УДК 519.6

И.В. СЕРГИЕНКО, О.Н. ЛИТВИН, О.О. ЛИТВИН, А.В. ТКАЧЕНКО, О.Л. ГРИЦАЙ

ИНТЕРЛИНАЦИЯ ЭРМИТОВОГО ТИПА НА СИСТЕМЕ НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ЛИНИЙ (Обзор)

Аннотация. Излагается метод построения операторов интерлинации эрмитового типа функций двух и трех переменных в декартовой и цилиндрической системах координат для случая, когда экспериментальные данные — следы функции и ее частных производных до заданного порядка по одной или двум переменным заданы на системе непересекающихся линий. Эти операторы автоматически сохраняют класс дифференцирумости приближаемой функции. На их основе предложен метод построения операторов интерполяции функций двух переменных эрмитового типа в цилиндрической системе координат с сохранением класса дифференцируемости, которому принадлежит приближаемая функция. Для случая, когда производные некоторых порядков или все производные неизвестны, их значения можно считать параметрами управления изогеометрическими свойствами поверхности, которая строится.

Ключевые слова: интерполяция эрмитового типа, интерлинация эрмитового типа, интерлинация с сохранением класса дифференцированности, изогеометрические свойства конструируемой поверхности.

ВВЕДЕНИЕ

В задачах приближения функций двух и более переменных информация задается значениями в заданной системе точек или следами на системе пространственных непересекающихся или пересекающихся линий, при этом оператор приближения функции $f(x, y, z)$ в декартовой системе координат или функции $f(r, \varphi, z)$ в цилиндрической системе координат должен удовлетворять определенному множеству требований. Отметим некоторые из них:

— принадлежность функций, принимающих участие в конструировании приближающего оператора, требуемому классу дифференцируемости в области задания переменных или различным классам дифференцируемости в различных ее подобластях;

— приближающая функция должна интерполировать функцию f в заданных точках, интерлинировать функцию f на заданных линиях, интерфлетировать функцию f на заданных поверхностях;

— приближающая функция должна иметь заданные значения проекций — криволинейных интегралов 1-го рода от функции f вдоль заданной системы прямых;

— приближающая функция должна совпадать с известными функциями в заданных подобластях области задания функции f;

— приближающая функция должна обеспечивать необходимую точность приближения;

— приближающая функция должна сохранять изогеометрические свойства, полученные путем анализа экспериментальных данных — возрастание или убывание, выпуклость или вогнутость в некоторых подобластях заданной области.

Удовлетворение всем указанным требованиям — достаточно сложная задача, которая на данное время полностью не решена. Настоящая статья посвящена обзору методов построения функций двух и трех переменных с заданными следами, а также следами их некоторых производных на произвольной системе непересекающихся кривых в декартовой или цилиндрической системе координат с автоматическим сохранением класса дифференцируемости, которому принадлежит приближаемая функция f.

Задача построения функиий двух и более переменных, удовлетворяющих заданным краевым условиям на системе линий, принадлежащих границе некоторой области и сохраняющих нужный класс дифференцируемости, является одной из ключевых задач теории приближения функций многих переменных [1, 3–9,11]. Ее решению посвящены работы [2, 12–19]. В [16–19] исследовались операторы восстановления функций двух и трех переменных с помощью операторов интерлинации функций эрмитового типа на системе непересекающихся кривых, сохраняющие класс дифференцируемости, которому принадлежит приближаемая функция. При этом используются ее следы и следы ее частных производных по некоторым переменным на указанной системе непересекающихся кривых.

В качестве важного приложения построенных формул интерлинации эрмитового типа предлагается метод построения на их основе формул эрмитовой интерполяции функций в точках конечного множества неизвестных замкнутых линий с автоматическим сохранением требуемого класса дифференцируемости и возможностью управления изогеометрическими свойствами поверхности [10]. Эта задача возникает, в частности, при конструировании лопаток авиадвигателей. Указанные неизвестные линии в этом случае являются линиями тока на поверхности лопаток. Одной из наиболее сложных задач, возникающих при этом, является автоматическое обеспечение соответствующей гладкости конструированной поверхности и изогеометрических свойств. Данная статья посвящена анализу работ [16–19], где исследуется случай интерлинации с автоматическим сохранением класса дифференцируемости функций двух и трех переменных на системе непересекающихся кривых.

Изложим основные утверждения работы.

1. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ С СОХРАНЕНИЕМ КЛАССА $C^r(R^2)$ ПО ИХ СЛЕДУ И СЛЕДАМ ИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПО ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ДО ФИКСИРОВАННОГО ПОРЯДКА НА ЛИНИИ

Будем считать, что оператор L сохраняет класс дифференцируемости приближаемой функции f, если $f \in C^r(R^n) \Rightarrow Lf \in C^r(R^n)$. При $f \in C^r(R^n) \Rightarrow$ $\Rightarrow Lf \in C^q(R^n)$, $q < r$, оператор L не сохраняет класса дифференцируемости функции f. В частности, классические интерполяционные операторы Эрмита по одной из переменных не сохраняют класса дифференцируемости функций вида

$$f(x, y) = |x + y - 1|^{2q+1} \in C^{2q}(R^2), \quad f \notin C^{2q+1}(R^2),$$

$$f(x, y) = |x + y - 1|^{2q+1}(x + y - 1) \in C^{2q+1}(R^2), \; f \notin C^{2q+2}(R^2).$$

Рассмотрим методы построения операторов приближения функций двух переменных с сохранением класса дифференцируемости, которому принадлежит приближаемая функция, при условии, что следы этих операторов и следы их частных производных по одной из переменных до фиксированного порядка на заданной линии совпадают с соответствующими следами приближаемой функции.

Указанные операторы используются в разд. 2, 3 для построения формул интерлинации функций двух или трех переменных с сохранением класса дифференцируемости и с заданными следами, а также следами некоторых частных производных до фиксированного порядка на системе непересекающихся кривых в декартовой и цилиндрической системах координат. Они используются в разд. 4 для построения операторов интерполяции эрмитового типа в точках системы непересекающихся линий, уравнения которых неизвестны.

Отметим, что оператор Тейлора по одной переменной

$$T_N f(x, y) = \sum_{s=0}^{N} f^{(0,s)}(x, \gamma(x)) \frac{(y-\gamma(x))^s}{s!},\ f^{(0,s)}(x, \gamma(x)) = \left. \frac{\partial^s f(x, y)}{\partial y^s} \right|_{y=\gamma(x)},$$

$$\gamma(x) \in C^r(R),$$

имеет свойства

$$\left. \frac{\partial^q T_N f(x, y)}{\partial y^q} \right|_{y=\gamma(x)} = \left. \frac{\partial^q f(x, y)}{\partial y^q} \right|_{y=\gamma(x)} = f^{(0,q)}(x, \gamma(x)),\ 0 \le q \le N,$$

$$f \in C^r(R^2) \cap f^{(0,s)}(x, \gamma(x)) \in C^{r-s}(R^2) \cap f^{(0,s)}(x, \gamma(x)) \notin$$

$$\notin C^r(R),\ 0 \le s \le N \le r, \Rightarrow T_N f \in C^{r-N}(R^2) \cap T_N f \notin C^r(R^2).$$

Иными словами, этот оператор не сохраняет класса дифференцируемости $C^r(R^2)$ функции $f(x, y)$. Таким образом, оператор $T_N f(x, y)$ нельзя использовать вместо f без дополнительного анализа в тех задачах, где важным является требование для f непрерывности производных функций f порядка $r \ge 1$. Операторы, сохраняющие класс $C^r(R^2)$, впервые были построены в [12-15] для случая $\gamma(x) = 0$ в дискретной и интегральной формах. В частности, в дискретной форме оператор

$$L_N f(x, y) =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{N} \lambda_{0,\ell} f(x + \beta_{0,\ell} y, 0) + \sum_{s=1}^{N} \sum_{\ell=0}^{N} \lambda_{s,\ell} \int_0^{x+\beta_{s,\ell} y} f^{(0,s)}(t, 0) \frac{(x + \beta_{s,\ell} y - t)^{s-1}}{(s-1)!} dt$$

удовлетворяет условиям

$$f \in C^r(R^2) \cap f^{(0,s)} \in C^{r-s}(R^2) \cap f^{(0,s)}(x, \gamma(x)) \notin$$

$$\notin C^r(R),\ s = \overline{0, N},\ N \le r, \Rightarrow L_N f \in C^r(R^2),$$

$$\left. \frac{\partial^q L_N f(x, y)}{\partial y^q} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial^q f(x, y)}{\partial y^q} \right|_{y=0},\ q = \overline{0, N},$$

если неизвестные $\lambda_{s,\ell}$, $l = \overline{0, N}$, для каждого $s = \overline{0, N}$ находятся путем решения СЛАУ

$$\sum_{\ell=1}^{N} \lambda_{s,\ell} (\beta_{s,\ell})^p = \delta_{p,s},\ 0 \le p \le N, \tag{1}$$

при условиях $-1 \le \beta_{s,0} < \beta_{s,1} < \ldots < \beta_{s,N} \le 1$, $s = \overline{0, N}$; $\beta_{s,\ell}$ — заданные числа.

Ниже обобщим этот результат на случай, когда следы приближаемой функции и ее частных производных по переменной y до фиксированного порядка задаются на линии $y = \gamma(x) \in C^r(R)$. Рассмотрим оператор

$$O_N f(x, y) = \sum_{\ell=1}^{N} \lambda_{0,\ell} f(x + \beta_{0,\ell}(y - \gamma(x)), \gamma(x)) +$$

$$+\sum_{s=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{N}\lambda_{s,\ell}\int\limits_{0}^{x+\beta_{s,\ell}(y-\gamma(x))} f^{(0,s)}(t,\gamma(t))\frac{(x+\beta_{s,\ell}(y-\gamma(x)-t)^{s-1}}{(s-1)!}dt, \qquad (2)$$

неизвестные $\lambda_{s,\ell}$, $s=\overline{0, N}$, $\ell=\overline{0, N}$, для каждого значення $s\in[0, N]$ находятся из систем линейных алгебраических уравнений (1), имеющих единственное решение, так как их детерминанты $\det[\beta_{s,\ell}^{p}]_{\ell=\overline{0, N}}^{p=\overline{0, N}}\neq 0$, $s=\overline{0, N}$, являются детерминантами Вандермонда.

Теорема 1. Оператор $O_N f$ имеет свойства

$$f\in C^{r}(R^{2})\cap f^{(0,s)}(x,\gamma(x))\in C^{r-s}(R)\cap f^{(0,s)}(x,\gamma(x))\notin$$
$$\notin C^{r}(R),\ s=\overline{0, N},\Rightarrow O_N f\in C^{r}(R^{2}), \qquad (3)$$

$$\left.\frac{\partial^{q}O_N f(x, y)}{\partial y^{q}}\right|_{y=\gamma(x)}=\left.\frac{\partial^{q}f(x, y)}{\partial y^{q}}\right|_{y=\gamma(x)}=f^{(0,q)}(x,\gamma(x)),\ 0\le q\le N,\ N\le r. \qquad (4)$$

Замечание. При $\gamma(x)=0$ получаем $O_N f=L_N f$.

Введем оператор интегрального типа

$$D_N f(x, y)=\int\limits_{-b}^{b}G_0(\beta)f(x+\beta(y-\gamma(x)),\gamma(x))d\beta+$$
$$+\sum_{s=1}^{N}\int\limits_{-b}^{b}G_s(\beta)\int\limits_{0}^{x+\beta(y-\gamma(x))} f^{(0,s)}(t,\gamma(t))\frac{(x+\beta(y-\gamma(x))-t)^{s-1}}{(s-1)!}dtd\beta, \qquad (5)$$

где $b\ge 1$, $G_s(\beta)\in C^{r}[-b,b]$, $s=\overline{0, N}$, — заданные функции.

Теорема 2 [16]. Оператор $D_N f$ имеет свойства

$$f\in C^{r}(R^{2})\cap\gamma\in C^{r}(R)\Rightarrow D_N f\in C^{r}(R^{2}), \qquad (6)$$

$$\left.\frac{\partial^{q}D_N f(x, y)}{\partial y^{q}}\right|_{y=\gamma(x)}=\left.\frac{\partial^{q}f(x, y)}{\partial y^{q}}\right|_{y=\gamma(x)}=f^{(0,q)}(x,\gamma(x)),\ 0\le q\le N,\ N\le r, \qquad (7)$$

если $\gamma(x)\in C^{r}(R)$ и вспомогательные функции удовлетворяют условиям

$$\int\limits_{-b}^{b}G_s(\beta)\beta^{p}d\beta=\delta_{s,p},\ 0\le s,\ p\le N.$$

Рассмотрим примеры ядер интегральных операторов $D_N f(x, y)$.

Пример 1. Пусть $b=1$, $N\ge 1$. Для ядер полиномиального типа

$$G_{N,s}(\beta)=G_s(\beta)=\sum_{k=0}^{N}a_{s,k}\beta^{k},\ s=\overline{0, N},$$

коэффициенты $a_{s,k}$ находятся для каждого значения $s=\overline{0, N}$ из систем линейных алгебраических уравнений порядка $(N+1)$

$$\int\limits_{-1}^{1}G_s(\beta)\beta^{p}d\beta=\delta_{s,p},\ p=\overline{0, N}.$$

В частности,

$$G_0(\beta)=\frac{1}{2};\ G_1(\beta)=\frac{3}{2}\beta \text{ при } N=1;$$

$$G_0(\beta)=\frac{9}{8}-\frac{15}{8}\beta^2;\ G_1(\beta)=\frac{3}{2}\beta;\ G_2(\beta)=-\frac{15}{8}+\frac{45}{8}\beta^2 \text{ при } N=2.$$

Пример 2. Пусть $b=\infty,\ N\ge 1$. Для ядер вида

$$G_s(\beta)=e^{-\beta^2}\sum_{k=0}^{N}a_{s,k}\beta^k$$

коэффициенты $a_{s,k}$ находятся для каждого значення $s=\overline{0,N}$ из систем

$$\int_{-\infty}^{\infty}G_s(\beta)\beta^p d\beta=\delta_{s,p},\ p=\overline{0,N},\Rightarrow\sum_{k=0}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta^2}\beta^{k+p}d\beta a_{s,k}=\delta_{s,p},\ p=\overline{0,N}.$$

Например, для $N=1, b=\infty$

$$G_0(\beta)=\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta^2}d\beta\right)^{-1}e^{-\beta^2};\ G_1(\beta)=\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta^2}\beta^2 d\beta\right)^{-1}e^{-\beta^2}\beta.$$

2. ЭРМИТОВА ИНТЕРЛИНАЦИЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ НА ЗАДАННОЙ СИСТЕМЕ НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ЛИНИЙ С СОХРАНЕНИЕМ КЛАССА $C^r(R^2)$

Операторы такого типа впервые были построены в [13–15] в дискретной и интегральной формах для прямых линий интерлинации. В частности, в дискретной форме оператор

$$L_{MN}f(x,y)=\sum_{k=1}^{M}h_{M,k,0}(y)\sum_{\ell=0}^{N}\lambda_{0,\ell}f(x+\beta_{0,\ell}(y-y_k),\,y_k)+$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{s=1}^{N}h_{M,k,s}(y)\sum_{\ell=0}^{N}\lambda_{s,\ell}\int_{0}^{x+\beta_{s,\ell}(y-y_k)}f^{(0,s)}(t,\,y_k)\frac{(x+\beta_{s,\ell}(y-y_k)-t)^{s-1}}{(s-1)!}dt$$

удовлетворяет условиям

$$f\in C^r(R^2)\cap f^{(0,s)}\in C^{r-s}(R)\cap f^{(0,s)}\notin$$

$$\notin C(R),\ 0\le s\le N\le r,\Rightarrow L_{MN}f\in C^r(R^2),$$

$$\left.\frac{\partial^q L_{MN}f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=y_\ell}=\left.\frac{\partial^q f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=y_\ell}=f^{(0,q)}(x,y_\ell),\ 0\le q\le N,\ 1\le\ell\le M,$$

если неизвестные $\lambda_{s,\ell},\ \ell=\overline{0,N}$, для каждого $s=\overline{0,N}$ находятся из системы (1).

Обобщим этот результат на случай, когда следы приближаемой функции и следы ее частных производных по переменной y до фиксированного порядка $N\le r$ задаются на линиях $y=\gamma_k(x)\in C^r(R),\ k=\overline{1,M}$. Рассмотрим оператор

$$O_{M,N}f(x,y)=\sum_{k=1}^{M}h_{M,k,0}(x,y)\sum_{\ell=0}^{N}\lambda_{0,\ell}f(x+\beta_{0,\ell}(y-\gamma_k(x)),\gamma_k(x))+$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{s=1}^{N} h_{M,k,s}(x,y)\times$$

$$\times\sum_{\ell=0}^{N}\lambda_{s,\ell}\int_{0}^{x+\beta_{s,\ell}(y-\gamma_k(x))} f^{(0,s)}(t,\gamma_k(t))\frac{(x+\beta_{s,\ell}(y-\gamma_k(x))-t)^{s-1}}{(s-1)!}dt, \qquad (8)$$

где $\beta_{s,\ell}\in[-b,b]$, $s=\overline{0,N}$, $\ell=\overline{0,N}$, — заданные различные числа, неизвестные $\lambda_{s,\ell}$, $s=\overline{0,N}$, $\ell=\overline{0,N}$, для каждого значення $s\in[0,N]$ находятся путем решения СЛАР (1).

Теорема 3 [17]. Операторы $O_{M,N}f$ имеют свойства

$$f\in C^r(R^2)\cap f^{(0,s)}\in C^{r-s}(R)\cap f^{(0,s)}\notin$$

$$\notin C^{r-s+1}(R),\ 0\le s\le N\le r, \Rightarrow O_{M,N}f\in C^r(R^2), \qquad (9)$$

$$\left.\frac{\partial^q O_{M,N}f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma_l(x)}=\left.\frac{\partial^q f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma_l(x)}=f^{(0,q)}(x,\gamma_l(x)),$$

$$q=\overline{0,N},\ N\le r,\ l=\overline{1,M}. \qquad (10)$$

Замечание. При $\gamma_k(x)=y_k$, $k=\overline{1,M}$, получаем $O_{M,N}f=L_{M,N}f$.

Введем в рассмотрение операторы интерлинации интегрального типа

$$D_{M,N}f(x,y)=\sum_{k=1}^{M}h_{M,k,0}(x,y)\int_{-b}^{b}G_{k,0}(\beta)f(x+\beta(y-\gamma_k(x)),\gamma_k(x))d\beta+ \qquad (11)$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{s=1}^{N}h_{M,k,s}(x,y)\times$$

$$\times\int_{-b}^{b}G_{k,s}(\beta)\int_{0}^{x+\beta(y-\gamma_k(x))}f^{(0,s)}(t,\gamma_k(t))\frac{(x+\beta(y-\gamma_k(x))-t)^{s-1}}{(s-1)!}dtd\beta.$$

Теорема 4 [17]. Операторы $D_{M,N}f$ имеют свойства

$$f\in C^r(R^2)\cap f^{(0,s)}(x,\gamma_l(x))\in C^{r-s}(R)\cap f^{(0,s)}(x,\gamma_i(x))\notin$$

$$\notin C^r(R)\Rightarrow D_{M,N}f\in C^r(R^2), \qquad (12)$$

$$\left.\frac{\partial^q D_{M,N}f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma_l(x)}=\left.\frac{\partial^q f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma_l(x)}=f^{(0,q)}(x,\gamma_l(x))\in C^{r-q}(R),$$

$$0\le q\le N,\ N\le r;\ l=\overline{1,M}, \qquad (13)$$

если $\int_{-b}^{b}G_{k,s}(\beta)\beta^p d\beta=\delta_{s,p}$, $0\le s$, $p\le N$; $k=\overline{1,M}$.

Отметим, что в формуле (8) для $O_{M,N}f$ ядра могут зависеть от переменной интегрирования и от переменных *x*, *y*. Например, в известной формуле Пуассона для полуплоскости

$$Pu(x, y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t,0)dt}{(x-t)^2+y^2} = \int_{-\infty}^{\infty}K(x-t, y)u(t,0)dt,$$

$$\Delta Pu(x, y) = 0,\ y > 0,\ Pu(x,0) = u(x,0),\ x \in R,$$

ядро имеет вид $G^*(x, y, t) = \dfrac{y}{\pi}\dfrac{1}{(x-t)^2+y^2} = K(x-t, y); K(x, y) = \dfrac{y}{\pi}\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

В [9] приведено обобщение этой формулы на случай полигармонического уравнения.

3. ОПЕРАТОРЫ ИНТЕРЛИНАЦИИ ФУНКЦИЙ $f(r, \varphi, z)$ НА ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ЗАМКНУТЫХ НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ЛИНИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Рассмотренные ранее операторы позволяют восстанавливать приближенно функции $f(x, y)$, если их следы, а также следы их производных по переменной y известны на системе непересекающихся кривых, заданных явно соответствующими уравнениями в декартовой системе координат. Приведем и исследуем соответствующие формулы для случая, когда приближаемая функция задана следами на системе кривых в цилиндрической системе координат. Считаем, что функция (вообще говоря, неизвестная) $f(r, \varphi, z) \in C^{\nu}(D)$, $D = R_+ \times [0, 2\pi] \times R \subset R^3$, где $R_+ = [0, +\infty]$, задается на системе непересекающихся замкнутых кривых $\Gamma_k = \{(r, \varphi, z)\colon\ r = r_k(\varphi) \in C^{\nu}[0, 2\pi],\ z = z_k(\varphi) \in \in C^{\nu}[0, 2\pi]\}$, $k = \overline{1, M}$, своими следами и следами своих производных $f_{k,s}(\varphi) = = f^s(r_k(\varphi), \varphi, z_k(\varphi)) = \dfrac{\partial^s f}{\partial r^{s_1}\partial z^{s_2}}$, $k = \overline{1, M}$; $s = (s_1, s_2)$, $|s| = s_1 + s_2$, $|s| = \overline{0, N}$. Введем обозначения $g_k(r, \varphi, z, \beta_1, \beta_2) = \varphi + \beta_1(r - r_k(\varphi)) + \beta_2(z - z_k(\varphi))$, $k = \overline{1, M}$, с учетом, что $\Gamma_k \cap \Gamma_p \neq \varnothing$, $k, p = \overline{1, M}$, $k \neq p$,

$$g_k(r_k(\varphi), \varphi, z_k(\varphi), \beta_1, \beta_2) = \varphi; \quad g_k(r_l(\varphi), \varphi, z_l(\varphi), \beta_1, \beta_2) =$$
$$= \varphi + \beta_1(r_l(\varphi) - r_k(\varphi)) + \beta_2(z_l(\varphi) - z_k(\varphi)).$$

Рассмотрим систему функций $h_{k,s}(r, \varphi, z)$, $G_{s_1}(\beta_1)$, $K_{s_2}(\beta_2)$, $k = \overline{1, M}$; $s_1, s_2 = \overline{0, N}$, со свойствами

$$\left.\frac{\partial^{p+q}}{\partial r^p \partial z^q} h_{k,s}(r, \varphi, z)\right|_{\Gamma_l} = \delta_{k,l}\delta_{p, N-s_1}\delta_{q, N-s_2}; k, l = \overline{1, M};\ p+q, s_1+s_2 = \overline{0, N},$$

$$\int_0^{2\pi} G_{s_1}(\beta_1)\beta_1^{m_1}d\beta_1 = \delta_{0, m_1};\ s_1, m_1 = \overline{0, N};$$

$$\int_0^1 K_{s_2}(\beta_2)\beta_2^{m_2}d\beta_2 = \delta_{0, m_2};\ s_2, m_2 = \overline{0, N}.$$

Предположим искомый оператор интерлинации

$$E_{M,N}f(r, \varphi, z) =$$

$$= \sum_{k=1}^{M} h_{k,0,0}(r, \varphi, z)\int_0^{2\pi} G_0(\beta_1)\int_0^1 K_0(\beta_2)f_{k,0,0}(g_k(\varphi, r, z, \beta_1, \beta_2))d\beta_1 d\beta_2 +$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{|s|=1}^{N} h_{k,s}(r,\varphi,z)\int_0^{2\pi} G_{s_1}(\beta_1)\int_0^1 K_{s_2}(\beta_2)\times$$

$$\times\int_0^{g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2)} f_{k,s}(u)\frac{(g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2)-u)^{|s|-1}}{(|s|-1)!}dud\beta_1 d\beta_2. \qquad (14)$$

Теорема 5. Если $f_{k,s}(\varphi)\in C^{\nu-|s|}[0,2\pi], |s|=s_1+s_2=\overline{0,N}, N\le\nu$, то $\forall\beta_1\in$ $\in[0,2\pi]$, $\forall\beta_2\in[0,1]$

$$U_{k,0,0}(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2)=f_{k,0,0}(g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2))\in C^{\nu}(D),\ D=R_+\times[0,2\pi]\times R;$$

$$U_{k,s}(r,\varphi,z)=\int_0^{g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2)} f_{k,s}(u)\frac{(g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2)-u)^{|s|-1}}{(|s|-1)!}du\in C^{\nu}(D).$$

Теорема 6. Если выполняются предположения теоремы 5, то функции

$$V_{k,0,0}(r,\varphi,z)=\int_0^{2\pi} G_0(\beta_1)\int_0^1 K_0(\beta_2)f_{k,0,0}(g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2))d\beta_1 d\beta_2,$$

$$V_{k,s}(r,\varphi,z)=\int_0^{2\pi} G_{s_1}(\beta_1)\times$$

$$\times\int_0^1 K_{s_2}(\beta_2)\int_0^{g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2)} f_{k,s}(u)\frac{(g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2)-u)^{|s|-1}}{(|s|-1)!}dud\beta_1 d\beta_2$$

имеют свойства
$$\left.\frac{\partial^{p+q}}{\partial r^p\partial z^q}V_{k,s}(r,\varphi,z)\right|_{\Gamma_k}=$$

$$=\begin{cases} 0,\ (p=\overline{0,s_1-1}\wedge q=\overline{0,s_2})\vee(p=\overline{0,s_1}\wedge q=\overline{0,s_2-1}),\\ f_{k,s}(\varphi),\ p=s_1,\ q=s_2,\\ \left.\int_0^{2\pi} G_{s_1}(\beta_1)\int_0^1 K_{s_2}(\beta_2)\frac{\partial^{p-s_1+q-s_2}}{\partial r^{p-s_1}\partial z^{q-s_2}}f_{k,s}(g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2))d\beta_1 d\beta_2\right|_{\Gamma_k}=0,\\ (p=\overline{s_1,N}\wedge q=\overline{s_2+1,N})\vee(p=\overline{s_1+1,N}\wedge q=\overline{s_2,N}). \end{cases}$$

Теорема 7 [18]. Если выполняются предположения теоремы 5 и 6, то оператор $E_{M,N}f(r,\varphi,z)$ удовлетворяет условиям

$$E_{M,N}f(r,\varphi,z)\in C^{\nu}(D), \qquad (15)$$

$$\left.\frac{\partial^{p+q}}{\partial r^p\partial z^q}E_{M,N}f(r,\varphi,z)\right|_{\Gamma_l}=f_{l,p,q}(\varphi),\ l=\overline{1,M},\ p+q=\overline{0,N};\ 0\le\varphi\le 2\pi. \qquad (16)$$

Теорема 8 [18]. Функции $h_{k,s}(r,\varphi,z)$ представимы в виде

$$h_{k,s}(r,\varphi,z)=s_{N,k,s_1}(r,\varphi)s_{N,k,s_2}(z,\varphi), \qquad (17)$$

где $s_{N,k,s_1}(r,\varphi)\in C^{\nu}(R_+\times[0,2\pi])$, $s_{N,k,s_2}(z,\varphi)\in C^{\nu}(R\times[0,2\pi])$ — базисные сплайны степени $N+1$ со свойствами

$$\frac{\partial^p s_{N,k,s_1}}{\partial r^p}(r_l,\varphi)=\delta_{k,l}\delta_{p,s_1};\ k,\ l=\overline{0,\ M};\ p,\ s_1=\overline{0,\ N};$$

$$\frac{\partial^q s_{N,k,s_2}}{\partial z^q}(z_l,\varphi)=\delta_{k,l}\delta_{q,s_2};\ k,\ l=\overline{0,\ M};\ q,\ s_2=\overline{0,\ N}.$$

4. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЭРМИТОВОГО ТИПА В ТОЧКАХ СИСТЕМЫ НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ЛИНИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

1. Построение операторов интерлинации. Зададим систему M линий $\Gamma_k:\{(r,\varphi,z): r=r_k(\varphi)=f(\varphi,z_k(\varphi))\in C^{\nu}[0,2\pi],\ z=z_k(\varphi)\in C^{\nu}[0,2\pi]\}$, $k=\overline{1,M}$, а также следы функции

$$r=f(\varphi,z)\in C^{\nu}(D),\ D=\{(\varphi,z):\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le z\le H\}$$

и ее производных до порядка N по z на этих линиях:

$$\frac{\partial^p f}{\partial z^p}(\varphi,z_k(\varphi))=f_{k,p}(\varphi),\ k=\overline{1,\ M},\ p=\overline{0,\ N}.$$

Введем обозначение $g_k(\varphi,z,\beta)=\varphi+\beta(z-z_k(\varphi))$ и систему функций $h_{k,s}(\varphi,z)$, $G_s(\beta)$, $k=\overline{1,\ M}$; $s=\overline{0,\ N}$, со свойствами

$$\left.\frac{\partial^q}{\partial z^q}h_{k,s}(\varphi,z)\right|_{\Gamma_l}=\delta_{k,l}\delta_{q,N-s};\ k,l=\overline{1,\ M};\ q,s=\overline{0,\ N},$$

$$\int_0^{2\pi}G_s(\beta)\beta^m d\beta=\delta_{0,m};\ s,m=\overline{0,\ N}.$$

Теорема 9 [19]. Если $f_{k,s}(\varphi)\in C^{\nu-s}[0,2\pi]$, $s=\overline{0,\ N}$, $N\le\nu$, то $\forall\beta\in[0,2\pi]$

$$U_{k,0}(\varphi,z,\beta)=f_{k,0}(g_k(\varphi,z,\beta))\in C^{\nu}(D^*),$$

$$D^*=\{(\varphi,z,\beta):\ [0,2\pi]\times[0,H]\times[0,2\pi]\},$$

$$U_{k,s}(\varphi,z,\beta)=\int_0^{g_k(\varphi,z,\beta)}f_{k,s}(u)\frac{(g_k(\varphi,z,\beta)-u)^{s-1}}{(s-1)!}du\in C^{\nu}(D^*).$$

Теорема 10. Если выполняются предположения теоремы 9, то функции

$$V_{k,0}(\varphi,z)=\int_{-1}^{1}G_0(\beta)f_{k,0}(g_k(\varphi,z,\beta))d\beta\in C^{\nu}(D,D=[0,2\pi]\times[0,H]),$$

$$V_{k,s}(\varphi,z)=\int_{-1}^{1}G_s(\beta)\int_0^{g_k(\varphi,z,\beta)}f_{k,s}(u)\frac{(g_k(\varphi,z,\beta)-u)^{s-1}}{(s-1)!}dud\beta$$

имеют свойства

$$V_{k,s}(\varphi, z) \in C^{\nu}(D^*), \; k=\overline{1, M}, s=\overline{0, N}, \; \frac{\partial^q}{\partial z^q} V_{k,0}(\varphi, z)\Bigg|_{\Gamma_k} = \begin{cases} f_{k,0}(\varphi), \; q=0, \\ 0, \; 1 \le q \le N; \end{cases} \tag{18}$$

$$\frac{\partial^q}{\partial z^q} V_{k,s}(\varphi, z)\Bigg|_{\Gamma_k} = \begin{cases} 0, \; 0 \le q \le s-1, \\ f_{k,s}(\varphi), \; q=s; \end{cases}$$

$$\frac{\partial^q}{\partial z^q} V_{k,s}(\varphi, z)\Bigg|_{\Gamma_k} = \int_{-1}^{1} G_s(\beta) \frac{\partial^{q-s}}{\partial z^{q-s}} f_{k,s}(g_k(\varphi, z, \beta)) d\beta \Bigg|_{\Gamma_k} = 0, \tag{19}$$

$$s < q \le N; \; q, \; s \le N.$$

Строим оператор интерлинации эрмитового типа в виде

$$O_{MN} f(\varphi, z) = \sum_{k=1}^{M} h_{k,0}(\varphi, z) \int_{-1}^{1} G_0(t) f_{k,0}(\varphi + t(z - z_k(\varphi))) dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{M} \sum_{s=1}^{N} h_{k,s}(\varphi, z) \int_{-1}^{1} G_s(\beta) \int_{0}^{\varphi+\beta(z-z_k(\varphi))} f_{k,s}(u) \frac{(\varphi + \beta(z - z_k(\varphi)) - u)^{s-1}}{(s-1)!} du d\beta \,. \tag{20}$$

Теорема 11 [19]. Оператор $O_{MN} f(\varphi, z)$ имеет свойства

$$f_{k,s}(\varphi) \in C^{\nu-s}[0, 2\pi], \; k=\overline{1, M}; \; s=\overline{0, N}, \Rightarrow O_{MN} f(\varphi, z) \in C^{\nu}(D), \tag{21}$$

и для того чтобы

$$\frac{\partial^p O_{MN} f}{\partial z^p}(\varphi, z_k(\varphi)) = f_{k,p}(\varphi), \; k=\overline{1, M}, \; p=\overline{0, N}, \tag{22}$$

достаточно выполнения условий

$$h_{k,s}(\varphi, z) \in C^{\nu}(D), \; k=\overline{1, M}; \; s=\overline{0, N},$$

$$\frac{\partial^q h_{k,p}}{\partial z^q}(\varphi, z_l(\varphi)) = \delta_{k,l} \delta_{p,q}, \; k, \; l=\overline{1, M}; \; p, q=\overline{0, N}. \tag{23}$$

2. Построение операторов интерполяции эрмитового типа на нерегулярной сетке узлов, размещенных на произвольной системе непересекающихся линий поверхности с сохранением класса $C^{\nu}(D)$. Построение проводится в виде

$$E_{MN} f(\varphi, z) = \sum_{k=1}^{M} h_{k,0}(\varphi, z) \int_{-1}^{1} G_0(\beta) sp_{k,0}(\varphi + \beta(z - sp_k(\varphi))) d\beta +$$

$$+ \sum_{k=1}^{M} \sum_{s=1}^{m} h_{k,s}(\varphi, z) \int_{-1}^{1} G_s(\beta) \int_{0}^{\varphi+\beta(z-sp_k(\varphi))} sp_{k,s}(u) \frac{(\varphi + \beta(z - sp_k(\varphi)) - u)^{s-1}}{(s-1)!} du d\beta, \tag{24}$$

где $sp_{k,s}(\varphi) \in C^{\nu-s}[0, 2\pi]$, $sp_{k,s}^{(p)}(\varphi_j) = r_{k,j}^{p} \delta_{0,p}$; $sp_k(\varphi_j) = r_{k,j}^{0}$, $k=\overline{1, M}$; $p, s=\overline{1, N}$; $j=\overline{0, Q_k}$.

Теорема 12 [19]. Если выполняются утверждения теоремы 11, то

$$sp_{k,s}(\varphi) \in C^{\nu-s}[0, 2\pi], \; k=\overline{1, M}; \; s=\overline{0, N}, \Rightarrow E_{MN} f(\varphi, z) \in C^{\nu}(D); \tag{25}$$

$$sp_{k,s}(\varphi_j) = r_{k,j}^{(s)}, \; k=\overline{1, M}; \; s=\overline{0, N}; \; j=\overline{1, Q_k}, \Rightarrow \frac{\partial^p E_{Mm} f}{\partial z^p}(\varphi_j, z_{k,j}) = r_{k,j}^{(p)},$$

$$k=\overline{1, M}; \; s=\overline{0, N}; \; j=\overline{1, Q_k}. \tag{26}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены формулы построения операторов интерлинации эрмитового типа с автоматическим сохранением требуемого класса дифференцируемости. Эти операторы интерлинации используются для построения операторов интерполяции, которые позволяют вычислять функцию f в произвольных точках только по интерполяционным данным. Предлагается использовать их для интерполяции функции f и ее частных производных до порядка N по переменной z в точках воображаемых линий интерлинации, считая заданными только дискретные наборы значений приближаемой функции и ее производных по переменной z в указанных точках воображаемых линий интерлинации. Неизвестные производные можно использовать для сохранения изогеометрических свойств конструируемой поверхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Системный анализ. — К.: Наук. думка, 2013. — 500 с.
2. Сергієнко І.В., Задірака В.К., Литвин О.М. Елементи загальної теорії оптимальних алгоритмів і суміжні питання. — К.: Наук. думка, 2012. — 404 с.
3. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1969. — 480 с.
4. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975. — 480 с.
5. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — 1973. — 342 с.
6. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979. — 318 с.
7. Хермандер Л. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. — М.: Мир, 1986. — 455 с.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966. — 724 с.
9. Шилов Г.Е. Математический анализ. 2-й специальный курс. — М.: Наука, 1965. — 327 с.
10. Квасов Б.И. Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. — М.: Физматлит, 2006. — 360 с.
11. Математическая энциклопедия / Под ред. И.М. Виноградова: в 5 т. — М.: Сов. энциклопедия, 1984. — Т.5. — 1215 с.
12. Литвин О.М. Інтерполяція функцій та їх нормальних похідних на гладких лініях в R^n // Доп. АН УРСР. — Сер. А. — 1984. — № 7. — С. 15–19.
13. Литвин О.М. Точний розв'язок задачі Коші для рівняння $\prod_{i=0}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t}-a_i^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t)=g(x,t)$ // Там же. — 1991. — № 3. — С. 12–17.
14. Литвин О.М. Побудова функцій n змінних з заданими нормальними похідними на $R^m (1 \le m \le n-1)$ із збереженням класу $C^r(R^n)$ // Там же. — 1987. — № 5. — С. 13–17.
15. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. — Харків: Основа, 2002. — 544 с.
16. Литвин О.М., Литвин О.О., Ткаченко О.В., Грицай О.Л. Відновлення функцій двох змінних із збереженням класу $C^r(R^2)$ за допомогою їх слідів та слідів їх похідних до фіксованого порядку на заданій лінії // Доп. НАНУ. — 2014. — № 2. — С. 50–55.
17. Сергієнко І.В., Литвин О.М., Литвин О.О., Ткаченко О.В., Грицай О.Л. Ермітова інтерлінація функцій двох змінних на заданій системі неперетинних ліній із збереженням класу $C^r(R^2)$ // Там же. — 2014. — № 7. — С. 53–59.
18. Сергієнко І.В., Литвин О.М., Литвин О.О., Ткаченко О.В., Грицай О.Л. Інтерлінація функцій трьох змінних на системі неперетинних кривих із збереженням класу диференційовності // Там же. — 2015. — № 1. — С. 31–35.
19. Сергієнко І.В., Литвин О.М., Литвин О.О., Ткаченко О.В., Грицай О.Л. Побудова операторів інтерполяції ермітового типу на нерегулярній сітці вузлів, розміщених на довільній системі замкнутих неперетинних ліній в циліндричній системі координат, що належать конструйованій поверхні // Там же. — 2015. — № 2. — С. 43–49.

Поступила 13.10.2014