзаменационной выборках данных.

Близкий по постановке подход рассматривался в задаче диагностики нарушений работы сердечной мышцы при определении признаков как параметров разложения сигнала электрокардиограммы в ортогональный дискретный ряд Кравчука [1]. Другой пример использования указанного подхода в исходном пространстве фазовых координат $\mathbf{z}$ освещен в работах [2, 3], в которых применяются методы классификации для оценки областей параметров устойчивости динамических систем. Такой же подход к нахождению наилучшей структуры параметрического пространства характеристик объектов d предлагается ниже.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В общем случае для перевода задачи классификации в пространство параметров характеристик объектов необходимо найти некоторую структуру или нелинейный базис $\varphi_i(\mathbf{z}) = x_i$, $i = 1, \dots, M$, наилучшим образом представляющий все многомерные зависимости

$$y_d = r_{d0} + \sum_{i=1}^M r_{di} \varphi_i(\mathbf{z}) = r_{d0} + \sum_{i=1}^M r_{di} x_i, \quad d = 1, \dots, n, \quad (2)$$

по экспериментальным данным $Z^d = \{\mathbf{Z}_i\}_d$.

Нахождение моделей оптимальной сложности, формализация понятия «наилучших смыслов» [5] и их корректное использование в структурно-параметрическом синтезе моделей достаточно полно обоснованы в теории индуктивного моделирования и, в частности, в методе группового учета аргументов. Это понятие трактуется как «внешний критерий» (критерий селекции) при выборе наилучшей структуры. Если размерность исходного пространства $\mathbf{z}$ невелика ($M = 2, \dots, 5$) для построения базиса $\varphi_i(\mathbf{z}) = x_i$, $i = 1, \dots, M$, предпочтительным является использование класса комбинаторных алгоритмов метода группового учета аргументов (МГУА), обеспечивающих глобальный оптимум при решении задачи моделирования. Для больших размерностей исходного пространства следует использовать многоярусные алгоритмы.

Ниже рассмотрим задачу классификации, когда $M = 2, \dots, 4$, с использованием для моделирования комбинаторного алгоритма.

Для адаптации алгоритма под данную задачу необходимо:

- доопределить внешний критерий алгоритма для поиска наилучшей общей структуры $\varphi_i(\mathbf{z}) = x_i$, $i = 1, \dots, M$, для всех моделей $d = 1, \dots, n$;
- выбрать рациональный подход к расчету параметров частных моделей с тем, чтобы минимизировать время расчета оптимальной структуры.

ВЫБОР ВНЕШНЕГО КРИТЕРИЯ

Как известно, основной принцип МГУА заключается в том, что параметры моделей рассчитываются на обучающей выборке данных, а наилучшая структура выбирается, исходя из минимума внешнего критерия (критерия селекции) моделей. В данном случае необходимо найти такую наилучшую и общую для всех моделей $d = 1, \dots, n$ структуру $\varphi_i(\mathbf{z}) = x_i$, $i = 1, \dots, M$, которая на получен-

ных по обучающим выборкам параметрах $r_{d0}, \dots, r_{dM}$, $d=1, \dots, n$, наиболее точно в смысле предложенного внешнего критерия (например, критерия регуляризации) представит все объектные модели (2).

Пусть для каждого объекта $d = d(k, i)$ (k — номер класса, i — номер объекта в классе) имеем $W(k) = A(k) + B(k)$, $A(k)$, $B(k)$ — множество рабочих, обучающих и проверочных точек объектов k -го класса; $W = A \cup B$, A , B — рабочее, обучающее и проверочное подмножества точек выборки данных по всем объектам. Тогда количества точек в рабочих, обучающих и проверочных подмножествах выборки данных соответственно определяются как

$$\begin{aligned} N_W &= N_A + N_B, \quad N_A, \quad N_B, \\ N_{W(k)} &= N_{A(k)} + N_{B(k)}, \quad N_{A(k)}, \quad N_{B(k)}, \\ N_{W(k,i)} &= N_{A(k,i)} + N_{B(k,i)}, \quad N_{A(k,i)}, \quad N_{B(k,i)}. \end{aligned}$$

Используем в данной задаче в качестве внешнего критерия скорректированный комбинированный критерий точности

$$Cr = \alpha \cdot \Delta_A^\gamma + (1 - \alpha) \cdot \Delta_B^\gamma,$$

где α — вес ошибок обучающей выборки, $(1 - \alpha)$ — вес ошибок проверочной выборки в критерии точности. Взвешенный в классах коэффициентами γ_k критерий ошибки

$$\Delta_A^\gamma = \sqrt{\frac{\sum_k^K \gamma_k \sum_j^{n_k} \sum_{i \in A(k,j)} (Y_{kji} - \sum_q^M x_{iq} r_{kjq}^A)^2}{\sum_{i \in A} (Y_i)^2}} \quad (3)$$

рассчитан для всех моделей на соответствующих обучающих точках. Взвешенный в классах коэффициентами γ_k критерий ошибки

$$\Delta_B^\gamma = \sqrt{\frac{\sum_k^K \gamma_k \sum_j^{n_k} \sum_{i \in B(k,j)} (Y_{kji} - \sum_q^M x_{iq} r_{kjq}^A)^2}{\sum_{i \in B} (Y_i)^2}} \quad (4)$$

для моделей, найденных на обучающих выборках, рассчитан на соответствующих проверочных точках. Здесь k — индекс класса, j — индекс объекта в классе, i изменяется для всех точек j -го объекта k -го класса на подвыборках A для (3) или B для (4) соответственно.

В формулах использованы центрированные значения переменных, поэтому в моделях отсутствуют свободные члены. В обозначениях вектора параметров r_{kj}^A и отдельного параметра r_{kjq}^A индекс A указывает на то, что параметры найдены на обучающей выборке объекта.

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ЧАСТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Генерация частных структур моделей рассматривается в рамках полного перебора структур (подполиномов полного полинома от M входных переменных и заданной для произведений z_i , $i=1, M$, максимальной степенью p). Такой полный полином имеет вид

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^M a'_i z_i + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a'_{ij} z_i z_j + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M a'_{ijk} z_i z_j z_k + \dots \quad (5)$$

Тогда p определяется максимальным числом произведений в одночленах этой суммы. Количество членов полинома (5) представляет $m = C_{M+p}^M - 1$. Данный полином содержит $q = 2^m - 1$ подполиномов (или частных структур). Выполнить перебор подполиномов полинома (5) возможно, не оптимизируя данный процесс: перебрать все линейные модели, затем все квадратичные модели и т.д. до полиномов степени p . Обозначим структурные элементы полного полинома x_i , $i = 1, \dots, m$, и назовем их обобщенными переменными (ОП).

В новых обозначениях выражение (5) имеет линейный вид

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i x_i.$$

Для нахождения параметров некоторого подполинома используем формулу

$$y = r_0 + \sum_{i=1}^{\tilde{m}} r_i x_i.$$

Для определения параметров некоторого подполинома для соответствующего набора обобщенных переменных x длиной $\tilde{m}$ необходимо сформировать информационную матрицу $(X^T)X_{\tilde{m} \times \tilde{m}}$ и решить систему нормальных уравнений:

$$r = (X^T X)^{-1} X^T Y. \quad (6)$$

При таком подходе количество операций (и время счета) для получения решения (6) пропорционально $\tilde{m}^3$. Однако организовав перебор последовательностями вложенных структур и используя для исключения повторов вычислений при расчете параметров рекуррентные формулы метода наименьших квадратов (МНК), можно на порядок снизить вычислительную сложность (время расчета) в среднем до $\tilde{m}^2$ [5]. Обоснование применения данной схемы перебора с рекуррентным МНК и окаймлением (МНКО) [6] для комбинаторного алгоритма МГУА было предложено в работе [7]. Алгоритм разработан для получения лучшей модели по заданной матрице объект-свойства. Далее используем способ, предложенный в этой работе.

Применение МНКО предполагает организацию перебора таким образом, чтобы для расчета параметров выбирались обобщенные переменные в том порядке, который образует комплекс последовательно вложенных структур (x_{i_1}) , (x_{i_1}, x_{i_2}) , ..., $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$. Способ образования вложенных комплексов аддитивных структур моделей вида $Y_k = r_{d1}x_{i_1} + \dots + r_{d(k-1)}x_{i_{k-1}} + r_{dk}x_{i_k}$, $d = 1, \dots, n$, опирается на графическое представление дерева полного перебора структур моделей. На рис. 1 приведены дерево перебора структур моделей и соответствующие им двоичные векторы (счетчик). При добавлении в последний разряд единицы генерируется справа налево последовательность, которая соответствует пути по дереву перебора. Счетчик устанавливает соответствие между десятичным его значением, как номера модели при обходе дерева, и единицами, как индикаторами (по месту разряда) вхождения в модель соответствующих обобщенных переменных.

Ветви дерева от первого уровня дерева до конечного листа образуют вложенные структуры. Рассмотрим текущее состояние счетчика на той части дерева, которая «растет» от первого уровня до уровня k . Пусть сумма по модулю 2 текущего и последующего состояний счетчика представляет собой значение только

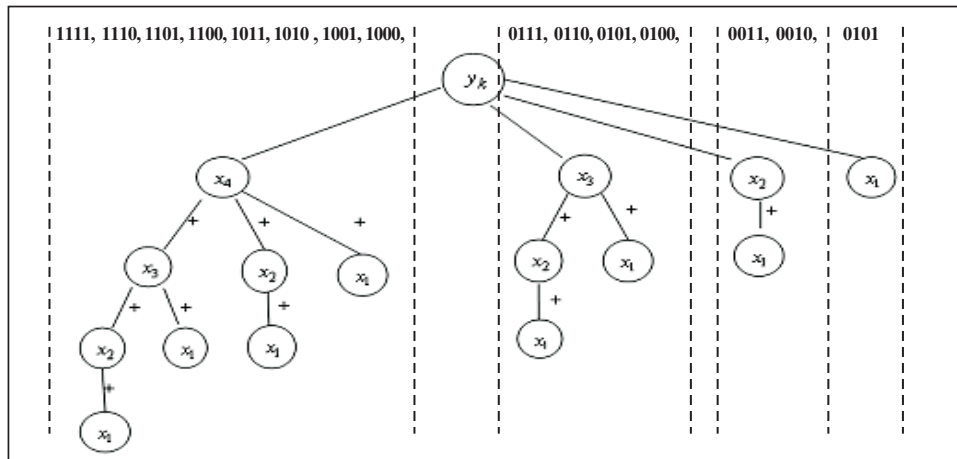


Рис. 1. Дерево перебора аддитивных моделей

с одной единицей в любом разряде. Тогда данные двух последовательных состояний счетчика отражают вложенные структуры, а вершины на дереве удовлетворяют условию смежности и находятся на одной ветви k -го и $(k+1)$ -го уровней дерева. Если сумма отличается от указанного значения, то второе состояние счетчика перебрасывает поиск на другую ветвь дерева. Сумма по модулю 2, представляющая собой состояние счетчика с двумя единицами в любых разрядах, свидетельствует о переходе текущего состояния на соседнюю ветку слева на том же k -м уровне с общим для предыдущего состояния разветвлением дерева на $(k-1)$ -м уровне. Сумма по модулю 2, представляющая собой состояние счетчика с тремя единицами, говорит о переходе текущего состояния на дереве на соседнюю ветку слева на $(k-1)$ -м уровне с общим прапредком предыдущего состояния на данной ветке на $(k-2)$ -м уровне и т.д. Эти свойства позволяют легко определять ветви вложенных структур дерева перебора и «забывать» информацию в узлах для рекуррентного расчета в момент, когда все потомки каждого предка будут рассчитаны.

Для аддитивных вложенных структур, соответствующих ветвям дерева перебора, можно применить для расчета параметров моделей рекуррентность МНКО. В каждой вершине дерева рассчитываются:

- а) информационная и обратная ей матрицы для каждого объекта d ;
- б) вектор параметров моделей r_d на данной структуре обучающих выборок для каждого объекта d ;
- в) значение критерия селекции Cr_i , характеризующее структуру;
- г) число s , равное количеству уже рассчитанных потомков каждого предка.

Таким же образом рассчитываем при обходе каждую вершину дерева $i = 1, \dots, q = 2^m - 1$. Обход дерева заканчивается по достижении текущим состоянием счетчика максимального значения. В завершении выбирается та структура, для которой критерий селекции принимает минимальное значение.

Рассмотрим реализацию МНКО в алгоритме для некоторой ветви дерева перебора.

Пусть на $(k-1)$ -м уровне дерева имеем некоторую аддитивную структуру $x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}$ и рассчитаны соответствующие информационная $A_{k-1} = (X^T X)_{(k-1) \times (k-1)}$ и обратная ей $A_{k-1}^{-1} = (X^T X)^{-1}_{(k-1) \times (k-1)}$ матрицы. Для структуры $x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}, x_k$ следующего k -го уровня дерева перебора известна информационная матрица следующего шага A_k . Рекуррентный расчет параметров $r = A_k^{-1} X^T Y$ модели $Y_k = r_1 x_1 + \dots + r_{k-1} x_{k-1} + r_k x_k$ предполагает соответствующий

рекуррентный механизм расчета матрицы $A_k^{-1} = (X^T X)_{k \times k}$:

$$A_{k-1} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,k-1} \end{bmatrix}.$$

Информационную матрицу A_k следующего шага представим в блочном виде

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{k-1} & u_k \\ v_k & a_{kk} \end{bmatrix},$$

где $v_k = (a_{k,1}, \dots, a_{k,k-1})^T$, $u_k = (a_{k,1}, \dots, a_{k,k-1})$. Тогда

$$A_k^{-1} = \begin{bmatrix} A_{k-1}^{-1} + \frac{A_{k-1}^{-1} u_k v_k A_{k-1}^{-1}}{a_k} & -\frac{A_{k-1}^{-1} u_k}{a_k} \\ -\frac{v_k A_{k-1}^{-1}}{a_k} & \frac{1}{a_k} \end{bmatrix},$$

где $a_k = a_{kk} - v_k A_{k-1}^{-1} u_k$, является частным случаем формулы Фробениуса для блочных матриц.

Отметим возможное сокращение размерности информационной матрицы за счет работы алгоритма в центрированных переменных

$$Y = y - \bar{y}_A, \quad X_{i_k} = x_{i_k} - \bar{x}_{A, i_k}, \quad (7)$$

где индекс A — обучающая подвыборка (далее индекс A опускаем). В полученных моделях свободный член будет равен нулю, а значения критериев для этих моделей равен константе, что позволит и в центрированном виде находить лучшие структуры и модели. После определения лучшей структуры для центрированных переменных моделей $Y^k = r_1^k X_{i_1} + \dots + r_k^k X_{i_k}$ можно осуществлять классификацию непосредственно в параметрическом пространстве центрированного варианта данных. Но при необходимости можно найти свободный член моделей (без пересчета остальных параметров), заменяя центрированные значения переменных исходными и средними их значениями (7). Тогда получим

$$(y - \bar{y}) = r_1^k (x_{i_1} - \bar{x}_{i_1}) + \dots + r_k^k (x_{i_k} - \bar{x}_{i_k}). \quad (8)$$

Из (8) и уравнения $y = r_0^k + r_1^k x_{i_1} + \dots + r_k^k x_{i_k}$ находим $r_0^k = \bar{y} - r_1^k \bar{x}_{i_1} - \dots - r_k^k \bar{x}_{i_k}$. В итоге предлагаемый алгоритм определения структуры параметрического пространства признаков для задачи классификации сводится к следующим этапам.

1. Предобработка данных:
 - 1) формирование матрицы расширенного множества переменных;
 - 2) формирование матрицы обобщенных переменных;
 - 3) переход к матрице центрированных переменных.
2. Формирование информационной матрицы максимального размера.
3. Организация перебора структур с учетом их вложенности на дереве. Для каждой структуры:
 - 1) формируем информационную матрицу данной структуры для каждого объекта d , используя результат п. 2;

2) рассчитываем параметры моделей данной структуры для каждого объекта посредством МНКО;

3) рассчитываем значение критерия селекции структуры.

4. Выбор наилучшей структуры по минимуму значения критерия селекции.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

По результатам работы алгоритма получаем оптимальную структуру $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$ и проводим перерасчет параметров r_d для n моделей

$$Y_k = r_{d1}x_{i_1} + \dots + r_{d(k-1)}x_{i_{k-1}} + r_{dk}x_{i_k}, \quad d = 1, \dots, n,$$

на всей рабочей выборке W матрицы центрированных данных. Полученные параметры r_d формируют матрицу объект-свойства классов $k = 1, \dots, K$ объектов $d = 1, \dots, n$ в пространстве параметров $\mathbf{R}$. В дальнейших исследованиях предполагается анализировать свойства классов в пространстве параметров с тем, чтобы выбрать подходящий алгоритм классификации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен подход к классификации объектов, заданных подмножествами строк матрицы объект-свойства. Подход основан на построении классификаторов в пространстве параметров наилучшей структуры моделей объектов классификации, что позволяет перевести задачу в многомерное пространство, где каждый объект представлен точкой в пространстве параметров своей модели. Для нахождения такой структуры разработана версия комбинаторного алгоритма МГУА. Указанный переход позволяет применить весь набор разработанных в настоящее время методов для многомерной классификации объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Забара С.С., Філімонова Н.Б., Зеленський К.Х. Метод виділення інваріантних ознак сигналів // Доп. НАН України. — 2009. — № 2. — С. 49–55.
2. Редько И.Н. Оценка области глобальной устойчивости уравнения маятникового типа методами теории классификации объектов // 4-я конф. «Нелинейные колебания в механических системах», ННГУ. — Нижний Новгород, 1996. — С. 45–46.
3. Редько И.Н., Шалфеев В.Д. Применение методов теории классификации объектов для оценок областей существования установившихся движений // Вест. ННГУ. Сер. Радиофизика (Нелинейная динамика — синхронизация и хаос), 1998. — Вып. 1. — С. 28–36.
4. Кондрашова Н.В., Павлов В.А., Павлов А.В. Решение задачи медицинской диагностики с применением линейного дискриминантного анализа и МГУА // Управляющие системы и машины. — 2013. — № 2. — С. 79–89.
5. Ивахненко А.Г., Степашко В.С. Помехоустойчивость моделирования. — Киев: Наук. думка, 1985. — 216 с.
6. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — СПб.: Лань, 2002. — 736 с.
7. Степашко В.С. Комбинаторный алгоритм МГУА с оптимальной схемой перебора моделей // Автоматика. — 1981. — № 3. — С. 31–36.

Поступила 24.02.2014