



ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ–КОНСОЛИДАЦИИ ВЛАГОНАСЫЩЕННЫХ МИКРОПОРИСТЫХ СРЕД

Аннотация. Получена слабая задача разномасштабной модели фильтрации–консолидации влагонасыщенных микропористых сред. Предложены вычислительные алгоритмы ее дискретизации. Получены явные выражения градиентов функционалов-невязок для идентификации параметров модели градиентными методами.

Ключевые слова: разномасштабная математическая модель, численное решение, градиентные методы идентификации параметров.

Математическое моделирование процессов экстрагирования жидкой составляющей из биоматериалов в перерабатывающей, химической промышленности, фармакологии и других отраслях часто сводится к решению неклассических (разномасштабных) математических задач в частных производных. Одна из таких математических нелинейных моделей представлена в работе [1], где с помощью метода разложения по параметру нелинейная задача сведена к решению серии линейных разномасштабных математических задач в частных производных.

В настоящей статье для линейных неклассических разномасштабных математических задач в частных производных получены соответствующие обобщенные (слабые) задачи, предложены численные методы их дискретизации, сформулированы задачи идентификации параметров математических моделей и на основе результатов теории оптимального управления состояниями распределенных систем [2] получены явные выражения градиентов функционалов-невязок для идентификации градиентными методами различных параметров модели.

ЗАДАЧА ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ И ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ ЕЕ ПОСТАНОВКА

В работе [1] представлена нелинейная математическая модель сложного процесса фильтрационной консолидации во влагонасыщенных микропористых средах, где рассматриваемый процесс описывается следующей начально-краевой задачей.

Имеем уравнения состояния

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1(t, z)}{\partial t} &= G_1(p_1) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu r_1(p_1)} \frac{\partial p_1}{\partial z} \right) + \beta_2 \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R p_2(t, x, z) dx, \\ \frac{\partial p_2(t, x, z)}{\partial t} &= G_2(p_2) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu r_2(p_2)} \frac{\partial p_2}{\partial z} \right), \quad t \in (0, T], \quad x \in (0, R), \quad z \in (0, h), \end{aligned} \quad (1)$$

где p_1 — давление в макропорах, p_2 — давление в микрочастицах; G_i , r_i — модуль сжимаемости и коэффициент сопротивления соответственно для макропор ($i=1$) и микрочастиц ($i=2$); μ — коэффициент динамической вязкости.

Начальные условия

$$p_1(t, z)|_{t=0} = p_{E_1}(z), \quad p_2(t, x, z)|_{t=0} = p_{E_2}(x, z), \quad z \in (0, h), \quad x \in (0, R) \quad (2)$$

(в частности, может быть принято $p_{E_2}(x, z) = p_{E_1}(z) = p_E(z)$).

Краевые условия

$$p_1(t, z)|_{z=0} = p_{S_t}(t), \quad \frac{\partial p_1}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad p_2(t, x, z)|_{x=R} = p_1(t, z), \quad (3')$$

где второе равенство в (3') — условие равновесия на поверхности микрочастицы.

В работе [1] представлена процедура линеаризации начально-краевой задачи (1)–(3), (3'), нулевое приближение $p_1^0(t, z)$, $p_2^0(t, x, z)$ решения которой определяется как решения следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1(t, z)}{\partial t} &= b_1 \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} - \beta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R p_2(t, x, z) dx, \quad z \in (0, h), \\ \frac{\partial p_2}{\partial t} &= b_2 \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}, \quad x \in (0, R), \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T], \\ p_1(t, z)|_{t=0} &= p_E(z), \quad p_2|_{t=0} = p_E(z), \\ p_1(t, z)|_{z=0} &= 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0, \\ \frac{\partial p_2}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \quad p_2|_{x=R} = p_1(t, z), \end{aligned} \quad (4)$$

где $p_1(t, z) = p_1^0(t, z)$; $p_2(t, x, z) = p_2^0(t, x, z)$; $b_1, b_2, \beta = \text{const} > 0$, а все последующие приближения решения начально-краевой задачи (1)–(3), (3') определяются как решения задач вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial t} &= b_1 \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} + f_1(t, z), \quad z \in (0, h), \\ \frac{\partial p_2}{\partial t} &= b_2 \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} + f_2(t, x, z), \quad x \in (0, R), \quad t \in (0, T], \\ p_1|_{t=0} &= 0, \quad p_2|_{t=0} = 0, \quad p_1|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0, \\ \frac{\partial p_2}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \quad p_2|_{x=R} = p_1(t, z), \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь известные функции $f_1(t, z)$, $f_2(t, x, z)$ определяются с помощью решения задачи (4) и предшествующих задач вида (5).

СЛАБОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (4) И ЧИСЛЕННАЯ ЕЕ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ

Пусть вектор-функция $U = (p_1(t, z), p_2(t, x, z))$ — решение начально-краевой задачи (4). Введем в рассмотрение множество $H_0 = \{v = (v(z), w(z; x)) : v \in W_2^1(0, h), w \in W_2^1(0, R), v(0) = 0, w(z; R) = v(z)\}$. Пусть $V = (v(z), w(z; x))$ — произвольный элемент из H_0 . Умножим обе части первого равенства системы (4) на функцию $v(z)$ (первую составляющую вектора $V \in H_0$) и результат проинтегрируем по отрезку $[0, h]$. Получим

$$\begin{aligned} &\int_0^h \frac{\partial p_1(t, z)}{\partial t} v(z) dz + \int_0^h b_1 \frac{\partial p_1}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz + \\ &+ \beta \frac{1}{R} \int_0^h \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_0^R p_2(t, x, z) dx \right) v(z) dz = 0, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (6)$$

Умножим обе части второго равенства системы (4) на функцию $w(z; x)$ (вторую составляющую вектора $V \in H_0$) и результат проинтегрируем по отрезку $[0, R]$. Имеем

$$\int_0^R \frac{\partial p_2}{\partial t}(t, x, z) w(z; x) dx + \int_0^R b_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx - b_2 \frac{\partial p_2(t, x, z)}{\partial x} \Big|_{x=R} v(z) = 0, \\ z \in (0, h), \quad t \in (0, T], \quad (7)$$

с начальными условиями

$$p_1(t, z)|_{t=0} = p_E(z), \quad (8)$$

$$p_2(t, x, z)|_{t=0} = p_E(z), \quad x \in (0, R), \quad z \in (0, h), \quad (9)$$

и краевыми условиями

$$p_1(t, z)|_{z=0} = 0, \quad (10)$$

$$p_2(t, x, z)|_{x=R} = p_1(t, z), \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T). \quad (11)$$

Определение 1. Обобщенным (слабым) решением начально-краевой задачи (4) называется вектор-функция $U = (p_1(t, z), p_2(t, x, z)) \in H$, которая $\forall (v, w) \in H_0$ удовлетворяет равенствам (6)–(11), где

$$H = \{(v(t, z), w(t, x, z)): v \in L^2(0, T; H_1), \\ w \in L^2(0, T; H_2), w(t, R, z) = v(t, z) \quad \forall z \in [0, h]\}, \\ H_1 = \left\{ v(t, z): \int_0^h \left(v^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right) dz < \infty, \frac{\partial v}{\partial t} \in L_2((0, h)), t \in [0, T] \right\}, \\ H_2 = \left\{ v(t, x, z): \int_0^h \int_0^R \left(v^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) dx dz < \infty \right\}.$$

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (4)

1. Численно-аналитическое решение. Пусть $\{\varphi_i^1(z)\}_{i=1}^{n_1}$ — система линейно независимых функций на отрезке $[0, h]$, а $\{\varphi_j^{11}(t)\}_{j=1}^{n_{11}}$ — система линейно независимых функций на отрезке $[0, T]$. Тогда для произвольной функции

$$\varphi(t, z) = \sum_{i=1}^{n_{11}} \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_{ij} \varphi_i^{11}(t) \varphi_j^1(z), \quad \alpha_{ij} \in R = (-\infty, +\infty), \quad (10')$$

решение $p_2(t, x, z)$ задачи (7), (9), (11) при выполнении условия

$$p_2|_{x=R} = \varphi(t, z), \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T], \quad (11')$$

представляется в виде

$$p_2(t, x, z) = \sum_{i=1}^{n_{11}} \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_{ij} p_2^{ij}(t, x, z) + p_2^0(t, x, z). \quad (12)$$

Здесь $p_2^{ij}(t, x, z)$ — решение начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial p_2^{ij}}{\partial t} = b_2 \frac{\partial^2 p_2^{ij}}{\partial x^2}, \quad x \in (0, R), \quad z \in [0, h], \quad t \in (0, T], \\ p_2^{ij}|_{t=0} = 0, \quad x \in (0, R), \quad z \in [0, h], \\ \frac{\partial p_2^{ij}}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad p_2^{ij}|_{x=R} = \varphi_i^{11}(t) \varphi_j^1(z), \quad z \in [0, h], \quad t \in (0, T). \quad (13)$$

Решение $p_2^{ij}(t, x, z)$ задачи (13) для каждого $z \in [0, h]$ можем определить как функцию $p_2^{ij}(t, x, z) \in L^2(0, T; H_3)$, где

$$H_3 = \left\{ v(t, x, z): \int_0^R \left(v^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) dx < \infty \quad \forall z \in [0, h], \quad \forall t \in (0, T] \right\},$$

которая $\forall w(x) \in H_{20} = \{v(x) \in W_2^1(0, R): v(R) = 0\}$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{\partial p_2^{ij}}{\partial t}(t, x, z) w(x) dx + \int_0^R b_2 \frac{\partial p_2^{ij}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx &= 0, \quad z \in [0, h], \quad t \in (0, T], \\ p_2^{ij}(t, x, z)|_{x=R} &= \varphi_i^{11}(t) \varphi_j^1(z), \quad z \in [0, h], \\ p_2^{ij}(t, x, z)|_{t=0} &= 0, \quad x \in [0, R], \quad z \in [0, h], \end{aligned} \quad (14)$$

а $p_{20}(t, x, z) = p_2^0(t, x, z)$ — решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{20}}{\partial t} &= b_2 \frac{\partial^2 p_{20}}{\partial x^2}, \quad x \in (0, R), \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T], \\ p_{20}|_{t=0} &= p_E(z), \quad x \in (0, R), \\ \left. \frac{\partial p_{20}}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0, \quad p_{20}|_{x=R} = 0, \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (15)$$

Слабое решение задачи (15) получаем как единственное решение задачи: определить функцию $p_2^0(t, x, z) \in L^2(0, T; H_3)$, которая $\forall w(x) \in H_{20}$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{\partial p_2^0}{\partial t}(t, x, z) w(x) dx + \int_0^R b_2 \frac{\partial p_2^0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx &= 0, \quad z \in [0, h], \quad t \in (0, T], \\ p_2^0(t, x, z)|_{x=R} &= 0, \quad z \in [0, h], \quad p_2^0(t, x, z)|_{t=0} = p_E(z), \quad x \in (0, R), \quad z \in [0, h]. \end{aligned} \quad (16)$$

Теорема 1. Для каждой фиксированной функции $\varphi(t, z)$ вида (10') существует единственное обобщенное решение $p_2(t, x, z)$ вида (12) задачи, заданной вторым, четвертым, седьмым и восьмым равенствами системы (4) при $p_1(t, z) = \varphi(t, z)$.

Замечание 1. Решения $p_2^{ij}(t, x, z)$ можем находить в виде

$$p_2^{ij}(t, x, z) = \sum_{l=1}^{n_2} \sum_{i=1}^{n_{22}} \beta_l(t) \varphi_l^2(z) \varphi_i^{22}(x) + \psi_{ij},$$

где $\{\varphi_i^2(z)\}_{i=1}^{n_2}$ — система известных линейно независимых функций на $[0, h]$, а $\{\varphi_j^{22}(x)\}_{j=1}^{n_{22}}$ — система линейно независимых функций на $[0, R]$, ψ_{ij} — некоторая известная функция, порожденная произведениями $\varphi_i^{11} \varphi_j^1$, а неизвестный вектор $\{\beta_i(t)\}_{i=1}^{n_2}$ определим как решение задачи Коши, полученной на основе (14), проинтегрировав соответствующие равенства по отрезку $[0, h]$.

Составляющую $p_1(t, z)$ решения $U = (p_1, p_2)$ задачи (4) будем находить в виде

$$p_1(t, z) = \sum_{i=1}^{n_{11}} \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_{ij} \varphi_i^{11}(t) \varphi_j^1(z), \quad (17)$$

где постоянные α_{ij} являются неизвестными.

Учитывая (17), (12) (с общими неизвестными постоянными $\alpha_{ij}, i = \overline{1, n_{11}}, j = \overline{1, n_1}$), на основании (6), (10), (11) с помощью метода Галеркина получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n_{11}} \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_{ij} \left(\int_0^T \int_0^h \frac{\partial \varphi_i^{11}(t)}{\partial t} \varphi_j^1(z) \varphi_v^{11}(t) \varphi_\chi^1(z) dz dt + \right. \\ & \left. + \int_0^T \int_0^h b_1 \varphi_i^{11}(t) \frac{\partial \varphi_j^1(z)}{\partial z} \varphi_v^{11}(t) \frac{\partial \varphi_\chi^1(z)}{\partial z} dz dt + \beta \frac{1}{R} \int_0^T \int_0^h \int_0^R \frac{\partial p_2^{ij}(t, x, z)}{\partial t} dx \varphi_v^{11}(t) \varphi_\chi^1(z) dz dt \right) = \\ & = -\beta \frac{1}{R} \int_0^T \int_0^h \int_0^R \frac{\partial p_2^0(t, x, z)}{\partial t} dx \varphi_v^{11}(t) \varphi_\chi^1(z) dz dt, \quad v = \overline{1, n_{11}}, \chi = \overline{1, n_1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Условие (9) учтено при нахождении функции $p_2^0(t, x, z)$, а на основании (8), (10) получаем равенства

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n_{11}} \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_{ij} \varphi_i^{11}(0) \int_0^h \varphi_j^1(z) \varphi_v^1(z) dz = \int_0^h p_E(z) \varphi_v^1(z) dz, \quad v = \overline{1, n_1}, \\ & \sum_{i=1}^{n_{11}} \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_{ij} \varphi_i^{11}(t) \varphi_j^1(0) = 0, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (18')$$

Следовательно, для определения приближения $U_n = (p_{1n}, p_{2n})$ решения $U = (p_1, p_2)$ задачи (4) необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\bar{A} \bar{\alpha} = \bar{B} \quad (19)$$

с ограничением (18'), где матрица $\bar{A}$ размера $n \times n$, а векторы $\bar{\alpha}, \bar{B}$ размера $n = n_{11} \times n_1$.

Замечание 2. При использовании финитных базисных функций ограничения (18') понижают порядок системы алгебраических уравнений (19).

2. Метод конечных элементов. Отрезок $[0, h]$ разобьем на элементарные отрезки $[z_i, z_{i+1}]$, $i = 0, N-1$, узловыми точками z_i ($0 = z_0 < z_1 < \dots < z_N = h$). При каждой фиксированной функции $p_2(t, x, z)$ на основании задачи (4) получаем начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p_1(t, z)}{\partial t} = b_1 \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} + f(t, z), \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T], \\ & p_1(t, z)|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0, \quad t \in (0, T], \\ & p_1(t, z)|_{t=0} = p_E, \quad z \in (0, h), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$f(t, z) = -\beta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R p_2(t, x, z) dx, \quad z \in (0, h), t \in (0, T]. \quad (20')$$

Определение 2. Обобщенным (слабым) решением начально-краевой задачи (20) называется функция $p_1(t, z) \in H_1 = \{v(t, z): v \in W_2^1(0, h), \frac{\partial v}{\partial t} \in L_2(0, h), v(t, 0) = 0, t \in (0, T]\}$, которая $\forall v(z) \in H_{10} = \{v(z) \in W_2^1(0, h): v(0) = 0\}$ удовлетворяет равенствам

$$\int_0^h \frac{\partial p_1(t, z)}{\partial t} v(z) dz + \int_0^h b_2 \frac{\partial p_1}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz = \int_0^h f(t, z) v(z) dz, \quad t \in (0, T],$$

$$p_1(t, z)|_{t=0} = p_E(z), \quad z \in (0, h). \quad (21)$$

Задачу (21) будем решать с помощью метода конечных элементов (МКЭ), где приближение $p_{1n}(t, z)$ имеет вид

$$p_{1n}(t, z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \varphi_i(z), \quad (22)$$

здесь $\{\varphi_i(z)\}_{i=1}^n$ — система базисных функций МКЭ.

На основании (21) получаем задачу Коши

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \int_0^h \varphi_i(z) \varphi_j(z) dz + \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \int_0^h b_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} dz = \\ = \int_0^h f(t, z) \varphi_j(z) dz, \quad j = \overline{1, n}, \quad t \in (0, T], \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \int_0^h \varphi_i(z) \varphi_j(z) dz = \int_0^h p_E(z) \varphi_j(z) dz, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (23)$$

Вторая часть задачи (4) порождает для каждого $z \in [0, h]$ начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_2}{\partial t} = b_2 \frac{\partial^2 p_2}{\partial z^2}, \quad x \in (0, R), \quad z \in [0, h], \quad t \in (0, T], \\ \left. \frac{\partial p_2}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad p_2|_{x=R} = p_1(t, z), \quad z \in [0, h], \quad t \in (0, T], \\ p_2(t, x, z)|_{t=0} = p_E(z), \quad x \in (0, R), \quad z \in [0, h]. \end{aligned} \quad (24)$$

Определение 3. При каждом фиксированном $p_1(t, z)$ для каждого $z \in [0, h]$ обобщенным (слабым) решением начально-краевой задачи (24) называется функция $p_2(t, x, z) \in H_2$, которая $\forall w(z; x) \in H_{20}$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{\partial p_2(t, x, z)}{\partial t} w(x) dx + \int_0^R b_2 \frac{\partial p_2(t, x, z)}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dz = 0, \quad t \in (0, T], \\ p_2(t, x, z)|_{t=0} = p_E(z), \quad x \in (0, R), \quad z \in [0, h], \end{aligned} \quad (25)$$

$H_2 = \{v(t, x, z): v \in W_2^1((0, R)), \frac{\partial v}{\partial t} \in L_2(0, R), p_2(t, x, z)|_{x=R} = p_1(t, z) \forall z \in [0, h], t \in (0, T]\}$, $H_{20} = \{v(z): v \in W_2^1(0, R), v(R) = 0\}$.

Для каждого фиксированного $z \in [0, h]$ при каждом фиксированном $p_1(t, z)$ задачу (24) можем решить приближенно с помощью МКЭ, где

$$p_{2m}(t, x, z) = \sum_{i=1}^m \beta_i(t) \psi_i(x), \quad z \in [0, h]. \quad (26)$$

На основании (21) получаем задачу Коши

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \beta_i(t) \int_0^R \psi_i(x) \psi_j(x) dx + \sum_{i=1}^m \beta_i(t) \int_0^R b_2 \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx = 0, \quad z \in [0, h], \quad t \in (0, T], \\ \sum_{i=1}^m \beta_i(0) \int_0^R \psi_i(x) \psi_j(x) dx = \int_0^R p_E(z) \psi_j(x) dx, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (27)$$

Следует отметить, что $\beta_i(t) = \beta_i(z; t)$, $z \in [0, h]$.

Поскольку в МКЭ параметры $\alpha_i(t)$ являются значениями искомой функции $p_1(t, z)$ или ее частных производных по пространственным переменным в определенных узловых точках отрезка $[0, h]$, а $\beta_i(t)$ — соответственно функции $p_2(t, x, z)$ в узловых точках отрезка $[0, R]$ при фиксированных $z \in [0, h]$, то, например, при квадратичных функциях МКЭ, разбив отрезок $[0, h]$ на элементарные отрезки $[z_i, z_{i+1}]$, получим дополнительно узловые точки $z_{i+1/2} \in [z_i, z_{i+1}]$.

После каждой узловой точки $z_0, z_{1/2}, z_1, \dots, z_{N_1-1}, z_{N_1-1/2}, z_{N_1}$ (N_1 — количество элементарных отрезков $[z_i, z_{i+1}]$) вводим в рассмотрение конечно-элементное разбиение отрезка $[0, R]$ на элементарные отрезки $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, N_2 - 1$.

В этом случае равенства (23), (27) порождают задачу Коши

$$\begin{aligned} A\dot{\bar{\alpha}}(t) + K\bar{\alpha}(t) &= F(t), \quad t \in [0, T], \\ A_0\bar{\alpha}(0) &= F_0, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\bar{\alpha}(t) = (\alpha_0(t), \beta_0^0(t), \beta_{1/2}^0(t), \dots, \beta_{N_2}^0(t), \alpha_{1/2}(t), \beta_0^{1/2}(t), \beta_{1/2}^{1/2}(t), \dots)^T. \quad (29)$$

Учитывая (29), первую строку (без учета слагаемого $\int_0^h f(t, z) \varphi_j(z) dz$) разре-

женной матрицы A порождают элементы

$$\int_0^h \varphi_1(z) \varphi_1(z) dz, \quad \int_0^h \varphi_2(z) \varphi_1(z) dz, \quad \int_0^h \varphi_3(z) \varphi_1(z) dz,$$

а матрицы K — элементы

$$\int_0^h b_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} dz, \quad \int_0^h b_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} dz, \quad \int_0^h b_1 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} dz.$$

Вторую строку матрицы A порождают элементы

$$\int_0^R \psi_1(x) \psi_1(x) dx, \quad \int_0^R \psi_2(x) \psi_1(x) dx, \quad \int_0^R \psi_3(x) \psi_1(x) dx,$$

а матрицы K — элементы

$$\int_0^R b_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} dx, \quad \int_0^R b_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} dx, \quad \int_0^R b_2 \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} dx.$$

После порождения первых шести строк матрицы A и матрицы K в матрице A можно учесть слагаемое $\int_0^h f(t, z) \varphi_j(z) dz$ выражения (23), где функция $f(t, z)$ имеет вид (20').

Поскольку для трех фиксированных значений $z = z_0, z_{1/2}, z_1$ функция $p_2(t, x, z_\nu)$, $\nu = 0, 1/2, 1$, имеет вид

$$p_2(t, x, z_\nu) = \sum_{i=1}^m \beta_i^\nu(t) \psi_i(x), \quad (30)$$

то

$$f(t, z) = -\beta \frac{1}{R} \sum_{i=1}^m \dot{\beta}_i^\nu(t) \int_0^R \psi_i(x) dx, \quad \nu = 0, 1/2, 1. \quad (31)$$

Для вычисления интеграла

$$\int_0^h f(t, z) \psi_j(z) dz, \quad j = 1, \quad (32)$$

можно использовать численное интегрирование.

С учетом (31) на основе (32) при $j=2, 3$ получим соответствующие элементы матрицы A третьей и пятой строк.

Аналогично получаем все элементы матриц A, K , продвигаясь по отрезку $[0, h]$, следующим отрезком будет $[z_1, z_2]$. На завершающей стадии построения матриц A, K учитываем естественные условия $p_2(t, x, z)|_{x=R} = p_1(t, z)$, $z \in [0, h]$, $t \in (0, T]$.

Матрицу A_0 и вектор F_0 получаем на основе начальных условий, т.е. на основе равенств (16), (27).

ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ

Пусть состояние системы описывается начально-краевой задачей (4) и в точках $\bar{d}_i$, $i=1, m$, известны следы решения $U = (p_1(t, z), p_2(t, x, z))$ задачи (4), заданные равенствами

$$p_1(t, \bar{d}_i) = f_i^1(t), \quad p_2(t, R/2, \bar{d}_i) = f_i^2(t), \quad t \in (0, T], \quad i = \overline{1, m}. \quad (33)$$

Составим функционал-невязку

$$J(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^T ((p_1(u; t, \bar{d}_i) - f_i^1(t))^2 + (p_2(u; t, R/2, \bar{d}_i) - f_i^2(t))^2) dt, \quad (34)$$

где $u = (u^1, u^2) \in \mathcal{U} = C_+([0, T]) \times C_+([0, T])$, $C_+([0, T]) = \{v(t) \in C([0, T]): v > 0\}$.

Вместо задачи (4), (33) будем решать задачу (6)–(11), (34), состоящую в определении вектора u , при котором решение $U = (p_1(u; t, z), p_2(u; t, x, z))$ задачи (6)–(11), где $u_1 = b_1, u_2 = b_2$, удовлетворяет равенству

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}} J(v). \quad (35)$$

Приближение u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (6)–(11), (34) будем находить с помощью итерационного процесса

$$u_{n+1} = u_n - \beta_n p_n, \quad n = 0, 1, \dots, n^*, \quad (36)$$

начиная с некоторого начального приближения $u_0 \in \mathcal{U}$, где направление спуска p_n и коэффициент β_n определяются следующими выражениями [3]:

- для метода минимальных ошибок

$$p_n = J'_{u_n}, \quad \beta_n = \frac{\|e_n\|^2}{\|J'_{u_n}\|^2};$$

- для метода скорейшего спуска

$$p_n = J'_{u_n}, \quad \beta_n = \frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|AJ'_{u_n}\|^2}; \quad (37)$$

- для метода сопряженных градиентов

$$p_n = J'_{u_n} + \gamma_n p_{n-1}, \quad \gamma_0 = 0, \quad \gamma_n = \frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|J'_{u_{n-1}}\|^2}, \quad \beta_n = \frac{(J'_{u_n}, p_n)}{\|Ap_n\|^2},$$

где J'_{u_n} — градиент функционала $J(u)$ в точке $u = u_n$, $e_n = Au_n - f$, $Au_n = (\{p_1(u_n; t, \bar{d}_i)\}_{i=1}^m, \{p_2(u_n; t, R/2, \bar{d}_i)\}_{i=1}^m)$, $f = (\{f_i^1\}_{i=1}^m, \{f_i^2\}_{i=1}^m)$.

Для приращения θ решения U задачи (4), соответствующего допустимому приращению Δu и $(u + \Delta u \in \mathcal{U})$ элемента $u \in \mathcal{U}$, имеем равенства

$$\frac{\partial(p_1 + \theta_1)}{\partial t} = (u_1 + \Delta u_1) \frac{\partial^2(p_1 + \theta_1)}{\partial z^2} - \beta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R (p_2 + \theta_2) dx, \quad z \in (0, h),$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(p_2 + \theta_2)}{\partial t} &= (u_2 + \Delta u_2) \frac{\partial^2(p_2 + \theta_2)}{\partial x^2}, \quad x \in (0, R), \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T], \\
(p_1 + \theta_1)|_{t=0} &= p_E(z), \quad (p_2 + \theta_2)|_{t=0} = p_E(z), \\
(p_1 + \theta_1)|_{z=0} &= 0, \quad \frac{\partial(p_1 + \theta_1)}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0, \\
\frac{\partial(p_2 + \theta_2)}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \quad (p_2 + \theta_2)|_{x=R} = p_1 + \theta_1.
\end{aligned} \tag{38}$$

Пренебрегая членами второго порядка малости, для приращения θ решения U , соответствующего приращению Δu , на основании (38) получаем следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta_1}{\partial t} - u_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} &= \Delta u_1 \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} - \beta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R \theta_2(t, x, z) dx, \quad z \in (0, h), \\
\frac{\partial \theta_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} &= \Delta u_2 \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}, \quad x \in (0, R), \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T], \quad \theta_1(t, z)|_{t=0} = 0, \\
\theta_2(t, x, z)|_{t=0} &= 0, \quad \theta_1(t, z)|_{z=0} = 0, \\
\frac{\partial \theta_1}{\partial z} \Big|_{z=h} &= 0, \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \\
\theta_2(t, x, z)|_{x=R} &= \theta_1(t, z), \quad z \in [0, h], \quad t \in (0, T],
\end{aligned} \tag{39}$$

$p_1(t, z) = p_1(u, t, z)$, $p_2(t, x, z) = p_2(u, t, x, z)$.

Определение 4. Обобщенным (слабым) решением начально-краевой задачи (39) называется вектор-функция $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in H$, которая $\forall (v, w) \in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned}
&\int_0^h \frac{\partial \theta_1(t, z)}{\partial t} v(z) dz + \int_0^h u_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz + \beta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R \theta_2(t, x, z) dx v dz = \\
&= \int_0^h \Delta u_1 \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} v(z) dz, \quad t \in (0, T], \\
&\int_0^R \frac{\partial \theta_2(t, x, z)}{\partial t} w(z; x) dx + \int_0^R u_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx - u_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=R} w(z; R) = \\
&= \int_0^R \Delta u_2 \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} w(z; x) dx, \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T], \\
&\theta_1(t, z) \Big|_{t=0} = 0, \quad \theta_2(t, x, z) \Big|_{t=0} = 0, \\
&\theta_1(t, z) \Big|_{z=0} = 0, \quad \theta_2(t, x, z) \Big|_{x=R} = \theta_1(t, z), \quad z \in (0, h).
\end{aligned} \tag{40}$$

На каждом шаге нахождения $(n+1)$ -го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (6)–(11), (34) определим вектор-функцию $\tilde{p}(u_{n+1}) = (\tilde{p}_1(u_{n+1}), \tilde{p}_2(u_{n+1}))$ как решение следующей дифференциальной задачи:

$$\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial t} = u_{1n} \frac{\partial^2 \tilde{p}_1}{\partial z^2} + \Delta u_1 \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} - \beta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R \tilde{p}_2 dx, \quad z \in (0, h),$$

$$\frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial t} = u_{2n} \frac{\partial^2 \tilde{p}_2}{\partial x^2} + \Delta u_2 \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}, \quad x \in (0, R), \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T],$$

$$\tilde{p}_1|_{t=0} = p_E(z), \quad \tilde{p}_2|_{t=0} = p_E(z), \quad (41)$$

$$\tilde{p}_1|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial z} \right|_{z=h} = 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \tilde{p}_2|_{x=R} = \tilde{p}_1, \quad z \in [0, h], \quad t \in (0, T].$$

Определение 5. Обобщенным решением начально-краевой задачи (41) называется вектор-функция $\tilde{p} = (\tilde{p}_1(u_{n+1}), \tilde{p}_2(u_{n+1})) \in H$, которая $\forall (v, w) \in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$\int_0^h \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial t} v \, dx + \int_0^h u_1 \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \, dz + \beta \frac{1}{R} \int_0^h \left(\int_0^R \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial t} \, dx \right) v \, dz = \int_0^h \Delta u_1 \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} v \, dz, \quad t \in (0, T],$$

$$\int_0^R \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial t} w(z; x) \, dx + \int_0^R u_2 \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \, dx - u_2 \left. \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial x} \right|_{x=R} w(z; R) =$$

$$= \int_0^R \Delta u_2 \frac{\partial^2 p_2}{\partial z^2} w(z; x) \, dx, \quad z \in [0, h], \quad t \in (0, T], \quad \tilde{p}_1|_{t=0} = p_E, \quad \tilde{p}_2|_{t=0} = p_E.$$

Для каждого фиксированного $z \in [0, h]$ должно выполняться условие $w(z; R) = v(z)$, т.е. при дальнейшем интегрировании второго равенства системы (41') по переменной $z \in [0, h]$ необходимо предполагать, что $w = w(z; x)$.

Следуя [4, 5], на каждом шаге определения $(n+1)$ -го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (4), (34) сопряженная задача состоит в нахождении вектор-функции $(\psi_1(t, x), \psi_2(t, x, z)) \in H$, которая $\forall (w_1, w_2) \in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$-\int_0^h \frac{\partial \psi_1(t, z)}{\partial t} w_1(z) \, dz + \int_0^h u_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial z} \, dz - \int_0^h \int_0^R \frac{\partial \psi_2(t, x, z)}{\partial t} w_2(z; x) \, dx \, dz +$$

$$+ \int_0^h \int_0^R u_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial x} \, dx \, dz + \beta \frac{1}{R} \int_0^h \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R w_2(z; x) \, dx \, \psi_1 \, dz - \int_0^h u_2 \left. \frac{\partial w_2}{\partial x} \right|_{x=R} \psi_2(t, R, z) \, dz =$$

$$= \sum_{i=1}^m ((p_1(t, \bar{d}_i) - f_i^1(t)) w_1(\bar{d}_i) + (p_2(t, R/2, \bar{d}_i) - f_i(t)) w_2(\bar{d}_i; R/2))|_{z=\bar{d}_i}, \quad (42)$$

$$\psi|_{t=T} = 0. \quad (43)$$

Выбирая в (42) $w_1 = \tilde{p}_1(u_{n+1}) - p_1(u_n)$, $w_2 = \tilde{p}_2(u_{n+1}) - p_2(u_n)$, с учетом (39), (41') получаем

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle \approx (\bar{p}(u_n) - f, \bar{\tilde{p}}(u_{n+1}) - \bar{p}(u_n)) = \int_0^T \int_0^h \frac{\partial(\tilde{p}_1(u_{n+1}) - p_1(u_n))}{\partial t} \psi_1 \, dz \, dt +$$

$$+ \int_0^T \int_0^h u_{1n} \frac{\partial(\tilde{p}_1(u_{n+1}) - p_1(u_n))}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \, dz \, dt + \int_0^T \int_0^h \int_0^R \frac{\partial(\tilde{p}_2(u_{n+1}) - p_2(u_n))}{\partial t} \psi_2 \, dx \, dz \, dt +$$

$$+ \int_0^T \int_0^h \int_0^R u_{2n} \frac{\partial(\tilde{p}_2(u_{n+1}) - p_2(u_n))}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \, dx \, dz \, dt +$$

$$+ \beta \frac{1}{R} \int_0^T \int_0^h \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R (\tilde{p}_2(u_{n+1}) - p_2(u_n)) \, dx \, \psi_1 \, dz \, dt -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_0^h u_{2n} \frac{\partial(\tilde{p}_2(u_{n+1}) - p_2(u_n))}{\partial x} \psi_2 \Big|_{x=R} dzdt = \int_0^T \int_0^h \Delta u_{1n} \frac{\partial^2 p(u_n)}{\partial z^2} \psi_1(t, z) dzdt + \\
& + \int_0^T \int_0^h \int_0^R \Delta u_{2n} \frac{\partial^2 p_2(t, x, z)}{\partial x^2} \psi_2 dx dzdt.
\end{aligned}$$

Следовательно, $J'_{u_n} \approx \tilde{\psi}_n$. Если $u_1 = u_1(t, z)$, $u_2 = u_2(t, z)$, то

$$\tilde{\psi}_n = (\tilde{\psi}_n^1, \tilde{\psi}_n^2), \quad \tilde{\psi}_n^1 = \frac{\partial^2 p_1(u_n)}{\partial z^2} \psi_1(t, z), \quad \tilde{\psi}_n^2 = \int_0^R \frac{\partial^2 p_2(u_n)}{\partial x^2} \psi_2 dx.$$

$$\text{Значит, } \|J'_{u_n}\|^2 \approx \int_0^T \int_0^h (\tilde{\psi}_n^1(t, z))^2 dzdt + \int_0^T \int_0^h (\tilde{\psi}_n^2(t, z))^2 dzdt.$$

Если $\mathcal{U} = R_+ \times R_+$, то

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_n^1 &= \int_0^T \int_0^h \frac{\partial^2 p_1(u_n)}{\partial z^2} \psi_1 dzdt, \quad \tilde{\psi}_n^2 = \int_0^T \int_0^h \int_0^R \frac{\partial^2 p_2(u_n)}{\partial x^2} \psi_2 dx dzdt, \\
\|J'_{u_n}\|^2 &\approx (\tilde{\psi}_n^1)^2 + (\tilde{\psi}_n^2)^2.
\end{aligned}$$

ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРА b_2 ПРИ ИЗВЕСТНЫХ СЛЕДАХ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ $p_1(t, z)$ РЕШЕНИЯ $U = (p_1(t, z), p_2(t, x, z))$

Состояние системы описывается следующей начально-краевой задачей:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_1}{\partial t} &= b_1 \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} - \beta \frac{1}{R} \int_0^R p_2 dx, \quad z \in [0, h], \quad t \in (0, T], \\
\frac{\partial p_2}{\partial t} &= u \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}, \quad x \in (0, R), \quad z \in [0, h], \quad t \in (0, T], \\
p_1|_{t=0} &= p_E(z), \quad p_2|_{t=0} = p_E(z),
\end{aligned} \tag{44}$$

$$p_1|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0, \quad \frac{\partial p_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad p_2(t, x, z)|_{x=R} = p_1(t, z).$$

Предполагаем, что

$$p_1(t, d_i) = f_i(t), \quad i = \overline{1, m}, \quad t \in (0, T], \quad d_i \in (0, z), \quad i = \overline{1, m}. \tag{45}$$

Функционал-невязка имеет вид

$$J(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^T (p_1(u; t, d_i) - f_i(t))^2 dt. \tag{46}$$

Определение 6. При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U} = C_+([0, T])$ обобщенным решением начально-краевой задачи (44) называется вектор-функция $U = (p_1(t, z), p_2(t, x, z)) \in H$, которая $\forall (v, w) \in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned}
& \int_0^h \frac{\partial p_1}{\partial t} v(z) dz + \int_0^h b_1 \frac{\partial p_1}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz + \int_0^h \beta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R p_2(t, x, z) dx v(z) dz = 0, \\
& \int_0^R \frac{\partial p_2}{\partial t} w(z; x) dx + \int_0^R u \frac{\partial p_2}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx - u \frac{\partial p_2}{\partial x} \Big|_{x=R} w(z; R) = 0, \quad z \in [0, h], \quad t \in (0, T], \\
& p_1|_{t=0} = p_E(z), \quad p_2|_{t=0} = p_E(z).
\end{aligned} \tag{47}$$

Для приращения θ решения $\mathcal{U}$ задачи (44), соответствующего приращению Δu ($u + \Delta u \in \mathcal{U}$) решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (44), (46), имеем равенства

$$\begin{aligned}\frac{\partial(p_1 + \theta_1)}{\partial t} &= b_1 \frac{\partial^2(p_1 + \theta_1)}{\partial z^2} - \beta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R (p_2 + \theta_2) dx, \quad z \in [0, h], \\ \frac{\partial(p_2 + \theta_2)}{\partial t} &= (u + \Delta u) \frac{\partial^2(p_2 + \theta_2)}{\partial x^2}, \quad x \in (0, R), \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T], \\ (p_1 + \theta_1)|_{t=0} &= p_E(z), \quad (p_2 + \theta_2)|_{t=0} = p_E(z), \\ (p_1 + \theta_1)|_{z=0} &= 0, \quad \left. \frac{\partial(p_1 + \theta_1)}{\partial z} \right|_{z=h} = 0, \\ \left. \frac{\partial(p_2 + \theta_2)}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0, \quad (p_2 + \theta_2)|_{x=R} = p_1 + \theta_1, \quad z \in [0, h], \quad t \in (0, T). \quad (48)\end{aligned}$$

Пренебрегая членами второго порядка малости, для приращения $\theta = (\theta_1(t, z), \theta_2(t, x, z))$ решения $U = (p_1(u; t, z), p_2(u; t, x, z))$, соответствующего допустимому приращению Δu решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (44), (46), получаем следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta_1}{\partial t} &= b_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} - \beta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R \theta_2 dx, \quad z \in (0, h), \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial t} &= u \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} + \Delta u \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}, \quad x \in (0, R), \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T], \\ \theta_1|_{t=0} &= 0, \quad \theta_2|_{t=0} = 0, \\ \theta_1|_{z=0} &= 0, \quad \left. \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right|_{z=h} = 0, \\ \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0, \quad \theta_2|_{x=R} = \theta_1, \quad z \in [0, h], \quad t \in (0, T). \quad (49)\end{aligned}$$

Определение 7. Обобщенным решением начально-краевой задачи (49) называется функция $\theta = (\theta_1(t, z), \theta_2(t, x, z)) \in H$, которая $\forall (v(z), w(z; x)) \in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned}\int_0^h \frac{\partial \theta_1}{\partial t} v(z) dz + \int_0^h b_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz + \beta \frac{1}{R} \int_0^h \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R \theta_2(t, x, z) dx v dz &= 0, \\ \int_0^R \frac{\partial \theta_2(t, x, z)}{\partial t} w(z; x) dx + \int_0^R u \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx - u \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right|_{x=R} w(z; R) &= \\ = \int_0^R \Delta u \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} w(z; x) dx, \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T], \\ \theta_1(t, z)|_{t=0} &= 0, \quad \theta_2(t, x, z)|_{t=0} = 0,\end{aligned}$$

$$\theta_1(t, z)|_{z=0} = 0, \quad \theta_2(t, x, z)|_{x=R} = \theta_1(t, z), \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T). \quad (50)$$

На каждом шаге определения $(n+1)$ -го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (46), (47) определим вектор-функцию $\tilde{p} = (\tilde{p}_1(u_{n+1}), \tilde{p}_2(u_{n+1}))$ как решение следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial t} &= b_1 \frac{\partial^2 \tilde{p}_1}{\partial z^2} - \beta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R \tilde{p}_2 dx, \quad z \in (0, h), \\
\frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial t} &= u \frac{\partial^2 \tilde{p}_2}{\partial x^2} + \Delta u \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}, \quad x \in (0, R), \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T], \\
\tilde{p}_1|_{t=0} &= p_E(z), \quad \tilde{p}_2|_{t=0} = p_E(z), \quad \tilde{p}_1|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial z} \right|_{z=h} = 0, \\
\left. \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0, \quad \tilde{p}_2|_{x=R} = \tilde{p}_1, \quad z \in [0, h], \quad t \in (0, T].
\end{aligned} \tag{51}$$

Определение 8. Обобщенным решением начально-краевой задачи (51) называется вектор-функция $\tilde{p} = (\tilde{p}_1(u_{n+1}), \tilde{p}_2(u_{n+1})) \in H$, которая $\forall (v, w) \in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$\int_0^h \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial t} v dx + \int_0^h b_1 \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dx + \beta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R \tilde{p}_2 dx v(z) dz = 0, \quad t \in (0, T], \tag{52}$$

$$\int_0^R \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial t} w(z; x) dx + \int_0^R u \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx - u \left. \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial x} \right|_{x=R} w(z; R) = \int_0^R \Delta u_2 \frac{\partial^2 \tilde{p}_2}{\partial x^2} w(z; x) dx.$$

Для каждого фиксированного $z \in [0, h]$ должно выполняться равенство (41').

На всех шагах определения $(n+1)$ -го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (46), (47) определим сопряженную задачу

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \psi_1(t, z)}{\partial t} - b_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} &= \sum_{i=1}^m (p_1(t, d_i) - f_i(t)) \delta(z = d_i), \quad z \in (0, h), \\
-\int_0^R \frac{\partial \psi_2(t, x, z)}{\partial t} w_2(z; x) dx + \int_0^R u \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial x} dx + \beta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R w_2 dx \psi_1(t, z) - \\
-u \left. \frac{\partial w_2}{\partial x} \right|_{x=R} \psi_2(t, R, z) &= 0, \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T], \\
\psi_1|_{t=T} = 0, \quad \psi_2|_{t=T} = 0, \quad \psi_1|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right|_{z=h} &= 0, \\
\left. \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0, \quad \psi_2|_{x=R} = \psi_1.
\end{aligned} \tag{53}$$

Определение 9. Обобщенным решением задачи (53) называется вектор-функция $\psi = (\psi_1(t, x), \psi_2(t, x, z)) \in H$, которая $\forall (w_1(z), w_2(z; x)) \in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned}
-\int_0^h \frac{\partial \psi_1}{\partial t} w_1(z) dz + \int_0^h b_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial z} dz &= \sum_{i=1}^m (p_1(t, d_i) - f_i(t)) w_1(d_i), \quad t \in (0, T], \\
-\int_0^R \frac{\partial \psi_2(t, x, z)}{\partial t} w_2(z; x) dx + \int_0^R u_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial x} dx + \beta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R w_2 dx \psi_1(t, z) - \\
-u_2 \left. \frac{\partial w_2}{\partial x} \right|_{x=R} \psi_2(t, R, z) &= 0, \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T], \\
\psi_1|_{t=T} = 0, \quad \psi_2|_{t=T} &= 0.
\end{aligned} \tag{54}$$

Выбирая в равенствах (54) $w_1 = \tilde{p}_1(u_{n+1}) - p_1(u_n)$, $w_2 = \tilde{p}_2(u_{n+1}) - p_2(u_n)$, с учетом (52) получаем

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle \approx (\bar{p}_1(u_n) - \bar{f}, \tilde{p}_1(u_{n+1}) - \bar{p}_1(u_n)) = \int_0^T \int_0^h \int_0^R \Delta u_n \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} \psi_2(t, x, z) dx dz dt,$$

где $\bar{p}_1(u_n) = \{p_1(u_n; t, d_i)\}_{i=1}^m$, $\tilde{p}_1(u_{n+1}) = \{\tilde{p}_1(u_{n+1}; t, d_i)\}_{i=1}^m$, $\bar{f} = \{f_i(t)\}_{i=1}^m$.

Следовательно,

$$J'_{u_n} \approx \int_0^R \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} \psi_2(t, x, z) dx.$$

ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРА β ПРИ ИЗВЕСТНЫХ СЛЕДАХ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ $p_1(t, z)$ РЕШЕНИЯ $U = (p_1(t, z), p_2(t, x, z))$

Состояние системы описывается начально-краевой задачей

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial t} &= b_1 \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} + u \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R p_2 dx, \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T], \\ \frac{\partial p_2}{\partial t} &= b_2 \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}, \quad x \in (0, R), \quad z \in (0, h], \quad t \in (0, T], \\ p_1|_{t=0} &= p_E(z), \quad p_2|_{t=0} = p_E(z), \\ p_1|_{z=0} &= 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0, \quad \frac{\partial p_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad p_2(t, x, z)|_{x=R} = p_1(t, z). \end{aligned} \quad (55)$$

Предполагаем, что выполняются равенства (45).

Определение 10. При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U} = C_+([0, T])$ обобщенным решением начально-краевой задачи (55) называется вектор-функция $U = (p_1(t, z), p_2(t, x, z)) \in H$, которая $\forall (w_1(z), w_2(z; x)) \in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} \int_0^h \frac{\partial p_1}{\partial t} w_1(z) dz + \int_0^h b_1 \frac{\partial p_1}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial z} dz + \int_0^h u \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R p_2(t, x, z) dx w_1(z) dz &= 0, \\ \int_0^R \frac{\partial p_2}{\partial t} w_2(z; x) dx + \int_0^R b_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial x} dx - b_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} \Big|_{x=R} w_2(z; R) &= 0, \\ p_1|_{t=0} &= p_E(z), \quad p_2|_{t=0} = p_E(z). \end{aligned} \quad (56)$$

Пренебрегая членами второго порядка малости, на основании (55) для приращения $\theta = (\theta_1(t, z), \theta_2(t, x, z))$ решения $U = (p_1(t, z), p_2(t, x, z))$ задачи (55), соответствующего приращению Δu ($u + \Delta u \in \mathcal{U}$) решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (55), (45), получаем начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} &= b_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} - u \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R \theta_2 dx - \Delta u \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R p_2(t, x, z) dx, \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial t} &= b_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2}, \quad x \in (0, R), \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T], \quad \theta_1|_{t=0} = 0, \quad \theta_2|_{t=0} = 0, \\ \theta_1|_{z=0} &= 0, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0, \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \theta_2(t, x, z)|_{x=R} = \theta_1(t, z). \end{aligned} \quad (57)$$

Определение 11. Обобщенным решением начально-краевой задачи (57) называется вектор-функция $\theta = (\theta_1(t, z), \theta_2(t, x, z)) \in H$, которая $\forall (w_1(z), w_2(z; x)) \in H_0$

удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} & \int_0^h \frac{\partial \theta_1}{\partial t} w_1(z) dz + \int_0^h b_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial z} dz + \int_0^h u \frac{1}{R} \int_0^R \theta_2 dx w_1(z) dz = \\ & = - \int_0^h \Delta u \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R p_2(t, x, z) dx w_1(z) dz, \quad t \in (0, T], \\ & \int_0^R \frac{\partial \theta_2}{\partial t} w_2(z; x) dx + \int_0^R b_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \frac{\partial w_2(z; x)}{\partial x} dx - b_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=R} w_2(z; R) = 0, \\ & \theta_1|_{t=0} = 0, \quad \theta_2|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (58)$$

На каждом шаге нахождения $(n+1)$ -го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (56), (46) определим вектор-функцию $\tilde{p} = (\tilde{p}_1(u_{n+1}), \tilde{p}_2(u_{n+1}))$ как решение следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial t} &= b_1 \frac{\partial^2 \tilde{p}_1}{\partial z^2} - u_n \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R \tilde{p}_2 dx - \Delta u_n \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R p_2(u_n) dx, \quad z \in (0, h), \\ \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial t} &= b_2 \frac{\partial^2 \tilde{p}_2}{\partial x^2}, \quad x \in (0, R), \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T), \\ \tilde{p}_1|_{t=0} &= p_E(z), \quad \tilde{p}_2|_{t=0} = p_E(z), \quad \tilde{p}_1|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0, \\ & \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \tilde{p}_2|_{x=R} = \tilde{p}_1. \end{aligned} \quad (59)$$

Определение 12. Обобщенным решением начально-краевой задачи (59) называется вектор-функция $\tilde{p} = (\tilde{p}_1(t, z), \tilde{p}_2(t, x, z)) \in H$, которая $\forall (w_1(z), w_2(z; x)) \in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} & \int_0^h \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial t} w_1(z) dz + \int_0^h b_1 \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial z} dz + \int_0^h u_n \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R \tilde{p}_2 dx w_1(z) dz = \\ & = - \int_0^h \Delta u_n \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R p_2(u_n) w_1(z) dx dz, \quad t \in (0, T], \\ & \int_0^R \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial t} w_2(z; x) dx + \int_0^R b_2 \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial x} dx - b_2 \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial x} \Big|_{x=R} w_2(z; R) = 0, \\ & \tilde{p}_1|_{t=0} = p_E(z), \quad \tilde{p}_2|_{t=0} = p_E(z). \end{aligned} \quad (60)$$

На каждом шаге определения $(n+1)$ -го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (56), (46) сопряженная задача имеет вид

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial \psi_1(t, z)}{\partial t} - b_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = \sum_{i=1}^m (p_1(t, d_i) - f_i(t)) \delta(z = d_i), \quad z \in (0, h), \\ & - \int_0^R \frac{\partial \psi_2(t, x, z)}{\partial t} w_2(z; x) dx + \int_0^R b_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial x} dx + u \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R w_2 dx \psi_1(t, z) - \\ & - b_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} \Big|_{x=R} \psi_2(t, R, z) = 0, \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T], \\ & \psi_1|_{t=T} = 0, \quad \psi_2|_{t=T} = 0, \quad \psi_1|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \psi_2|_{x=R} = \psi_1. \end{aligned} \quad (61)$$

Определение 13. Обобщенным решением задачи (61) называется вектор-функция $\psi = (\psi_1(t, x), \psi_2(t, x, z)) \in H$, которая $\forall (w_1(z), w_2(z, x)) \in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} & -\int_0^h \frac{\partial \psi_1}{\partial t} w_1(z) dz + \int_0^h b_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial z} dz = \sum_{i=1}^m (p_1(t, d_i) - f_i(t)) w_1(d_i), t \in (0, T], \\ & -\int_0^R \frac{\partial \psi_2(t, x, z)}{\partial t} w_2(z, x) dx + \int_0^R b_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial w_2(z, x)}{\partial x} dx + u \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R w_2(z, x) dx \psi_1(t, z) - \\ & -b_2 \frac{\partial w_2(z, x)}{\partial x} \Big|_{x=R} \psi_2(t, R, z) = 0, z \in (0, h), t \in (0, T], \\ & \psi_1|_{t=T} = 0, \psi_2|_{t=T} = 0. \end{aligned} \quad (62)$$

Выбирая в равенствах (62) $w_1 = \tilde{p}_1(u_{n+1}) - p_1(u_n)$, $w_2 = \tilde{p}_2(u_{n+1}) - p_2(u_n)$, с учетом (60), (58) получаем

$$\begin{aligned} \langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle & \approx (\bar{p}_1(u_n) - \bar{f}, \tilde{\bar{p}}_1(u_{n+1}) - \bar{p}_1(u_n)) = \\ & = -\int_0^T \int_0^h \Delta u_n \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R p_2(u_n; t, x, z) dx \psi_1(t, z) dz dt. \end{aligned} \quad (63)$$

Следовательно, $J'_{u_n} \approx \tilde{\psi}_n$, где

$$\tilde{\psi}_n \approx -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R p_2(u_n; t, x, z) dx \psi_1(t, z), \quad \|J'_{u_n}\|^2 \approx \int_0^T \int_0^h \tilde{\psi}_n^2 dz dt.$$

Если $\mathcal{U} = R_+ = (0, +\infty)$, то

$$\tilde{\psi}_n = -\int_0^T \int_0^h \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R p_2(u_n; t, x, z) dx \psi_1(t, z) dz dt, \quad \|J'_{u_n}\|^2 \approx |\tilde{\psi}_n|.$$

ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ b_1, b_2 НА ОСНОВЕ СЛАБОЙ ЗАДАЧИ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ

Пусть состояние системы описывается начально-краевой задачей (4). Предположим, что в точках $d_i, i = \overline{1, m}$, известны следы решения $U = (p_1(t, z), p_2(t, x, z))$ задачи (4), заданные равенствами (33). Функционал-невязка имеет вид (34). Имеем задачу (6)–(11), (34), состоящую в определении вектора u , при котором решение $U = (p_1(u; t, z), p_2(u; t, x, z))$ задачи (6)–(11), где $u_1 = b_1, u_2 = b_2$, удовлетворяет равенствам (33).

Для приращения θ решения U задачи (6)–(11), соответствующего приращению Δu ($u + \Delta u \in \mathcal{U}$) элемента $u \in \mathcal{U}$ на основании (6)–(11), имеем задачу: необходимо определить функцию $\theta = (\theta_1(t, z), \theta_2(t, x, z)) \in H$, которая $\forall (w_1(z), w_2(z, x)) \in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} & \int_0^h \frac{\partial \theta_1(t, z)}{\partial t} w_1(z) dz + \int_0^h u_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial z} dz + \beta \frac{1}{R} \int_0^h \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R \theta_2(t, x, z) dx w_1 dz = \\ & = -\int_0^h \Delta u_1 \frac{\partial p_1}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial z} dz, t \in (0, T], \\ & \int_0^R \frac{\partial \theta_2(t, x, z)}{\partial t} w_2(z, x) dx + \int_0^R u_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial x} dx - u_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=R} w_2(z, R) = \end{aligned}$$

$$= - \int_0^R \Delta u_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial x} dx + \Delta u_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} \Big|_{x=R} w_2(z; R), \quad z \in [0, h], \quad t \in (0, T),$$

$$\theta_1|_{t=0} = 0, \quad \theta_2|_{t=0} = 0. \quad (64)$$

На каждом шаге определения $(n+1)$ -го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (6)–(11), (33) определим функцию $\tilde{p}(u_{n+1}) = (\tilde{p}_1(u_{n+1}), \tilde{p}_2(u_{n+1}))$ как решение следующей задачи: найти функцию $\tilde{p}(u_{n+1}) \in H$, которая $\forall (w_1(z), w_2(z; x)) \in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} & \int_0^h \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial t} w_1(z) dz + \int_0^h u_1 \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial z} dz + \int_0^h \beta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial t} dx w_1(z) dz = \\ & = - \int_0^h \Delta u_1 \frac{\partial p_1}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial z} dz, \quad t \in (0, T), \\ & \int_0^R \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial t} w_2(z; x) dx + \int_0^R u_2 \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial x} dx - u_2 \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial x} \Big|_{x=R} w_2(z; R) = \\ & = - \int_0^R \Delta u_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial x} dx + \Delta u_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} \Big|_{x=R} w_2(z; R), \quad t \in (0, T), \\ & \tilde{p}_1|_{t=0} = p_E, \quad \tilde{p}_2|_{t=0} = p_E. \end{aligned} \quad (65)$$

На каждом шаге определения $(n+1)$ -го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (6)–(11), (33) сопряженная задача имеет вид (42). Выбирая в (42) $w_1 = \tilde{p}_1(u_{n+1}) - p_1(u_n)$, $w_2 = \tilde{p}_2(u_{n+1}) - p_2(u_n)$, с учетом (65), (64) получаем

$$\begin{aligned} \langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle & \approx - \int_0^T \int_0^h \Delta u_{1n} \frac{\partial p_1}{\partial z} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} dz dt - \int_0^T \int_0^h \int_0^R \Delta u_{2n} \frac{\partial p_2}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} dx dz dt + \\ & + \int_0^T \int_0^h \Delta u_{2n} \frac{\partial p_2}{\partial x} \Big|_{x=R} \psi_2(t, R, z) dz dt. \end{aligned}$$

Следовательно, $J'_{u_n} \approx (\tilde{\psi}_n^1, \tilde{\psi}_n^2)$, где

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_n^1 & = - \frac{\partial p_1}{\partial z} \frac{\partial \psi_1}{\partial z}, \quad \tilde{\psi}_n^2 = - \int_0^R \frac{\partial p_2}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} dx - \frac{\partial p_2}{\partial x} \Big|_{x=R} \psi_2(t, R, z), \\ \|J'_{u_n}\|^2 & = \int_0^T \int_0^h (\tilde{\psi}_n^1)^2 dz dt + \int_0^T \int_0^h \tilde{\psi}_n^2 dz dt. \end{aligned}$$

ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРА b_2 НА ОСНОВЕ СЛАБОЙ ЗАДАЧИ СОСТОЯНИЯ

Пусть состояние системы описывается слабой задачей (47). Функционал-невязка имеет вид (46). Для приращения $\theta = (\theta_1(t, z), \theta_2(t, x, z))$ решения $U = (p_1(t, z), p_2(t, x, z))$, соответствующего приращению Δu , и решения $u \in \mathcal{U}$ ($u + \Delta u \in \mathcal{U}$) задачи (46), (47), имеем задачу: определить функцию $\theta = (\theta_1(t, z), \theta_2(t, x, z)) \in H$, которая $\forall (w_1(z), w_2(z; x)) \in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$\int_0^h \frac{\partial \theta_1(t, z)}{\partial t} w_1(z) dz + \int_0^h b_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial z} dz + \beta \frac{1}{R} \int_0^h \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R \theta_2(t, x, z) dx w_1 dz = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^R \frac{\partial \theta_2}{\partial t} w_2(z; x) dx + \int_0^R u \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial x} dx - u \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=R} w_2(z; R) = \\
& = - \int_0^R \Delta u \frac{\partial p_2}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial x} dx + \Delta u \frac{\partial p_2}{\partial x} \Big|_{x=R} w_2(z; R), \quad t \in (0, T), \\
& \theta_1|_{t=0} = 0, \quad \theta_2|_{t=0} = 0.
\end{aligned} \tag{66}$$

На каждом шаге определения $(n+1)$ -го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (47), (46) определим функцию $\tilde{p}(u_{n+1}) = (\tilde{p}_1(u_{n+1}), \tilde{p}_2(u_{n+1}))$ как решение задачи: определить функцию $\tilde{p}(u_{n+1}) \in H$, которая $\forall (w_1(z), w_2(z; x)) \in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned}
& \int_0^h \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial t} w_1(z) dz + \int_0^h b_1 \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial z} dz + \int_0^h \beta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial t} dx w_1(z) dz = 0, \\
& \int_0^R \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial t} w_2(z; x) dx + \int_0^R u \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial x} dx - u \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial x} \Big|_{x=R} w_2(z; R) = \\
& = - \int_0^R \Delta u \frac{\partial p_2}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial x} dx + \Delta u \frac{\partial p_2}{\partial x} \Big|_{x=R} w_2(z; R), \quad t \in (0, T), \\
& \tilde{p}_1|_{t=0} = p_E(z), \quad \tilde{p}_2|_{t=0} = p_E.
\end{aligned} \tag{67}$$

Сопряженная задача имеет вид (53), на основании которого и с учетом (67), (66) получаем

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle \approx - \int_0^T \int_0^h \int_0^R \Delta u \frac{\partial p_2}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} dx dz dt + \int_0^T \int_0^h \Delta u \frac{\partial p_2}{\partial x} \Big|_{x=R} \psi_2(t, R, z) dz dt.$$

Следовательно,

$$J'_{u_n} \approx - \int_0^R \frac{\partial p_2}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} dx + \frac{\partial p_2}{\partial x} \Big|_{x=R} \psi_2(t, R, z).$$

ИДЕНТИФИКАЦИИ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Пусть состояние системы описывается начально-краевой задачей

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial p_1}{\partial t} = b_1 \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} - \beta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R p_2(t, x, z) dx, \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T), \\
& \frac{\partial p_2}{\partial t} = b_2 \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}, \quad x \in (0, R), \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T), \\
& p_1(0, z) = u_1(z), \quad p_2(0, x, z) = u_2(x, z), \quad p_1|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0, \\
& \frac{\partial p_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad p_2(t, x, z)|_{x=R} = p_1(t, z),
\end{aligned} \tag{68}$$

где $u_1(z), u_2(x, z)$ неизвестны.

Пусть равенствами (45) заданы следы решения $U = (p_1(t, z), p_2(t, x, z))$ задачи (68).

Определение 14. При каждом фиксированном $u = (u_1(z), u_2(x, z)) \in \mathcal{U} = C([0, h]) \times C([0, R] \times [0, h])$ обобщенным (слабым) решением начально-краевой задачи (68) называется вектор-функция $U = (p_1(t, z), p_2(t, x, z)) \in H$, которая $\forall (w_1(z), w_2(z; x)) \in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$\int_0^h \frac{\partial p_1}{\partial t} w_1(z) dz + \int_0^h b_1 \frac{\partial p_1}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial z} dz + \int_0^h \beta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R p_2(t, x, z) dx w_1(z) dz = 0,$$

$$\int_0^R \frac{\partial p_2}{\partial t} w_2(z; x) dx + \int_0^R b_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial x} dx - b_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} \Big|_{x=R} w_2(z; R) = 0,$$

$$p_1(0, z) = u_1(z), \quad p_2(0, x, z) = u_2(x, z). \quad (69)$$

Полученную задачу (69), (45) будем решать с помощью градиентных методов (36), (37). На каждом шаге итерационного процесса (36) сопряженная задача имеет вид

$$-\int_0^h \frac{\partial \psi_1(t, z)}{\partial t} w_1(z) dz + \int_0^h b_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial z} dz = \sum_{i=1}^m (p_1(u_n; t, d_i) - f_i(t)) w_1(d_i), \quad t \in (0, T],$$

$$-\int_0^R \frac{\partial \psi_2(t, x, z)}{\partial t} w_2(z; x) dx + \int_0^R b_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial w_2(z; x)}{\partial x} dx -$$

$$-b_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} \Big|_{x=R} \psi_2(z; R) + \beta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R w_2 dx \psi_1(t, z) = 0, \quad \psi_1|_{t=T} = 0, \quad \psi_2|_{t=T} = 0. \quad (70)$$

На основании (70) с учетом (69) получаем

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle = \int_0^h \Delta u_1 \psi_1(0, z) dz + \int_0^h \int_0^R \Delta u_2 \psi_2(0, x, z) dx dz.$$

Следовательно, $J'_{u_n} = \tilde{\psi}_n$, где $\tilde{\psi}_n = \{\tilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^2$, $\tilde{\psi}_n^1 = \psi_1(0, z)$, $\tilde{\psi}_n^2 = \psi_2(x, z)$,

$$\|J'_{u_n}\|^2 = \int_0^h (\tilde{\psi}_n^1)^2 dz + \int_0^h \int_0^R (\tilde{\psi}_n^2)^2 dx dz.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петрик М.Р. Нелинейная математическая модель двухуровневого переноса типа «фильтрация-консолидация» // Пробл. управления и информатики. — 2010. — № 2. — С. 74–85.
2. Sergienko I.V., Deineka V.S. Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. — New York: Kluwer Acad. Publ., 2005. — 400 p.
3. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1988. — 288 с.
4. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. — Киев: Наук. думка, 2009. — 640 с.
5. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Системный анализ упругих и термоупругих неоднородных тел. — Киев: Наук. думка, 2012. — 512 с.

Поступила 18.07.2013