

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ПРОЦЕДУРЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В СХЕМЕ УСРЕДНЕНИЯ

Аннотация. Исследовано асимптотическое поведение модифицированной дискретной процедуры стохастической оптимизации (ПСО) в марковской среде в схеме усреднения. Введены дополнительные параметры оптимизации ПСО, с помощью которых исследовано поведение флуктуаций на растущих временных интервалах. Установлен вид предельного генератора в зависимости от выбранного нормирования, а также показано, что при некоторых значениях введенных параметров модифицированная дискретная ПСО асимптотически нормальна.

Ключевые слова: марковский процесс, стохастическая оптимизация, асимптотическое поведение, схема усреднения.

Исследование поведения флуктуаций процедуры стохастической оптимизации (ПСО) определяет оценку скорости ее сходимости к точке экстремума усредненной эволюционной системы. Такая проблема возникает при использовании алгоритма фазового усреднения случайных эволюций [1], который базируется на близости исходной и усредненной эволюционных систем [2]. Так, в работе [3] исследовано поведение флуктуаций диффузионной эволюционной системы с марковскими прыжками (процедура стохастичной аппроксимации), где функция скорости имеет сингулярно возбужденное слагаемое с малым параметром серий.

Асимптотическое поведение процедуры стохастической оптимизации исследовалось методом моментов, подробно описанным в работах [4, 5], а для более общих случаев получены другие предельные распределения [6–8].

В работе [9] рассмотрено несколько рандомизированных алгоритмов стохастической оптимизации при почти случайных помехах, где на вход подаются пробные возмущения. Два из них — рандомизированные версии процедуры Кифера–Вольфовица (каждая требует двух вычислений неизвестной функции на каждом шаге итерации). В статье приведен краткий обзор работ Кушнера Г. и Кларка Д., Поляка Б.Т. и Цыбакова А.Б., Спала Дж., Чена Х.-Ф. и др. Каждый автор рассматривал при разных условиях приведенные выше процедуры, которые дополняли одна другую.

Поскольку асимптотический анализ классической ПСО был сделан авторами в [10], с учетом вышеизложенного и в целях сравнения асимптотического поведения классической и модифицированной процедур в данной статье проведен асимптотический анализ модифицированной процедуры, описанной в [9, процедура (2)].

Для простоты изложения рассматривается одномерный случай функции регрессии, однако полученные результаты аналогично переносятся на многомерный случай.

Псевдоградиент, а также ПСО для функции регрессии $C(u; x) \in C^3(\mathbb{R})$, $x \in X$, рассматриваются в модифицированном представлении

$$\nabla_b C(u; x) = \frac{C(u+b; x) - C(u; x)}{b}, \quad u = u(t), \quad b = b(t). \quad (1)$$

Прыжковая ПСО в схеме серий в марковской среде задается соотношением (пусть $\sum_{n=0}^{-1} a_n^\varepsilon \nabla_b C(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon) = 0$) [11]

$$u(t) = u + \sum_{n=0}^{v(t/\varepsilon^{1/\gamma})-1} a_n^\varepsilon \nabla_b C(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon), \quad u^\varepsilon(0) = u, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где γ — показатель нормирования времени, a_n^ε — некоторая нормирующая последовательность, $v(t)$ — счетчик прыжков до момента t .

Сходимость прыжковой ПСО (2) в условиях теоремы о достаточных условиях ее сходимости (см. [12])

$$u^\varepsilon(t) \rightarrow u^*, \quad t \rightarrow \infty, \quad \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad (3)$$

означает, что выполняется равенство

$$C'(u^*) = 0, \quad (4)$$

где u^* (не уменьшая общности, будем считать, что $u^* = 0$) есть точка равновесия системы

$$\frac{du(t)}{dt} = C'(u(t)), \quad C(u) = q \int_X \rho(dx) C(u; x). \quad (5)$$

Равенства (4), (5) дают условие баланса:

$$\Pi C'(0; x) = 0, \quad (6)$$

где Π — проектор, полученный стационарным распределением вложенной цепи Маркова $x_n, n \geq 0$, т.е. $\Pi\varphi(x) = \int_X \rho(dx)\varphi(x)$. При этом (3) означает, что флуктуации прыжковой ПСО целесообразно изучать со следующим нормированием:

$$v^\varepsilon(t) = \frac{t^\gamma}{\varepsilon} u^\varepsilon(t), \quad u^\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{t^\gamma} v^\varepsilon(t). \quad (7)$$

В ПСО (2) имеют место вложения

$$u_n^\varepsilon = u(\tau_n^\varepsilon), \quad x_n^\varepsilon = x(\tau_n^\varepsilon), \quad a_n^\varepsilon = a(\tau_n^\varepsilon), \quad \tau_n^\varepsilon = \tau_n / \varepsilon^{1/\gamma}, \quad n \geq 0,$$

где τ_n — моменты марковского восстановления.

Рассмотрим функции

$$a_n = \frac{a}{n^\alpha}, \quad a > 0, \quad b_n = \frac{b}{n^\beta}, \quad b > 0,$$

где α, β удовлетворяют условиям сходимости ПСО (2) (см. [12]):

- 1) $C'(u)V'(u) \leq -k_0 V(u)$;
- 2) имеют место оценки

$$\max_{x \in X} |(\nabla_b C(u; x))^2 V''(u)| \leq k_1 (1 + V(u));$$

$$\max_{x \in X} |\nabla_b C(u; x)[q(x)R_0 - I] \nabla_b \tilde{C}(u; x) V''(u)| \leq k_2 (1 + V(u)),$$

$$\max_{x \in X} |(\nabla_b C(u; x))^2 [q(x)R_0 - I] \nabla_b \tilde{C}(u; x) V'''(u)| \leq k_3 (1 + V(u)),$$

где $\tilde{C}(u; x) = q(x)C(u; x) - C(u)$;

3) условие ограничения роста функции Ляпунова и условие Липшица для $\nabla_b C(u)$ соответственно

$$\|V'(u)\| \leq k_4(1+V(u)); \quad \max_{x \in R^d} \|\nabla_b C(u) - C'(u)\| \leq k_5 b_n; \quad k_i > 0, i = \overline{0, 5};$$

4) последовательности a_n, b_n невозрастающие, положительные и удовлетворяют условиям

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2} < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n < \infty,$$

где $V(u)$ — функция Ляпунова усредненной системы (5).

Рассмотрим также двухкомпонентный марковский процесс (МП):

$$v^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon = x(t/\varepsilon^{1/\gamma}), t \geq 0. \quad (8)$$

Лемма 1 [13]. Генератор МП (8) на тест-функциях $\varphi(v; \cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ имеет представление

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon \varphi(v; x) = \varepsilon^{-1/\gamma} Q \varphi(v; x) + \varepsilon^{-1/\gamma} \mathbf{C}_t^\varepsilon(x) \varphi(v; x), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}_t^\varepsilon(x) \varphi(v; x) = \\ & = q(x) \mathbf{P}[\varphi(v + \varepsilon^{\alpha/\gamma-1} t^{\gamma-\alpha} a \nabla_b C(\frac{\varepsilon}{t^\gamma} v; x); y) - \varphi(v; y)] + \varepsilon^{1/\gamma} \frac{\gamma}{t} v \varphi'(v; x), \quad (10) \\ & \mathbf{P} \varphi(\cdot; y) = \int_X P(y, dz) \varphi(\cdot; z). \end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство леммы базируется на определении генератора МП через условное математическое ожидание (например, [14, гл. 3, 5]). $\square$

Для удобства введем вспомогательную функцию-индикатор

$$I(y) = \begin{cases} 0, & y < 0; \\ 1, & y = 0, y \in (-\infty, 0]. \end{cases}$$

Поскольку рассматривается обобщенный случай асимптотического поведения ПСО (2), вначале получим вспомогательные сведения, а затем, зафиксировав значения коэффициентов α, β, γ , перейдем к формулировке леммы и соответствующих теорем о представлении вида генератора на тест-функциях $\varphi(v; \cdot)$.

Используя (1), разложим функцию $\nabla_b C(\frac{\varepsilon}{t^\gamma} v; x)$ в окрестности точки экстремума u^* :

$$\begin{aligned} \nabla_b C\left(\frac{\varepsilon}{t^\gamma} v; x\right) &= C'(0; x) + \left(\frac{\varepsilon}{t^\gamma} v + \frac{\varepsilon^{\beta/\gamma}}{2t^\beta} b\right) C''(0; x) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon^2}{t^{2\gamma}} v^2 + \frac{\varepsilon^\gamma}{2t^{\gamma+\beta}} v b + \frac{\varepsilon^\gamma}{3t^{2\beta}} b^2 \right) C'''(0; x) + o\left(\frac{\varepsilon^{1+\frac{\beta}{\gamma}}}{t^{\gamma+\beta}} v\right), \quad (11) \end{aligned}$$

где $v = v(t), b = \text{const}$.

Для удобства и сокращения записей положим $C' = C'(0; x)$, $C'' = C''(0; x)$, $C''' = C'''(0; x)$, $\varphi' = \varphi'(v; x)$, $\varphi'' = \varphi''(v; x)$. Подставив (11) в (10), получим

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^{-1/\gamma} \mathbf{C}_t^\varepsilon(x) \varphi(v; x) = \frac{\gamma}{t} v \varphi' + \\
& + \frac{\frac{\alpha-1}{\gamma}-1}{t^{\alpha-\gamma}} a \left[C' + \left(\frac{\varepsilon}{t^\gamma} v + \frac{\varepsilon^\gamma}{2t^\beta} b \right) C'' + \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon^2}{t^{2\gamma}} v^2 + \frac{\varepsilon^\gamma}{2t^{\gamma+\beta}} v b + \frac{\varepsilon^\gamma}{3t^{2\beta}} b^2 \right) C''' \right] Q_0 \varphi' + \\
& + \frac{\frac{2\alpha-1}{\gamma}-2}{t^{2\alpha-2\gamma}} \frac{a^2}{2} \left[(C')^2 + 2 \left(\frac{\varepsilon}{t^\gamma} v + \frac{\varepsilon^\gamma}{2t^\beta} b \right) C' C'' + \right. \\
& + \left. \left(\frac{\varepsilon^2}{t^{2\gamma}} v^2 + \frac{\varepsilon^\gamma}{2t^{\gamma+\beta}} v b + \frac{\varepsilon^\gamma}{3t^{2\beta}} b^2 \right) C' C''' + \left(\frac{\varepsilon^2}{t^{2\gamma}} v^2 + \frac{\varepsilon^\gamma}{t^{\gamma+\beta}} v b + \frac{\varepsilon^\gamma}{4t^{2\beta}} b^2 \right) (C'')^2 + \right. \\
& + \left. \left(\frac{\varepsilon^3}{t^{3\gamma}} v^3 + \frac{\varepsilon^\gamma}{t^{2\gamma+\beta}} v^2 b + \frac{7}{12} \frac{\varepsilon^\gamma}{t^{\gamma+2\beta}} v b^2 + \frac{\varepsilon^\gamma}{6t^{3\beta}} b^3 \right) C'' C''' + \right. \\
& + \left. \left(\frac{\varepsilon^4}{t^{4\gamma}} v^4 + \frac{\varepsilon^\gamma}{t^{3\gamma+\beta}} v^3 b + \frac{11}{12} \frac{\varepsilon^\gamma}{t^{2(\gamma+\beta)}} v^2 b^2 + \frac{1}{3} \frac{\varepsilon^\gamma}{t^{\gamma+3\beta}} v b^3 + \frac{1}{9} \frac{\varepsilon^\gamma}{t^{4\beta}} b^4 \right) (C''')^2 \right] Q_0 \varphi'' + \\
& + o \left(\frac{\frac{3\alpha-1}{\gamma}-3}{t^{3\alpha-3\gamma}} \right). \tag{12}
\end{aligned}$$

Исходя из анализа (12) и условий сходимости ПСО (2) с учетом данного вида псевдоградиента (1) асимптотическое поведение рассматриваемой ПСО целесообразно изучать при следующих соотношениях коэффициентов α, β, γ :

$$\alpha = 1, \beta < \gamma/2; \tag{13}$$

$$\alpha = 1, \beta = \gamma/2; \tag{14}$$

$$\alpha = 1, \beta \in (\gamma/2; \gamma). \tag{15}$$

При $\alpha < 1$ данная процедура не будет асимптотически нормальной (см. исследования в [10]).

Случай 1. Рассмотрим соотношение (13), когда $\alpha = 1, \beta < \gamma/2$.

Лемма 2. Генератор (9) при условии (13) на тест-функциях $\varphi(v; \cdot) \in C^3(\mathbb{R})$ имеет асимптотическое представление

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon \varphi(v; x) = \left[\varepsilon^{-1/\gamma} Q + \frac{\varepsilon^{-1}}{t^{1-\gamma}} Q_1(x) + \frac{\varepsilon^{\beta/\gamma-1}}{t^{1-\gamma+\beta}} Q_2(x) + \right. \tag{16}$$

$$+ \frac{\varepsilon^{2\beta/\gamma-1}}{t^{1-\gamma+2\beta}} Q_3(x) + \frac{1}{t} Q_4(x) \varphi(v; x) + \frac{\varepsilon^{2/\gamma-3}}{t^{3-3\gamma}} \theta_t^\varepsilon(x) \left] \varphi(v; x), \right.$$

где

$$Q_1(x) \varphi(v; x) = a C'(0; x) Q_0 \varphi'(v; x); \quad (17)$$

$$Q_2(x) \varphi(v; x) = \frac{ab}{2} C''(0; x) Q_0 \varphi'(v; x); \quad (18)$$

$$Q_3(x) \varphi(v; x) = \frac{ab^2}{6} C'''(0; x) Q_0 \varphi'(v; x); \quad (19)$$

$$Q_4(x) \varphi(v; x) = vb(x) \varphi'(v; x) + I \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) \frac{a^2}{2} (C'(0; x))^2 Q_0 \varphi''(v; x); \quad (20)$$

$$b(x) = a C''(0; x) Q_0 + \gamma, \quad (21)$$

при этом остаточный член $\theta_t^\varepsilon(x) \varphi(v; x)$ ограничен.

Доказательство. Положив в (12) $\alpha = 1$, $\beta < \gamma/2$, получим (16) в обозначениях (17)–(21). Ограниченность остаточного члена следует из (12) и ограниченности первой, второй и третьей производных функции регрессии. $\square$

Проблема сингулярного возмущения (ПСВ) для оператора (16) реализуется на возмущенных функциях вида

$$\begin{aligned} \varphi^\varepsilon(v; x) = & \varphi(v) + \frac{\varepsilon^{1/\gamma-1}}{t^{1-\gamma}} \varphi_2(v; x) + \frac{\varepsilon^{(1+\beta)/\gamma-1}}{t^{1-\gamma+\beta}} \varphi_3(v; x) + \\ & + \frac{\varepsilon^{(1+2\beta)/\gamma-1}}{t^{1-\gamma+2\beta}} \varphi_4(v; x) + \frac{\varepsilon^{1/\gamma}}{t} \varphi_5(v; x). \end{aligned} \quad (22)$$

Лемма 3. Решение ПСВ для оператора (16) на тест-функциях (22) таких, что $\varphi(v; \cdot) \in C^3(\mathbb{R})$, имеет вид

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon \varphi^\varepsilon(v; x) = \frac{1}{t} \mathbf{L} \varphi(v) + \theta_t^\varepsilon(x) \varphi(v), \quad (23)$$

где оператор $\mathbf{L}$ действует по правилу

$$L \varphi(v; x) = -k v \varphi'(v; x) + I \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) \frac{a^2 \rho^2}{2} \varphi''(v; x), \quad (24)$$

где

$$k = ad - \gamma; \quad (25)$$

$$d = -q \int_X \rho(dx) C''(0; x); \quad (26)$$

$$\rho^2 = 2 \int_X \pi(dx) q(x) C'(0; x) R_0 q(x) C'(0; x) - q \int_X \rho(dx) (C'(0; x))^2, \quad (27)$$

при этом остаточный член $\theta_t^\varepsilon(x) \varphi(v)$ такой, что $\|\theta_t^\varepsilon(x) \varphi(v)\| \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доказательство. Поскольку остаточный член в представлении (16) не влияет на решение ПСВ [2, разд. 3.1], [1], рассмотрим решение ПСВ только для срезанного по отношению к (16) оператора:

$$\mathbf{L}_{t0}^{\varepsilon} \varphi(v; x) = \varepsilon^{-1/\gamma} Q + \frac{\varepsilon^{-1}}{t^{1-\gamma}} Q_1(x) + \frac{\varepsilon^{\beta/\gamma-1}}{t^{1-\gamma+\beta}} Q_2(x) + \frac{\varepsilon^{2\beta/\gamma-1}}{t^{1-\gamma+2\beta}} Q_3(x) + \frac{1}{t} Q_4(x) \varphi(v; x).$$

Оператор $\mathbf{L}_{t0}^{\varepsilon}$ на функциях (22) имеет представление

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{t0}^{\varepsilon} \varphi^{\varepsilon}(v; x) = & \varepsilon^{-1/\gamma} Q \varphi(v) + \frac{\varepsilon^{-1}}{t^{1-\gamma}} [Q \varphi_2(v; x) + Q_1(x) \varphi(v)] + \\ & + \frac{\varepsilon^{\beta/\gamma-1}}{t^{1-\gamma+\beta}} [Q \varphi_3(v; x) + Q_2(x) \varphi(v)] + \frac{\varepsilon^{2\beta/\gamma-1}}{t^{1-\gamma+2\beta}} [Q \varphi_4(v; x) + Q_3(x) \varphi(v)] + \\ & + \frac{1}{t} \left[Q \varphi_5(v; x) + Q_4(x) \varphi(v) + I \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) Q_1(x) \varphi_2(v; x) \right] + \\ & + \frac{\varepsilon^{(1+\beta)/\gamma-2}}{t^{2-2\gamma+\beta}} \theta_t^{\varepsilon}(x) \varphi(v), \end{aligned} \quad (28)$$

где $\theta_t^{\varepsilon}(x) \varphi(v)$ ограничен.

Условия разрешимости (см. [2, разд. 3.1]) для (28) имеет вид

$$Q \varphi_2(v; x) + Q_1(x) \varphi(v) = 0.$$

Если учитывать условие баланса (6), то, используя оператор $\mathbf{R}_0$, из последнего равенства находим

$$\varphi_2(v; x) = \mathbf{R}_0 Q_1(x) \varphi(v) = a \mathbf{R}_0 C'(0; x) Q_0 \varphi'(v). \quad (29)$$

Из условия $Q \varphi_3(v; x) + Q_2(x) \varphi(v) = 0$ находим

$$\varphi_3(v; x) = \mathbf{R}_0 Q_2(x) \varphi(v) = \frac{ab}{2} \mathbf{R}_0 C''(0; x) Q_0 \varphi'(v). \quad (30)$$

Аналогично из условия $Q \varphi_4(v; x) + Q_3(x) \varphi(v) = 0$ находим

$$\varphi_4(v; x) = \mathbf{R}_0 Q_3(x) \varphi(v) = \frac{ab^2}{6} \mathbf{R}_0 C'''(0; x) Q_0 \varphi'(v).$$

Из условия разрешимости (28) имеем

$$Q \varphi_5(v; x) + Q_4(x) \varphi(v) + I \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) Q_1(x) \varphi_2(v; x) = \mathbf{L} \varphi(v),$$

где оператор $\mathbf{L}$ определяется соотношениями

$$\mathbf{L} \Pi \varphi(v) = \Pi \mathbf{L}(x) \Pi \varphi(v), \quad \mathbf{L}(x) \varphi(v) = Q_4(x) \varphi(v) + I \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) Q_1(x) \varphi_2(v; x). \quad (31)$$

Вычислим теперь правую часть (31). Для этого используем полученные представления (29), (30):

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \Pi \varphi(v) = & v \left(a q \int_X \rho(dx) C''(0; x) + \gamma \right) \varphi'(v) + \\ & + I \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) a^2 \left(\int_X \pi(dx) C'(0; x) R_0 q(x) C'(0; x) - \frac{1}{2} q \int_X \rho(dx) (C'(0; x))^2 \right) \varphi''(v) \end{aligned}$$

или, используя обозначения (24)–(27), получаем (23).

Вычисление остаточного члена $\theta_t^{\varepsilon}(x)$ описано в [15]. □

Асимптотическая нормальность нормированной ПСО (7) устанавливается при дополнительных условиях

$$A1: d > 0; \quad A2: k > 0; \quad A3: \rho^2 > 0,$$

где d, k, ρ^2 даны в (25)–(27).

Условие A1 обеспечивает выполнение условия A2, откуда следует эргодичность предельного процесса $\zeta(t)$, $t \geq 0$, а условие A3 обеспечивает диффузионность процесса $\zeta(t)$, $t \geq 0$.

Теорема 1 [10]. Пусть выполнены условия сходимости 1)–4) ПСО (2), а также дополнительные условия A1–A3. Тогда имеет место слабая сходимость процессов

$$v^\varepsilon(t) \Rightarrow \zeta(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

в каждом конечном интервале $0 < t_0 \leq t \leq T$. Предельный диффузионный процесс $\zeta(t)$, $t \geq 0$, является процессом типа Орнштейна–Улэнбека [16, т. 2, гл. III, §8д; гл. X §46] и определяется генератором

$$\mathbf{L}\varphi(v) = -k v \varphi'(v) + I \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) \frac{a^2 \rho^2}{2} \varphi''(v)$$

в обозначениях (25)–(27).

Доказательство. В целом ход доказательства аналогичен доказательству теоремы о сходимости ПСО (2) (см. [12]). Поэтому, используя леммы 2 и 3, условия сходимости 1)–4) прыжковой ПСО (2), а также дополнительные условия A.1–A.3, получаем утверждение теоремы. $\square$

Замечание 1. Предельный процесс Орнштейна–Улэнбека [17, гл. 18, §4], определяемый генератором $\mathbf{L}$, в условиях теоремы 1 эргодичен со стационарным нормальным распределением $N = (0, \sigma_0^2)$, где дисперсия вычисляется по формуле $\sigma_0^2 = I \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) a^2 \rho^2 / 2k$.

Случай 2. Рассмотрим соотношение (14), когда $\alpha = 1, \beta = \gamma/2$.

Лемма 4. Генератор (9) при условии (14) на тест-функциях $\varphi(v; \cdot) \in C^3(\mathbb{R})$ имеет асимптотическое представление:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_t^\varepsilon \varphi(v; x) = & \left[\varepsilon^{-1/\gamma} Q + \frac{\varepsilon^{-1}}{t^{1-\gamma}} Q_1(x) + \frac{\varepsilon^{-1/2}}{t^{3/2-\gamma}} Q_2(x) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{t} Q_3(x) \varphi(v; x) + \frac{\varepsilon^{2/\gamma-3}}{t^{3-3\gamma}} \theta_t^\varepsilon(x) \right] \varphi(v; x), \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$Q_1(x) \varphi(v; x) = a C'(0; x) Q_0 \varphi'(v; x); \quad (33)$$

$$Q_2(x) \varphi(v; x) = \frac{ab}{2} C''(0; x) Q_0 \varphi'(v; x); \quad (34)$$

$$Q_3(x) \varphi(v; x) = (vb(x) + m(x)) \varphi'(v; x) + I \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) \frac{a^2}{2} (C'(0; x))^2 Q_0 \varphi''(v; x); \quad (35)$$

$$m(x) = \frac{ab^2}{6} C'''(0; x) Q_0; \quad (36)$$

$$b(x) = a C''(0; x) Q_0 + \gamma; \quad (37)$$

$$Q_0 \varphi(v; x) = q(x) \mathbf{P} \varphi(v; x),$$

при этом остаточный член $\theta_t^\varepsilon(x) \varphi(v; x)$ ограничен.

Доказательство. Положив в (12) $\alpha = 1, \beta = \gamma/2$, получим (32) в обозначениях (33)–(37). Ограниченность остаточного члена следует из (12) и ограниченности первой, второй и третьей производных функции регрессии. $\square$

Поскольку данный случай конструктивно подобен предыдущему, то, опуская повторные расчеты, сформулируем лемму о виде предельного генератора.

Лемма 5. Решение ПСВ для оператора (32) на тест-функциях $\varphi(v; \cdot) \in C^3(\mathbb{R})$ имеет вид

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon \varphi^\varepsilon(v; x) = \frac{1}{t} \mathbf{L} \varphi(v) + \theta_t^\varepsilon(x) \varphi(v),$$

где оператор $\mathbf{L}$ действует по правилу

$$L\varphi(v; x) = -(kv - m)\varphi'(v; x) + I\left(\gamma - \frac{1}{2}\right) \frac{a^2 \rho^2}{2} \varphi''(v; x),$$

где

$$k = ad - \gamma; \quad (38)$$

$$d = -q \int_X \rho(dx) C''(0; x); \quad (39)$$

$$m = \frac{ab^2}{6} \int_X \rho(dx) C'''(0; x);$$

$$\rho^2 = 2 \int_X \pi(dx) q(x) C'(0; x) R_0 q(x) C'(0; x) - q \int_X \rho(dx) (C'(0; x))^2, \quad (40)$$

при этом остаточный член $\theta_t^\varepsilon(x) \varphi(v)$ такой, что $\|\theta_t^\varepsilon(x) \varphi(v)\| \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$.

Доказательство. Доказательство леммы 5 аналогично доказательству леммы 3. $\square$

Асимптотическая нормальность нормированной ПСО (7) устанавливается при дополнительных условиях А1–А3, где d, k, ρ^2 представлены в (38)–(40).

Замечание 2. Для данного случая имеет место теорема 1 в обозначениях (38)–(40).

Замечание 3. Предельный процесс Орнштейна–Улэнбека [17, гл. 18, §4], определяемый генератором $\mathbf{L}$, в условиях теоремы эргодичен со стационарным нормальным распределением $N = (M, \sigma_0^2)$, где дисперсия вычисляется по формуле

$$\sigma_0^2 = I\left(\gamma - \frac{1}{2}\right) a^2 \rho^2 / 2k, \text{ а математическое ожидание } M = m/k.$$

Случай 3. Рассмотрим соотношение (15), когда $\alpha = 1, \beta \in (\gamma/2; \gamma)$.

Лемма 6. Генератор (9) при условии (15) на тест-функциях $\varphi(v; \cdot) \in C^3(\mathbb{R})$ имеет асимптотическое представление

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_t^\varepsilon \varphi(v; x) = & \left[\varepsilon^{-1/\gamma} Q + \frac{\varepsilon^{-1}}{t^{1-\gamma}} Q_1(x) + \frac{\varepsilon^{\beta/\gamma-1}}{t^{1-\gamma+\beta}} Q_2(x) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{t} Q_3(x) \varphi(v; x) + \frac{\varepsilon^{2/\gamma-3}}{t^{3-3\gamma}} \theta_t^\varepsilon(x) \right] \varphi(v; x), \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$Q_1(x)\varphi(v; x) = aC'(0; x)Q_0\varphi'(v; x); \quad (42)$$

$$Q_2(x)\varphi(v; x) = \frac{ab}{2}C''(0; x)Q_0\varphi'(v; x); \quad (43)$$

$$Q_3(x)\varphi(v; x) = vb(x)\varphi'(v; x) + I\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\frac{a^2}{2}(C'(0; x))^2Q_0\varphi''(v; x); \quad (44)$$

$$b(x) = aC''(0; x)Q_0 + \gamma, \quad (45)$$

при этом остаточный член $\theta_t^\varepsilon(x)\varphi(v; x)$ ограничен.

Доказательство. Положив в (12) $\alpha = 1$, $\beta \in (\gamma/2; \gamma)$, получим (41) в обозначениях (42)–(45). Ограниченность остаточного члена следует из (12) и ограниченности первой, второй и третьей производных функции регрессии. $\square$

Опуская повторные расчеты, заметим, что имеет место лемма 3 о виде предельного генератора.

Асимптотическая нормальность нормированной ПСО (7) устанавливается при дополнительных условиях A1–A2, где d, k, ρ^2 представлены в (25)–(27).

Замечание 4. Для данного случая имеет место теорема 1.

Замечание 5. Предельный процесс Орнштейна–Улэнбека [17, гл. 18, §4], определяемый генератором $\mathbf{L}$, в условиях теоремы эргодичен со стационарным нормальным распределением $N = (0, \sigma_0^2)$, где дисперсия вычисляется по формуле $\sigma_0^2 = I\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)a^2\rho^2/2k$.

Таким образом, исследовано асимптотическое поведение модифицированной процедуры стохастической оптимизации в схеме серий в марковской среде для одномерного случая. Установлены условия, при которых она асимптотически нормальна. Полученные результаты аналогично переносятся на многомерный случай.

В отличие от классической процедуры при некоторых соотношениях нормирующих коэффициентов α, β, γ для нахождения асимптотического поведения ПСО достаточно, чтобы функция регрессии $C(u; x)$ была дважды непрерывно дифференцируемой: $C(u; x) \in C^3(\mathbb{R}; X)$. Так, при $\alpha = 1$, $\beta < \gamma/2$ (для классической процедуры) и при $\alpha = 1$, $\beta < \gamma/2$, $\beta \in (\gamma/2; \gamma)$ (для модифицированной процедуры) предельные генераторы совпадают, что свидетельствует об эквивалентности (равнозначности) данных процедур относительно их асимптотического поведения.

Однако несмотря на их схожесть использование модифицированной процедуры в системах реального времени более целесообразно. Это объясняется тем, что для классической процедуры условие независимости внешних помех от возмущения $b(t)$ достаточно ограничено, поскольку на каждом шаге итерации вектор b_{n-1} используется дважды. Если речь идет о модифицированной процедуре, то одновременное возникновение возмущения b_{n-1} и внешних помех дает возможность рассчитывать на их независимость (см. [9]).

Таким образом, полученные результаты расширяют понимание и возможности исследования флуктуаций эволюционных систем в окрестности точки экстремума даже в случае нелинейной зависимости функции регрессии от внешних помех. В свою очередь, это дает возможность углубить анализ флуктуаций ПСО при исследовании условий оптимизации стохастических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Korolyuk V., Limnios N. Stochastic systems in merging phase space. — World Scientific Publishing, 2005. — 330 p.
2. Korolyuk V.S., Korolyuk V.V. Stochastic models of systems. — London: Kluwer acad. publ., 1999. — 185 p.
3. Chabaniuk Y., Koroliuk V.S., Limnios N. Fluctuation of stochastic systems with average equilibrium point // C.R. Acad. Sci., Ser. I. — Paris. — 2007. — **345**. — P. 405–410.
4. Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. О сходимости моментов процедуры Роббинса–Монро // Автоматика и телемеханика. — 1972. — № 3. — С. 101–125.
5. Хасьминский Р.З. О поведении процессов стохастической аппроксимации для больших значений времени // Проблемы передачи информации. — 1972. — **8**, № 1. — С. 453–495.
6. Ljung L., Pflug G., Walk H. Stochastic approximation and optimization of random systems. — Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 1992. — 114 p.
7. Fabian V. On asymptotic normality in stochastic approximation // Annals of Mathematical Statistic. — 1968. — **39**, N 4. — P. 1327–1332.
8. Kersting G.D. A weak convergence theorem with application to the Robbins–Monro process // Ann. Prob. — 1978. — **6**. — P. 1015–1025.
9. Граничин О.Н. Рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации при произвольных помехах // Автоматика и телемеханика. — 2002. — № 2. — С. 44–55.
10. Чабанюк Я.М., Горун П.П. Асимптотика прыжковой процедуры стохастической оптимизации в схеме усреднения // Вестник Киевского национального университета имени Тараса Шевченко. Сер.: Физико-математические науки. — 2012. — № 2. — С. 251–256.
11. Горун П.П., Чабанюк Я.М. Асимптотика генератора прыжковой оптимизации в марковской среде в схеме усреднения // XIX International conf.: Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2012, April 23–27, 2012). — Киев: Образование Украины. — С. 87.
12. Горун П.П., Чабанюк Я.М. Дискретная модель стохастической оптимизации инвестиционного портфеля // Буковинский математический журнал. — 2015. — **3**, № 1. — С. 45–51.
13. Горун П.П., Чабанюк Я.М. Предельный генератор процедуры стохастической оптимизации // Тез. докл. VI международ. науч.-практич. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых «Современные задачи прикладной статистики, промышленной, актуарной и финансовой математики», посвященной 75-летию Донецкого национального университета (9–11 апреля 2012 года). — Донецк: ДонНУ, 2012. — С. 40.
14. Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. — М.: Наука, 1972. — 304 с.
15. Чабанюк Я.М., Горун П.П. Сходимость дискретной процедуры стохастической оптимизации в схеме диффузионной аппроксимации // Сб. науч. трудов Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины и Каменец-Подольского национального университета имени Ивана Огиенко. Сер.: Физико-математические науки. — 2012. — № 6. — С. 234–248.
16. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2-х т. — М.: Мир, 1967. — Т. 1. — 527 с.
17. Боровков А.А. Теория вероятностей. — М.: Наука, 1986. — 431 с.

Поступила 08.06.2015