УДК 517.95:519.86:539.3

В.А. СТОЯН, К.В. ДВИРНИЧУК

МЕТОДЫ ПСЕВДОИНВЕРСНОЙ АЛГЕБРЫ В ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ СОСТОЯНИЯ ТОЛСТЫХ УПРУГИХ ПЛИТ

Аннотация. Решены задачи идентификации трехмерной функции поперечных смещений точек толстой упругой плиты конечных размеров, динамика которой описана линейной дифференциальной моделью с дискретными и непрерывными наблюдениями за начально-краевыми внешнединамическими возмущениями плиты. Рабочими выбраны среднеквадратический критерий согласования полученного решения с наблюдениями за плитой и методы линейной псевдоинверсной алгебры. Сформулированы условия точности и однозначности результатов идентификации.

Ключевые слова: линейные динамические системы, идентификация, псевдоинверсия, толстые упругие плиты, некорректные начально-краевые условия.

ВВЕДЕНИЕ

Классические методы псевдоинверсной алгебры [1, 2], успешно развитые и обобщенные в работах [3–5], в сочетании с идеями [6] математического моделирования состояния пространственно распределенных динамических систем позволили построить цельную теорию исследования этих систем [7]. В частности, были успешно решены и некорректно сформулированные прямые и обратные начально-краевые задачи динамики систем с распределенными параметрами. Эти же методы были использованы [8–10] при решении сложных задач динамики упругой плиты конечной толщины, математическая модель которой предварительно была построена в работах [11, 12]. При этом была благополучно преодолена постановка ограниченности количества начально-краевых наблюдений за состоянием плиты с бесконечно высоким порядком ее дифференциальной модели. Сложности решения проблемы некорректной постановки начально-краевых задач эластодинамики плит конечной толщины обусловили появление неклассического подхода к решению задач исследования состояния этих механических объектов, согласно которому поле упругих динамических смещений точек плиты строится на основе наблюдений за линейной функцией последней. Заметим, что количество таких наблюдений, как и их качество (дискретные, непрерывные, произвольные во времени и пространстве), постановкой задачи не регламентировано — решение задачи с ними согласуется за среднеквадратическим критерием. Будет рассмотрена динамика как произвольных в плане, так и осесимметрических загруженных толстых упругих плит.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ТОЛСТЫХ УПРУГИХ ПЛИТ И ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Рассмотрим толстую упругую плиту, которая плоскостями $z = \pm h$ и цилиндром $\Gamma(x, y) = 0$ декартовой системы координат x, y, z вырезана из упругой среды, определенной константами Ляме [13] λ и μ.

Полагая, что граничные поверхности $z = \pm h$ плиты находятся под действием нормальных $q_1^{\pm}(x, y, t)$ и касательных $q_2^{\pm}(x, y, t)$ динамических ($t \in [0, T]$ — время) нагрузок, поперечные смещения $w(s)$ ее точек $(x, y, z) \in S_0 = \{(x, y, z):$

$-h \le z \le h,\ \Gamma(x, y) \le 0\}$ определим [8] соотношением

$$w(s) = \sum_{l,\,k=1}^{2} w_k^{(l)}(s)\,, \tag{1}$$

в котором при $\xi = (x, y, t) \in S = S^+ \cup S^-$, $S^{\pm} = (S_0 \cap \{z = \pm h\}) \times [0, \mathrm{T}]$, $s = (\xi, z) \in$ $\in S_0^T = S_0 \times [0, T]$ имеем

$$Q^{(l)}(\partial_\xi) w_k^{(l)}(s) = d_k^{(l)}(\partial_\xi, z) q_k^{(l)}(\xi) \ \ (l, k = \overline{1, 2})\,, \tag{2}$$

$$q_1^{(1)}(\xi) = \frac{1}{2}(q_1^+(\xi) + q_1^-(\xi))\,,\ q_2^{(1)}(\xi) = \frac{1}{2}(q_2^+(\xi) - q_2^-(\xi))\,,$$

$$q_1^{(2)}(\xi) = \frac{1}{2}(q_1^+(\xi) - q_1^-(\xi))\,,\ q_2^{(2)}(\xi) = \frac{1}{2}(q_2^+(\xi) + q_2^-(\xi))\,,$$

$$Q^{(1)}(\partial_\xi) =$$
$$= (\Delta + D_2^2)((\lambda + 2\mu) D_1^2 - \lambda\Delta)\cos(hD_1)\frac{\sin(hD_2)}{D_2} - 4\mu\Delta D_1^2 \frac{\sin(hD_1)}{D_1}\cos(hD_2)\,,$$

$$Q^{(2)}(\partial_\xi) =$$
$$= (\Delta + D_2^2)(\lambda\Delta - (\lambda + 2\mu) D_1^2)\ \frac{\sin(hD_1)}{D_1}\cos(hD_2) + 4\mu\Delta D_2^2 \cos(hD_1)\ \frac{\sin(hD_2)}{D_2}\,, \tag{3}$$

$$d_1^{(1)}(\partial_\xi, z) = D_1^2\left[(\Delta + D_2^2)\frac{\sin(zD_1)}{D_1}\frac{\sin(hD_2)}{D_2} - 2\Delta\,\frac{\sin(hD_1)}{D_1}\frac{\sin(zD_2)}{D_2}\right],$$

$$d_2^{(1)}(\partial_\xi, z) = 2d\left[\frac{1}{\mu}((\lambda + 2\mu) D_1^2 - \lambda\Delta)\cos(hD_1)\frac{\sin(zD_2)}{D_2} - 2D_1^2\,\frac{\sin(zD_1)}{D_1}\cos(hD_2)\right],$$

$$d_1^{(2)}(\partial_\xi, z) = (\Delta + D_2^2)\cos(zD_1)\cos(hD_2) - 2\Delta\cos(hD_1)\cos(zD_2)\,, \tag{4}$$

$$d_2^{(2)}(\partial_\xi, z) = 2d\left[2D_2^2\cos(zD_1)\frac{\sin(hD_2)}{D_2} + \frac{1}{\mu}(\lambda\Delta - (\lambda + 2\mu) D_1^2)\frac{\sin(hD_1)}{D_1}\cos(zD_2)\right].$$

Здесь и далее $\partial_\xi = (\partial_x, \partial_y, \partial_t)$,

$$\Delta = d(\partial_x + \partial_y)\,,\ D_m^2 = \Delta_m + \frac{1}{c_m^2}\partial_t^2 \ \ (m = \overline{1, 2})\,,$$

$$\Delta_1 = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\Delta + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\Delta_2\,,\ \Delta_2 = \partial_x^2 + \partial_y^2\,,$$

$c_2 = \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$, $c_1 = \sqrt{\dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ — скорости распространения упругих волн расширения и сдвига в рассматриваемой среде, ρ — удельная плотность материала, а оператор d определяется соотношением

$$d(u + v) = \partial_x u + \partial_y v.$$

Выбор операторов дифференциальной модели (2) конкретизируется [11] при осесимметрической динамике плиты, находящейся под воздействием поверхностных динамических усилий $q_1^{\pm}(r, t)$, $q_2^{\pm}(r, t)$. При этом

$$d = \partial_x + \partial_y\,,\ \Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \partial_x^2 + \partial_y^2,$$

а составляющие $w_k^{(l)}(r, z, t)$ $(k, l = \overline{1, 2})$ поперечных динамических смещений

$$w(s) = \sum_{l, k=1}^{2} w_k^{(l)}(s) \tag{5}$$

точек $(r, z) \in S_0 = \{(r, z): r \le R, -h \le z \le h\}$ плиты в цилиндрической системе координат r, θ, z при $s = (r, z, t) \in S_0^T = S_0 \times [0, T]$ удовлетворяют уравнениям [11]

$$Q^{(l)}(\Delta, \partial_t^2) w_k^{(l)}(s) = \frac{\partial_r^{1-k}}{\mu} d_k^{(l)}(\Delta, z, \partial_t^2) q_k^{(l)}(\xi) \ \ (l, k = \overline{1, 2}), \tag{6}$$

в которых, как и выше, $\xi = (r, t) \in S = S^+ \cup S^-$, $S^{\pm} = (S_0^T \cap \{z = \pm h\})$, а также

$$Q^{(1)}(\Delta, \partial_t^2) = (\Delta + D_2^2)^2 \cos(hD_1) \frac{\sin(hD_2)}{D_2} - 4\Delta D_1^2 \frac{\sin(hD_1)}{D_1} \cos(hD_2),$$

$$Q^{(2)}(\Delta, \partial_t^2) = (\Delta + D_2^2)^2 \frac{\sin(hD_1)}{D_1} \cos(hD_2) - 4\Delta D_2^2 \cos(hD_1) \frac{\sin(hD_2)}{D_2},$$

$$d_1^{(1)}(\Delta, z, \partial_t^2) = D_1^2 \left[(\Delta + D_2^2) \frac{\sin(zD_1)}{D_1} \frac{\sin(hD_2)}{D_2} - 2\Delta \frac{\sin(hD_1)}{D_1} \frac{\sin(zD_2)}{D_2} \right],$$

$$d_2^{(1)}(\Delta, z, \partial_t^2) = \Delta \left[(\Delta + D_2^2) \cos(hD_1) \frac{\sin(zD_2)}{D_2} - 2D_1^2 \frac{\sin(zD_1)}{D_1} \cos(hD_2) \right],$$

$$d_1^{(2)}(\Delta, z, \partial_t^2) = -(\Delta + D_2^2) \cos(zD_1) \cos(hD_2) + 2\Delta \cos(hD_1) \cos(zD_2),$$

$$d_2^{(2)}(\Delta, z, \partial_t^2) = \Delta \left[(\Delta + D_2^2) \frac{\sin(hD_1)}{D_1} \cos(zD_2) - 2D_2^2 \cos(zD_1) \frac{\sin(hD_2)}{D_2} \right].$$

Заметим, что уравнения (2), (6) представляют собой компактную запись линейных дифференциальных уравнений бесконечно высокого порядка, явный вид которых получим после разложения функций $\sin(zD_m)$, $\cos(zD_m)$ $(m = \overline{1, 2})$ в ряды по степеням zD_m $(m = \overline{1, 2})$ и возвращения символам D_m^2 $(m = \overline{1, 2})$ их дифференциального смысла. Эти уравнения, записанные с точностью до членов порядка h, согласуются с дифференциальной моделью Кирхгофа–Лява [14] динамики тонких упругих плит. Точность порядка h^3 соответствует уточненным математическим моделям, которые разными авторами строились [14] на основании различных неклассических механических и математических гипотез.

Рассмотрим пример h^3-приближения дифференциальных операторов уравнений (6). При этом

$$Q^{(1)}(\Delta, \partial_t^2) = h \left\{ \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \Delta - \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 \right\} -$$

$$- \frac{h^3}{3!} \left\{ \frac{8(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \Delta\Delta - \frac{4(2\lambda^2 + 8\lambda\mu + 7\mu^2)}{(\lambda + 2\mu)^2} \Delta \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 + \frac{\lambda + 5\mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 \right)^2 \right\},$$

$$Q^{(2)}(\Delta,\partial_t^2)=h\frac{\rho}{\mu}\partial_t^2+\frac{h^3}{3!}\left\{\frac{8(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\Delta\Delta-\frac{4(3\lambda+4\mu)}{\lambda+2\mu}\Delta\frac{\rho}{\mu}\partial_t^2+\frac{3\lambda+7\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\rho}{\mu}\partial_t^2\right)^2\right\},$$

$$d_1^{(1)}(\Delta,z,\partial_t^2)=zh\left\{\Delta-\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\partial_t^2\right\},$$

$$d_2^{(1)}(\Delta,z,\partial_t^2)=$$

$$=z\Delta\left\{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}+\frac{1}{2}h^2\left(\Delta-\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\partial_t^2\right)\right\}-\frac{1}{3!}z^3\Delta\left\{\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\Delta-\frac{\lambda^2+4\lambda\mu+2\mu^2}{(\lambda+2\mu)^2}\frac{\rho}{\mu}\partial_t^2\right\},$$

$$d_1^{(2)}(\Delta,z,\partial_t^2)=1-\frac{1}{2}h^2\left\{\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}\Delta-\frac{\rho}{\mu}\partial_t^2\right\}+\frac{1}{2}z^2\left\{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\Delta+\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\partial_t^2\right\},$$

$$d_2^{(2)}(\Delta,z,\partial_t^2)=$$

$$=h\Delta\left\{1-\frac{1}{3!}h^2\left(\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}\Delta-\frac{2\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\rho}{\mu}\partial_t^2\right)\right\}+\frac{1}{2}hz^2\Delta\left\{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(\Delta-\frac{\rho}{\mu}\partial_t^2\right)\right\}.$$

Дифференциальные модели более высокого порядка, а тем более модели в их полном объеме (2), (3), другими авторами не рассматривались, поскольку корректно поставить начально-краевую задачу для таких сложных дифференциальных уравнений невозможно. Выход для решения таких задач для систем, которые находятся в условиях неполноты информации об их начально-краевом состоянии, был предложен в [5, 7]. В статье [8] идеи работ [5, 7] использовались для математического моделирования смещений $w(s)$ неполнонаблюдаемых упругих плит ограниченной геометрии, которые функционируют согласно математическим моделям (2)–(4). Результат оказался неплохим [15].

В отличие от [8] рассмотрим задачу построения поля упругих динамических смещений $w(s)$ точек рассматриваемой плиты в предположении, что для измерения доступна линейная функция $L_i(\partial_s)w(s)$ $(s\in S_0^T,\ i=\overline{1,I})$. Здесь ∂_s — вектор производных по пространственно-временным координатам x,y,z,t или r,z,t (в зависимости от координатной системы), $L_i(\partial_s)$ — линейный дифференциальный оператор,

$$L_i(\partial_s)w(s)=W_i(s)\ \ (i=\overline{1,I}),\tag{7}$$

$$L_i(\partial_s)w(s)_{|s=s_{ij}}=W_{ij}\ \ (j=\overline{1,J_i},\ i=\overline{1,I})\tag{8}$$

при s и s_{ij}, выбранных из области $\Sigma\subset S_0^T$.

Задачу идентификации функции $w(s)$ решим согласно критерию

$$\Phi_1=\sum_{i=1}^{I}\int_{\Sigma}(L_i(\partial_s)w(s)-W_i(s))^2\,ds\to\min_{w(s)}\tag{9}$$

или

$$\Phi_2=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}(L_i(\partial_s)w(s)_{|s=s_{ij}\in\Sigma}-W_{ij})^2\to\min_{w(s)}\tag{10}$$

с учетом наблюдений (7) и (8) соответственно.

Заметим, что частными случаями таких задач являются начально-краевая (при $s \in \{s\colon \Gamma(\cdot) = 0, -h \le z \le h,\ t = 0\}$), краевая (при $s \in \{s\colon \Gamma(\cdot) = 0,\ -h \le z \le h,\ t \ge 0\}$), начальная (при $s \in \{s\colon\ \Gamma(\cdot) \le 0, -h \le z \le h,\ t = 0\}$) задачи, которые рассматривались ранее в [8].

МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

При решении задач (9), (10) математическую модель (2) динамики рассматриваемых плит представим соотношениями [16]

$$w_k^{(l)}(s) = \int_S G_k^{(l)}(\xi - \xi', z) q_k^{(l)}(\xi') d\xi' \ \ (k, l = \overline{1, 2}), \tag{11}$$

$$G_k^{(l)}(\xi - \xi',\ z) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d_k^{(l)}(p_1, p_2, q, z)}{Q^{(l)}(p_1, p_2, q)} e^{p_1(x-x') + p_2(y-y') + q(t-t')} dp_1 dp_2 dq \ \ (k, l = \overline{1, 2})$$

в декартовых координатах и соотношениями

$$w_k^{(l)}(s) = \int_S G_k^{(l)}(r, r', z, t - t')\, q_k^{(l)}(\xi')\, d\xi', \tag{12}$$

$$G_k^{(l)}(r, r', z, t - t') =$$

$$= \frac{(-1)^{k-1} r'}{2\pi\mu i} \int_0^{+\infty} \sigma^{2-k} J_0(\sigma r)\, J_{k-1}(\sigma r') \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d_k^{(l)}(-\sigma^2, z, p^2)}{Q^{(l)}(-\sigma^2, p^2)} e^{p(t-t')} dp d\sigma$$

в цилиндрических координатах соответственно (здесь $J_k(\cdot)$ — функция Бесселя порядка k).

Заметим, что представлений (11), (12) функций $w_k^{(l)}(s)$ $(k, l = \overline{1, 2})$ поперечных динамических смещений достаточно при рассмотрении установившейся $(t > 0)$ динамики бесконечной в плане упругой плиты (слоя), находящейся под действием поверхностных динамических возмущений $q_k^{\pm}(\cdot)$. Для плит, ограниченных в плане и дополнительно подверженных начально-краевым возмущениям, функции $w_k^{(l)}(\cdot)$ $(k, l = \overline{1, 2})$ представим суммой

$$w_k^{(l)}(s) = w_{\infty k}^{(l)}(s) + w_{0k}^{(l)}(s) + w_{\Gamma k}^{(l)}(s), \tag{13}$$

составляющие $w_{\infty k}^{(l)}(\cdot)$, $w_{0k}^{(l)}(\cdot)$, $w_{\Gamma k}^{(l)}(\cdot)$ $(k, l = \overline{1, 2})$ которой определяются действием конкретных внешнединамических факторов — поверхностного, начального и краевого соответственно.

С учетом физико-механических свойств функции $G_k^{(l)}(\xi - \xi', z)$ $(k, l = \overline{1, 2})$, как передаточной от точки s' к точке s, составляющие функции $w_k^{(l)}$ представим соотношениями

$$w_{\infty k}^{(l)}(s) = \int_S G_k^{(l)}(\xi - \xi', z) q_k^{(l)}(\xi') d\xi', \tag{14}$$

$$w_{0k}^{(l)}(s) = \int_{S^0} G_k^{(l)}(\xi - \xi', z) q_{0k}^{(l)}(\xi') d\xi',\ \ w_{\Gamma k}^{(l)}(s) = \int_{S^\Gamma} G_k^{(l)}(\xi - \xi', z) q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi') d\xi'. \tag{15}$$

Подынтегральные функции $q_{0k}^{(l)}(\xi)$ $(\xi \in S^0 = S^{0+} \cup S^{0-}$, $S^{0\pm} = (S_0 \cap \{z = \pm h\}) \times$ $\times (-\infty, 0])$, $q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$ $(\xi \in S^\Gamma = S^{\Gamma+} \cup S^{\Gamma-}$, $S^{\Gamma\pm} = ((R^3 \setminus S_0) \cap \{z = \pm h\}) \times [0, T])$ соотношений (14), (15), определенные вне временного интервала $[0, T]$ и рассматриваемой пространственной области S_0, будут построены, исходя из условия

$$\Phi_2 \to \min_{\substack{q_{0k}^{(l)}(\xi),\, q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi) \\ (k, l = \overline{1, 2})}} \quad (i = \overline{1, 2}). \tag{16}$$

При дискретном определении моделирующих функций $q_{0k}^{(l)}(\xi)$, $q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$ представления (14), (15) составляющих $w_{0k}^{(l)}(\cdot)$, $w_{\Gamma k}^{(l)}(\cdot)$ заменим следующими:

$$w_{0k}^{(l)}(s) = \sum_{m=1}^{M_{0k}^{(l)}} G_k^{(l)}(\xi - \xi_{km}^{0(l)}, z)\, q_{0km}^{(l)}, \tag{17}$$

$$w_{\Gamma k}^{(l)}(s) = \sum_{m=1}^{M_{\Gamma k}^{(l)}} G_k^{(l)}(\xi - \xi_{km}^{\Gamma(l)}, z)\, q_{\Gamma km}^{(l)}. \tag{18}$$

Здесь $q_{0km}^{(l)} = q_{0k}^{(l)}(\xi_{km}^{0(l)})$ $(m = \overline{1, M_{0k}^{(l)}})$, $q_{\Gamma km}^{(l)} = q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi_{km}^{\Gamma(l)})$ $(m = \overline{1, M_{\Gamma k}^{(l)}})$, $\xi_{km}^{0(l)} \in$ $\in \Xi_k^0 = \Xi_k^{0+} \cup \Xi_k^{0-}$, $\xi_{km}^{\Gamma(l)} \in \Xi_k^\Gamma = \Xi_k^{\Gamma+} \cup \Xi_k^{\Gamma-}$ при $\Xi_k^{0\pm} = \{\xi_{km}^{0\pm} \in S^{0\pm}$, $m = \overline{1, M_{0k}^{\pm}}\}$, $\Xi_k^{\Gamma\pm} = \{\xi_{km}^{\Gamma\pm} \in S^{\Gamma\pm}$, $m = \overline{1, M_{\Gamma k}^{\pm}}\}$, $M_{0k}^{(l)} = M_{0k}^{+} + M_{0k}^{-}$, $M_{\Gamma k}^{(l)} =$ $= M_{\Gamma k}^{+} + M_{\Gamma k}^{-}$ $(k, l = \overline{1, 2})$, а критериями определения векторов

$$\bar{q}_{0k}^{(l)} = (q_{0km}^{(l)},\ m = \overline{1, M_{0k}^{(l)}})\ (k, l = \overline{1, 2}),$$

$$\bar{q}_{\Gamma k}^{(l)} = (q_{\Gamma km}^{(l)},\ m = \overline{1, M_{\Gamma k}^{(l)}})\ (k, l = \overline{1, 2})$$

являются

$$\Phi_1 = \sum_{i=1}^{I} \int_{\Sigma} (L_i(\partial_s)\, w(s) - W_i(s))^2\, ds \to \min_{\substack{q_{0k}^{(l)},\, q_{\Gamma k}^{(l)} \\ (k, l = \overline{1, 2})}}, \tag{19}$$

$$\Phi_2 = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J_i} (L_i(\partial_s)\, w(s)\big|_{s = s_{ij} \in \Sigma} - W_{ij})^2 \to \min_{\substack{q_{0k}^{(l)},\, q_{\Gamma k}^{(l)} \\ (k, l = \overline{1, 2})}} \tag{20}$$

при непрерывных и дискретных наблюдениях за состоянием плиты соответственно. Последнее означает, что исходные задачи (9), (10) построения функции $w(s)$ поперечных динамических смещений точек плиты будут решены согласно (16), (19), (20).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПОЛЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СМЕЩЕНИЙ ДИСКРЕТНО НАБЛЮДАЕМОЙ ТОЛСТОЙ УПРУГОЙ ПЛИТЫ

Рассмотрим задачу построения функции $w(s)$ поперечных динамических смещений точек упругой плиты при наблюдении согласно (8) за ней. При этом W_{ij} $(j = \overline{i, J_i}$, $i = \overline{1, I})$ — заданные значения, которые далее объединим в вектор

$$\overline{W} = \mathrm{col}\,((W_{ij},\ j = \overline{i, J_i}),\ i = \overline{1, I}).$$

Для решения задачи (10) искомую функцию $w(s)$ представим соотношениями (1), (13), составляющие $w_{0k}^{(l)}(s)$, $w_{\Gamma k}^{(l)}(s)$ которой определены согласно (17), (18). После подстановки (1), (13), (14), (17), (18) в (8) для определения векторов $\bar{q}_{0k}^{(l)}$, $\bar{q}_{\Gamma k}^{(l)}$ значений моделирующих функций $q_{0k}^{(l)}(\xi)$, $q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$ получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$A\bar{q} = \overline{W}, \tag{21}$$

в которых

$$\bar{q} = \mathrm{col}\,(((\bar{q}_{0k}^{(l)}, \bar{q}_{\Gamma k}^{(l)}),\ k = \overline{1, 2}),\ l = \overline{1, 2}),$$

$$A = \mathrm{str}\,(((A_{k1}^{(l)}, A_{k2}^{(l)}),\ k = \overline{1, 2}),\ l = \overline{1, 2}),$$

$$\overline{W} = \mathrm{col}\,((W_{ij} - L_i(\partial_s) \sum_{k,l=1}^{2} w_{\infty k}^{(l)}(s)\big|_{s=s_{ij}},\ j = \overline{1, J_i}),\ i = \overline{1, I}),$$

$$A_{k1}^{(l)} = \mathrm{col}\left(\left(\mathrm{str}\left((L_i(\partial_s) G_k^{(l)}(\xi - \xi_{km}^{0(l)}, z)\big|_{s=s_{ij} \in \Sigma},\ m = \overline{1, M_{0k}^{(l)}}\right),\ j = \overline{1, J_i}\right),\ i = \overline{1, I}\right),$$

$$A_{k2}^{(l)} = \mathrm{col}\left(\left(\mathrm{str}\left((L_i(\partial_s) G_k^{(l)}(\xi - \xi_{km}^{\Gamma(l)}, z)\big|_{s=s_{ij} \in \Sigma},\ m = \overline{1, M_{\Gamma k}^{(l)}}\right),\ j = \overline{1, J_i}\right),\ i = \overline{1, I}\right).$$

Разрешающими для определения функций $q_{0k}^{(l)}(\xi)$, $q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$ в задаче (10) являются уравнения

$$\int_{(\cdot)} B(\xi) q(\xi) ds = \overline{W}, \tag{22}$$

где символом $(\cdot)$ обозначено интегрирование по области определения подынтегральных функций

$$q(\xi) = \mathrm{col}\,(((q_{0k}^{(l)}(\xi)(\xi \in S^0),\ q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)(\xi \in S^\Gamma)),\ k = \overline{1, 2}),\ l = \overline{1, 2}),$$

$$B(\xi) = \mathrm{str}\,(((B_{k1}^{(l)}(\xi)(\xi \in S^0),\ B_{k2}^{(l)}(\xi)(\xi \in S^\Gamma)),\ k = \overline{1, 2}),\ l = \overline{1, 2}),$$

$$B_{kn}^{(l)}(\xi') = \mathrm{col}\,((L_i(\partial_s) G_k^{(l)}(\xi - \xi', z)\big|_{s=s_{ij} \in \Sigma},\ j = \overline{1, J_i}),\ i = \overline{1, I})\ \ (n = \overline{1, 2}).$$

С учетом определения (10) функционала Φ_2 и представлений (15), (17), (18) составляющих $w_{0k}^{(l)}(s)$, $w_{\Gamma k}^{(l)}(s)$ функции $w(s)$ заключаем, что решение задачи (10) сведется к псевдообращению систем (21), (22), при котором

$$\| A\bar{q} - \overline{W} \|^2 \to \min_{\bar{q}}, \tag{23}$$

$$\| \int_{(\cdot)} B(\xi) q(\xi) ds - \overline{W} \|^2 \to \min_{q(\xi)} \tag{24}$$

соответственно. Решение (23), (24) — это задача псевдоинверсной алгебры [1, 2] и ее обобщений, которые находим в [4, 5]. При этом

$$\bar{q}_{0k}^{(l)} \in \Omega_{0k}^{(l)} = \{\bar{q}_{0k}^{(l)} : \bar{q}_{0k}^{(l)} = (A_{k1}^{(l)})^{\mathrm{T}} P_1^{+} \overline{W} + \bar{v}_{0k}^{(l)} - (A_{k1}^{(l)})^{\mathrm{T}} P_1^{+} A\bar{v}\}, \tag{25}$$

$$\bar{q}_{\Gamma k}^{(l)} \in \Omega_{\Gamma k}^{(l)} = \{\bar{q}_{\Gamma k}^{(l)} : \bar{q}_{\Gamma k}^{(l)} = (A_{k2}^{(l)})^{\mathrm{T}} P_1^{+} \overline{W} + \bar{v}_{\Gamma k}^{(l)} - (A_{k2}^{(l)})^{\mathrm{T}} P_1^{+} A\bar{v}\}, \tag{26}$$

$$q_{0k}^{(l)}(\xi)\in\Omega_{0k}^{(l)}=\{q_{0k}^{(l)}(\xi)\colon q_{0k}^{(l)}(\xi)=(B_{k1}^{(l)}(\xi))^{\mathrm T}P_2^{+}(\overline{W}-B_v)+v_{0k}^{(l)}(\xi)$$
$$\forall v_{0k}^{(l)}(\xi)\ \ (\xi\in S^0)\},\tag{27}$$

$$q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)\in\Omega_{\Gamma k}^{(l)}=\{q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)\colon q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)=(B_{k2}^{(l)}(\xi))^{\mathrm T}P_2^{+}(\overline{W}-B_v)+v_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$$
$$\forall v_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)\ \ (\xi\in S^{\Gamma})\ \ (k,l=\overline{1,2}),\tag{28}$$

где
$$\overline{v}=\mathrm{col}\,(((\overline{v}_k^{(l)}\in R^{M_k^{(l)}},\ \ \overline{v}_{0k}^{(l)}\in R^{M_{0k}^{(l)}}),\ k=\overline{1,2}),\ l=\overline{1,2})$$
— вектор произвольных компонент $\overline{v}_{0k}^{(l)}$, $\overline{v}_{\Gamma k}^{(l)}$ $(k,l=\overline{1,2})$;
$$v(\xi)=\mathrm{col}\,((((v_{0k}^{(l)}(\xi),\xi\in S^0),(v_{\Gamma k}^{(l)}(\xi),\xi\in S^{\Gamma})),k=\overline{1,2}),l=\overline{1,2})$$
— вектор-функция произвольных, интегрируемых в области изменения своего аргумента функций $v_{0k}^{(l)}(\xi)$, $v_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$ $(k,l=\overline{1,2})$; P_1^{+}, P_2^{+} — матрицы, псевдообратные к
$$P_1=AA^{\mathrm T},$$
$$P_2=\sum_{k,l=1}^{2}\left(\int\limits_{S^0}B_{k1}^{(l)}(\xi)(B_{k1}^{(l)}(\xi))^{\mathrm T}d\xi+\int\limits_{S^{\Gamma}}B_{k2}^{(l)}(\xi)(B_{k2}^{(l)}(\xi))^{\mathrm T}d\xi\right);$$
$$B_v=\sum_{k,l=1}^{2}\left(\int\limits_{S^0}B_{k1}^{(l)}(\xi)v_{0k}^{(l)}(\xi)d\xi+\int\limits_{S^{\Gamma}}B_{k2}^{(l)}(\xi)v_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)d\xi\right).$$

Множества $\Omega_{0k}^{(l)}$ и $\Omega_{\Gamma k}^{(l)}$ решений систем (21), (22) будут однозначными ($\overline{v}_{0k}^{(l)}\equiv0$, $\overline{v}_{\Gamma k}^{(l)}\equiv0$), если
$$\det A^{\mathrm T}A>0.$$
При условии, что
$$\lim_{N\to\infty}\det\,[B^{\mathrm T}(\xi_i)B(\xi_j)]_{i,j=1}^{N}>0,$$
тождественно равными нулю будут и функции $v_{0k}^{(l)}(\xi)$, $v_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$ в определении (27), (28) множеств $\Omega_{0k}^{(l)}$ и $\Omega_{\Gamma k}^{(l)}$ соответственно. Точность же решений (25), (26) и (27), (28) систем (21), (22), а следовательно и решения задачи (10) идентификации функции $w(s)$, определяются величинами
$$\varepsilon^2=\min_{w(s)}\Phi_2=\min_{\substack{\overline{q}_{0k}^{(l)},\overline{q}_{\Gamma k}^{(l)}\\(k,l=\overline{1,2})}}\Phi_2=\min_{\overline{q}}\|B\overline{q}-\overline{W}\|^2=\overline{W}^{\mathrm T}\overline{W}-\overline{W}^{\mathrm T}P_1P_1^{+}\overline{W},$$

$$\varepsilon^2=\min_{w(s)}\Phi_2=\min_{\substack{q_{0k}^{(l)}(\xi),q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)\\(k,l=\overline{1,2})}}\Phi_2=\min_{q(\xi)}\left\|\int\limits_{(\bullet)}B(\xi)q(\xi)d\xi-\overline{W}\right\|^2=\overline{W}^{\mathrm T}\overline{W}-\overline{W}^{\mathrm T}P_2P_2^{+}\overline{W}.$$

Рассмотрим задачу идентификации функции $w(s)$ поперечных динамических смещений точек наблюдаемой согласно (7) упругой плиты.

Как и выше, решение задачи представим соотношениями (1), (13) с определенными согласно (17), (18) составляющими $w_{0k}^{(l)}(\xi)$, $w_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$. Подстановка (1), (13), (14), (17), (18) в (7) дает следующую систему функциональных уравнений для построения векторов $\bar{q}_{0k}^{(l)}$, $\bar{q}_{\Gamma k}^{(l)}$ значений моделирующих функций $q_{0k}^{(l)}(\xi)$, $q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$:

$$A(s)\bar{q} = \overline{W}(s), \tag{29}$$

где

$$\overline{W}(s) = \mathrm{col}\,((W_i(s) - L_i(\partial_s)\sum_{k,\,l=1}^{2} w_{\infty k}^{(l)}(s)),\ i = \overline{1, I})\ (s \in \Sigma),$$

$$A(s) = \mathrm{str}\,(((A_{kn}^{(l)}(s)\,(s \in \Sigma),\ n = \overline{1,2}),\ k = \overline{1,2}),\ l = \overline{1,2}),$$

$$A_{k1}^{(l)}(s) = \mathrm{col}\,(\mathrm{str}\,(L_i(\partial_s)\,G_k^{(l)}(\xi - \xi_{km}^{0(l)}, z),\ m = \overline{1, M_{0k}^{(l)}}),\ i = \overline{1, I}),$$

$$A_{k2}^{(l)}(s) = \mathrm{col}\,(\mathrm{str}\,(L_i(\partial_s)\,G_k^{(l)}(\xi - \xi_{km}^{\Gamma(l)}, z),\ m = \overline{1, M_{\Gamma k}^{(l)}}),\ i = \overline{1, I}),$$

величина $\bar{q}$ определена выше. С учетом решения (29), при котором

$$\|\int_{\Sigma}(A(s)\,q - \overline{W}(s))ds\|^2 \to \min_{\bar{q}}, \tag{30}$$

где интегрирование проводится по области определения подынтегральной функции с учетом (1), (13), (14), (17), (18), получим и решение задачи (9). При этом

$$\bar{q} \in \Omega_q = \{q : q = P_3^+ A_w + \bar{v} - P_3^+ P_3 \bar{v}\}, \tag{31}$$

где $A_w = \int_{\Sigma} A^T(s)\ \overline{W}(s)\,ds = \mathrm{col}\,(A_{wi}, i = \overline{1,8})$, а символом +, как и выше, обозначена операция псевдообращения матрицы

$$P_3 = \int_{(\cdot)} A^T(s)A(s)ds = [Q_{ij}]_{i,j=1}^{i,j=8}.$$

Произвольный вектор $\bar{v} = \mathrm{col}\,(((v_{0k}^{(l)} \in R^{M_{\Gamma k}^{(l)}}, v_{\Gamma k}^{(l)} \in R^{M_{\Gamma k}^{(l)}}),\ k = \overline{1,2}),\ l = \overline{1,2})$ будет нулевым, а решение рассматриваемой задачи — однозначным, если [7] $\det P_3 > 0$.

Точность решения задачи определим величиной [7]

$$\varepsilon^2 = \min_{w(s)} \sum_{i=1}^{I} \int_{\Sigma} (L_i(\partial_s)\,w(s) - W_i(s))^2\,ds = \min_{\bar{q}} \|\int_{\Sigma}(A(s)\bar{q} - \overline{W}(s))\,ds\|^2 =$$

$$= \int_{\Sigma} (\overline{W}(s))^T\,\overline{W}(s)\,ds - A_w^T P_3^+ A_w.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена сложная задача идентификации поля поперечных динамических смещений точек толстых упругих плит, исследуемых в декартовой и цилиндрической системах координат. Предполагалось, что верхняя и нижняя поверхности плиты находятся под действием нормальных и касательных к ним внешнединамических возмущений. Задача решалась на основе дискретно и непрерывно определенных наблюдений за плитой, которые являются линейными функциями поперечных динамических смещений плиты в поверхностных, начально-краевых и внутренних точках плиты. Идентифицировано и исследовано на точность и однозначность поле поперечных динамических смещений точек такой плиты, за среднеквадратическим критерием согласованное с наблюдениями за ней. Задачи решены с привлечением построенных ранее математических моделей динамики упругих плит конечной толщины и псевдоинверсных методов обращения систем линейных алгебраических, интегральных и функциональных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. — М.: Наука, 1977. — 224 с.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Физматлит, 2004. — 560 с.
3. Кириченко Н.Ф. Псевдообращение матриц и их рекуррентность в задачах моделирования и управления // Проблемы управления и информатики. — 1995. — № 1. — С. 114–127.
4. Кириченко Н.Ф., Стоян В.А. Аналитическое представление матричных и интегральных линейных преобразований // Кибернетика и системный анализ. — 1998. — № 3. — С. 90–104.
5. Скопецький В.В., Стоян В.А., Кривонос Ю.Г. Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. — К.: Наук. думка, 2002. — 361 с.
6. Стоян В.А. Об одном подходе к исследованию начально-краевых задач матфизики // Проблемы управления и информатики. — 1998. — № 1. — С. 79–86.
7. Стоян В.А. Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем. — К.: ВПЦ «Київський університет», 2011. — 319 с.
8. Стоян В.А., Двирничук К.В. О математическом моделировании трехмерного поля поперечных динамических смещений толстых упругих плит // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 6. — С. 58–73.
9. Стоян В.А., Двирничук К.В. О математическом моделировании задач управления динамикой толстых упругих плит. Ч. I. Управление при непрерывно заданном желаемом состоянии // Кибернетика и системный анализ. — 2014. — № 3. — С. 79–96.
10. Стоян В.А., Двирничук К.В. О математическом моделировании задач управления динамикой толстых упругих плит. Ч. II. Управление при дискретно заданном желаемом состоянии // Кибернетика и системный анализ. — 2015. — № 2. — С. 117–133.
11. Стоян В.А. Об алгоритме построения полутрехмерных дифференциальных уравнений эластодинамики толстых плит // Прикладная механика. — 1976. — **XII**, № 7. — С. 39–44.
12. Стоян В.А., Двирничук К.В. К построению дифференциальной модели поперечных динамических смещений толстого упругого слоя // Проблемы управления и информатики. — 2012. — № 4. — С. 74–83.
13. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. — М.: Гостехиздат, 1955. — 492 с.
14. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Механика твердого деформируемого тела. Т. 5: Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. — М.: ВИНИТИ, 1973. — 272 с.

15. Стоян В.А., Двирничук К.В., Ершов А.Е., Емцов А.С. О системе компьютерно-аналитического моделирования динамики пространственно-распределенных процессов // Компьютерная математика. — 2012. — № 2. — С. 34–44.

16. Стоян В.А., Двирничук К.В. Об интегральной модели поперечных динамических смещений толстого упругого слоя // Проблемы управления и информатики. — 2013. — № 1. — С. 70–82.

Надійшла до редакції 01.02.2016

В.А. Стоян, К.В. Двірничук

МЕТОДИ ПСЕВДОІНВЕРСНОЇ АЛГЕБРИ В ЗАДАЧАХ ІДЕНТИФІКАЦІЇ СТАНУ ТОВСТИХ ПРУЖНИХ ПЛИТ

Анотація. Розв'язано задачі ідентифікації тривимірної функції поперечних зміщень точок товстої пружної плити скінченних розмірів, динаміка якої описана лінійною диференціальною моделлю з дискретними і неперервними спостереженнями за початково-крайовими зовнішньодинамічними впливами плити. Робочими обрано середньоквадратичний критерій узгодження отриманого розв'язку зі спостереженнями за плитою та методи лінійної псевдоінверсної алгебри. Сформульовано умови точності та однозначності результатів ідентифікації.

Ключові слова: лінійні динамічні системи, ідентифікація, псевдоінверсія, товсті пружні плити, некоректні початково-крайові умови.

V.A. Stoyan, K.V. Dvirnychuk

METHODS OF PSEUDOINVERSE ALGEBRA IN IDENTIFICATION PROBLEMS FOR THE STATE OF THICK ELASTIC PLATE

Abstract. The authors solve problems of identifying the three-dimensional function of transverse displacements of points of a thick elastic plate of finite dimensions, whose dynamics is described by the linear differential model with discrete and continuous observations of the initial-boundary external–dynamic perturbations of the plate. The working criterion was selected as RMS criterion of matching the solution to the observations of the plate and methods of linear pseudo-inverse algebra. The conditions for the accuracy and uniqueness of the identification results are formulated.

Keywords: linear dynamic systems, thick elastic plates, incorrect initial-boundary problems, identification, pseudo-inversion.

Стоян Владимир Антонович,
доктор физ.-мат. наук, профессор Киевского национального университета имени Тараса Шевченко,
e-mail: v_a_stoyan@ukr.net.

Двирничук Константин Васильевич,
кандидат физ.-мат. наук, ассистент Черновицкого национального университета имени Юрия Федьковича,
e-mail: k_v_dvirnychuk@ukr.net.