УДК 519.872

Е.В. КОБА, О.Н. КУЧЕРЯВАЯ

О СЛОЖНЫХ ИМПУЛЬСАХ И ИХ СДВИГОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ

Аннотация. Введены понятия сложного импульса, сдвиговой меры пересечения двух импульсов, гребнеобразных импульсов, хаотичных импульсов. Дана оценка верхней и нижней границ вероятности хотя бы одного пересечения, сформулирована и доказана теорема о верхних оценках при пересечении гребнеобразных импульсов. Определены функция распределения и функция плотности момента первого перекрытия хаотичных импульсов.

Ключевые слова: сложный импульс, сдвиговая мера пересечения сложных импульсов, гребнеобразные сложные импульсы, сложные хаотичные импульсы.

ВВЕДЕНИЕ

Большое количество систем, в частности компьютерные и авиационные, используют общую среду передачи информации для абонентов. Информация представляет собой множество отдельных информационных единиц, которые требуют определенной обработки. Поскольку среда передачи информации общая для всех абонентов, то возможно наложение сигналов от разных абонентов и, следовательно, потеря информации. Это может привести к непоправимым критическим ситуациям. Поэтому задача о наложении (пересечении) множеств информации достаточно актуальна.

Отметим, что системы обслуживания с потоками сложных случайных импульсов изучались в [1–3]. В рассматриваемой статье вводятся понятия сложных импульсов гребнеобразного и хаотичного видов и исследуются их сдвиговые характеристики.

СЛОЖНЫЕ ИМПУЛЬСЫ И СДВИГОВАЯ МЕРА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ИМПУЛЬСОВ

Определение 1. Под сложным импульсом U будем понимать случайную функцию $U = u(t)$, где

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{если импульс существует в момент } t, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Рассмотрим также другой импульс $V = (v(t))$ и обозначим $UV = (u(t)v(t))$.

Определение 2. Сдвигом импульса V назовем $V_\tau = (v(t-\tau))$, $\tau \geq 0$. Тогда $UV_\tau = (u(t)v(t-\tau))$ (например, $(UV_\tau)(\tau) = u(\tau)v(o)$) и величину τ назовем сдвигом V относительно U.

Пусть $f(t)$ — плотность вероятности случайной величины X.

Определение 3. Определим UV_X как пересечение при случайном сдвиге на время величины X импульса V относительно U; $UV_X = u(t)\,v(t-X)$.

Данное определение справедливо при обобщенной случайной величине ς с плотностью $f_\varsigma(x) = 1$, $0 < x < \infty$. Это не случайная величина в обычном понимании, поскольку $\int_0^\infty f_\varsigma(x)\,dx = \infty$, а не единице.

Определение 4. Сдвиговой мерой μ_X пересечения сложных импульсов U и V назовем функционал множества $\mu_X = \mu_X(A) = \mu_X(UV_X; A)$, равный лебеговой мере множества точек t из множества A, для которых $u(t)v(t-X) = 1$.

При фиксированной реализации случайной величины X функция $\mu_X(A)$ является мерой, причем $\mu_X(A) \le L(A)$, где $L(A)$ — лебегова мера множества A.

Для непересекающихся множеств A и B будет выполняться равенство

$$\mu_X(A \cup B) = \mu_X(A) + \mu_X(B).$$

Если X — не фиксировано, а случайно, то $\mu_X(A)$ будет случайной мерой. Введем некоторые характеристики случайной меры.

Числовыми характеристиками этой случайной меры являются моменты $\alpha_k(A) = E(\mu_X(A))^k$; в частности, математическое ожидание определяется как $\alpha_1(A) = E\mu_X(A)$, а дисперсия — как $\sigma^2(A) = \alpha_2(A) - (\alpha_1(A))^2$.

При $A = R^+ = [0, \infty)$ функция $\alpha_1(A)$ есть математическое ожидание «интервала» пересечения сложных импульсов U и V.

Очевидно, что $\alpha_1(R^+) \le EL(U)$.

Если U — сумма непересекающихся интервалов (a_i, b_i), то $\alpha_1(R^+) \le \sum_i E(b_i - a_i)$ (в общем случае a_i, b_i — случайные величины).

Другой важной характеристикой случайной меры $\mu_X(A)$ является индикатор I_X хотя бы одного пересечения U с V_X, т.е.

$$I_X = P\{\sup_t (u(t)v(t - X)) = 1\}, \tag{1}$$

и вероятность $q(U, V_X)$ хотя бы одного пересечения U с V_X:

$$q(U, V_X) = P\{I_X = 1\}. \tag{2}$$

Обозначим $v(U, V_X)$ число пересечений U с V_X, т.е. таких моментов τ, что

$$\begin{cases} u(\tau-)v(\tau - X-) = 0, \\ u(\tau+)v(\tau - X+) = 1. \end{cases}$$

Здесь использованы символы $z(a-)$ и $z(a+)$ для пределов функции $z(t)$ соответственно слева и справа в точке a.

С учетом введенных определений и характеристик имеем оценки

$$q(U, V_X) \le Ev(U, V_X). \tag{3}$$

Кроме того, имеем нижнюю оценку

$$q(U, V_X) \ge 2Ev(U, V_X) - Ev^2(U, V_X). \tag{4}$$

Действительно,

$$Ev = P(v = 1) + \sum_{k=2}^{\infty} kP(v = k),$$

$$Ev(v - 1) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)P(v = k).$$

Отсюда

$$Ev - Ev(v-1) = 2Ev - Ev^2 =$$

$$= P(v = 1) - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-2)P(v = k) \le P(v = 1).$$

Отметим еще одну важную характеристику, связанную со сдвиговым пересечением сложных импульсов, — временем первого пересечения $\gamma(U, V_X)$. Обозначим

$$G(U, V_X; t) = P\{\gamma(U, V_X) \le t\}. \tag{5}$$

Если пересечения не происходит, то полагаем $\gamma(U, V_X) = \infty$. Таким образом, не обязательно, чтобы $G(U, V_X; t) \to 1$ при $t \to \infty$. Предел может быть меньше единицы.

Обозначим также

$$\tau = \tau(U, V_X) = E\{\gamma(U, V_X) | \gamma(U, V_X) < \infty\}. \tag{6}$$

ГРЕБНЕОБРАЗНЫЕ СЛОЖНЫЕ ИМПУЛЬСЫ

Рассмотрим более подробно функции $u(t)$ и $v(t)$. Они представляют собой «гребенку» с N зубцами; $b < a$ (рис. 1); длина «гребенки» составляет $(N-1)a + b$.

Случайная величина X имеет плотность вероятности $f(t)$, $t > 0$. Обозначим $g(t)$ плотность вероятности случайной величины $\gamma(U, V_X)$.

Рассмотрим возможные случаи соотношений a и b.

Случай 1. Пусть $b < a/2$. Имеем

$$g(t) = \sum_{k=1}^{N} g_k(t) + \sum_{k=2}^{N} c_k \delta(t - ka), \tag{7}$$

где $g_k(t)$ — плотность, связанная с попаданием случайной величины X в интервал $((k-1)a, (k-1)a + b)$; c_k — вероятность попадания случайной величины X в интервал $((k-1)a - b, (k-1)a)$; $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

Для введенных функций и констант имеем формулы

$$g_k(t) = \begin{cases} f(t), & \text{если } (k-1)a < t < (k-1)a + b, \\ 0 & \text{в остальных случаях}; \end{cases} \tag{8}$$

$$c_k = \int_{(k-1)a-b}^{(k-1)a} f(t)\, dt. \tag{9}$$

Таким образом, распределение случайной величины $\gamma(U, V_X)$ представляет смесь непрерывной и дискретной компонент.

Для функции распределения $G(U, V_X; t)$ случайной величины $\gamma(U, V_X)$ имеем более простое выражение, не требующее дельта-функции. Запишем формулу

$$G(U, V_X; ka) = P\{\gamma(U, V_X) \le ka\} = \sum_{i=1}^{k} \int_{(i-1)a}^{(i-1)a+b} f(t)\, dt + \sum_{i=2}^{k+1} \int_{(i-1)a-b}^{(i-1)a} f(t)\, dt =$$

$$= \int_0^b f(t)\, dt + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{ia-b}^{ia+b} f(t)\, dt + \int_{ka-b}^{ka} f(t)\, dt, \quad 1 \le k \le N-1. \tag{10}$$

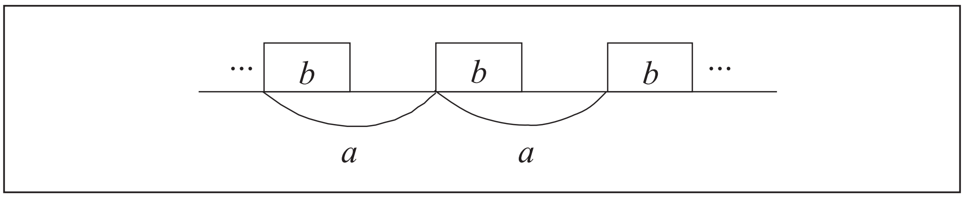

Рис. 1

Аналогично получаем

$$G(U, V_X; ka+b) = \int_0^b f(t)\,dt + \sum_{i=1}^{k} \int_{ia-b}^{ia+b} f(t)\,dt. \tag{11}$$

Чтобы найти $q(U, V_X)$, достаточно в формуле (11) положить $k = N-1$:

$$q(U, V_X) = \int_0^b f(t)\,dt + \sum_{i=1}^{N-1} \int_{ia-b}^{ia+b} f(t)\,dt. \tag{12}$$

Определим $\tau(U, V_X)$. Для этого достаточно вывести формулу для произведения $q(U, V_X)\tau(U, V_X)$, так как первый множитель уже известен.

Справедлива следующая формула:

$$q(U, V_X)\,\tau(U, V_X) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{ia}^{ia+b} tf(t)\,dt + a\sum_{i=1}^{N-1} i \int_{ia-b}^{ia} f(t)\,dt. \tag{13}$$

Случай 2. Пусть $\frac{a}{2} \le b \le a$. Имеем

$$q(U, V_X) = \int_0^{(N-1)a+b} f(t)\,dt,$$

$$q(U, V_X)\tau(U, V_X) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{ia}^{ia+b} tf(t)\,dt + a\sum_{i=1}^{N-1} i \int_{ia-a+b}^{ia} f(t)\,dt, \tag{14}$$

$$G(U, V_X; ka+b) = \int_0^{(k-1)a+b} f(t)\,dt. \tag{15}$$

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ГРЕБНЕОБРАЗНЫХ СЛОЖНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Рассмотрим предельное поведение сдвиговых характеристик импульсов U и V_X, когда число зубцов «гребенки» $N \to \infty$, $Na \to A$ и $\frac{b}{a} \to \rho$.

Теорема. Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины X — рассматривается как неизменная, $N \to \infty$, $Na \to A$, где $A > 0$ — положительная постоянная, $\frac{b}{a} \to \rho$, где $0 \le \rho \le 1$, причем плотность вероятности $f(x)$ случайной величины X непрерывна на отрезке $[0, A+\delta]$, где $\delta > 0$ — постоянная. Тогда выполняются следующие утверждения.

Утверждение 1. Если $\rho < \frac{1}{2}$, то при $N \to \infty$

$$G(U, V_X; t) \to 2\rho F(t), \ t \le A; \tag{16}$$

$$q(U, V_X) \to 2\rho F(A); \tag{17}$$

$$q(U, V_X)\,\tau(U, V_X) \to 2\rho \int_0^A tf(t)\,dt. \tag{18}$$

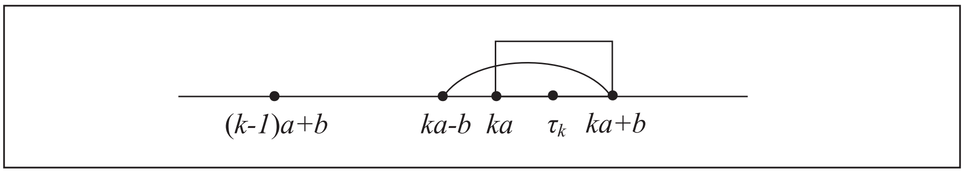

Рис. 2

Утверждение 2. Если $\frac{1}{2} \le \rho \le 1$, то при $N \to \infty$

$$G(U, V_X; t) \to F(t), \; t \le A; \tag{19}$$

$$q(U, V_X) \to F(A); \tag{20}$$

$$q(U, V_X)\tau(U, V_X) \to \int_0^A tf(t)\, dt. \tag{21}$$

Доказательство. Все соотношения (16)–(21) доказываются аналогично, поэтому остановимся на (16).

Рассмотрим одну из «гребенок», образующую сложный импульс U (рис. 2). Он занимает интервал $(ka, ka+b)$. Условие его первого пересечения сложным импульсом V_X: $ka-b < X < ka+b$. Вероятность этого события составляет $s_k = \int_{ka-b}^{ka+b} f(t)\, dt$.

По теореме о среднем из анализа имеем $s_k = 2bf(\tau_k) = a[2\rho f(\tau_k)]$, где τ_k — некоторая точка интервала $(ka-b, ka+b)$.

Это выражение представляет слагаемое интегральной суммы $\int 2\rho f(t)\, dt$ по любому отрезку $[0, t]$. Ввиду непрерывности $f(t)$ в пределе получаем (16).

ВРЕМЯ ПЕРВОГО ПЕРЕКРЫТИЯ СЛОЖНЫХ ХАОТИЧНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Определение 5. Под сложным хаотичным импульсом будем понимать случайную функцию $U = (u(t), \; 0 \le t \le T)$ со значениями 0 и 1 такую, которая представляет собой марковский процесс с состояниями 0 и 1, равна единице при $t = 0$ и имеет плотность перехода λ из состояния 0 в состояние 1 и плотность перехода μ из состояния 1 в состояние 0.

Предположим, что имеется «основной» сложный импульс на отрезке $[0, T]$. «Вспомогательный» импульс $V = (v(t), \; 0 \le t \le T)$ не зависит от U и имеет такую же плотность переходов и такое же начальное состояние. Случайная величина X, которая характеризует сдвиг V относительно U, не зависит от (U, V) и распределена по экспоненциальному закону с параметром λ.

Предстоящая задача — найти функцию распределения $G(U, V_X; t)$ момента первого перекрытия импульсов U, V_X в пределах отрезка $[0, T]$.

Рассмотрим марковский процесс $\xi(t)$, $0 \le t \le T$, с множеством состояний $\{0, 1, 2\}$ (рис. 3), который равен 0 при $X > T$ и равен $u(t) + v(t-X)$ в противном случае. Учитывая, что рассматривается только первое пересечение процессов $u(t)$, $v(t-X)$, состояние 2 является поглощающим.

Начальное состояние: $\xi(0) = 1$.

Обозначим

$$P\xi(t) = 0 = p(t), \quad P\xi(t) = 1 = q(t).$$

Тогда $G(U, V_X; t) = 1 - (p(t) + q(t))$.

Уравнения Колмогорова процесса $\xi(t)$ имеют вид

$$p'(t)+2\lambda p(t)=\mu q(t)\,,$$
$$q'(t)+(\lambda+\mu)\,q(t)=2\lambda p(t)\,.$$

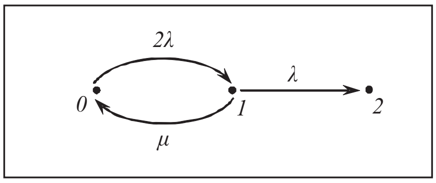

Рис. 3

В преобразованиях Лапласа имеем

$$(s+2\lambda)\,p^*(s)=\mu q^*(s)\,,$$

$$(s+\lambda+\mu)\,q^*(s)=2\lambda p^*(s)+1\,.$$

Решая эту систему и просуммировав $p^*(s)$ и $q^*(s)$, получаем

$$p^*(s)+q^*(s)=\frac{s+2\lambda+\mu}{s^2+(3\lambda+\mu)s+2\lambda^2}\,. \qquad (22)$$

Знаменатель имеет два отрицательных корня, которые обозначим $(-c_1)$ и $(-c_2)$, где $0< c_1 < c_2$. При этом

$$c_1=\frac{1}{2}\left(3\lambda+\mu-\sqrt{\lambda^2+6\lambda\mu+\mu^2}\right),\quad c_2=\frac{1}{2}\left(3\lambda+\mu+\sqrt{\lambda^2+6\lambda\mu+\mu^2}\right).$$

Формула (22) примет вид

$$p^*(s)+q^*(s)=\frac{s+2\lambda+\mu}{(s+c_1)(s+c_2)}\,.$$

В результате разложения на простейшие дроби получаем формулу

$$p^*(s)+q^*(s)=\frac{2\lambda+\mu-c_1}{(c_2-c_1)(s+c_1)}+\frac{c_2-2\lambda-\mu}{(c_2-c_1)(s+c_2)}\,.$$

Обратное преобразование Лапласа приводит к конечной формуле

$$1-G(U,V_X\,;t)=\frac{1}{c_2-c_1}[(2\lambda+\mu-c_1)\,e^{-c_1t}+(c_2-2\lambda-\mu)\,e^{-c_2t}\,].$$

В частности, $q(U,V_X)$ будет иметь вид $G(U,V_X\,;T)$. Вычисляя производную $G(U,V_X\,;t)$ в точке $t=0$, получаем $1-G(U,V_X\,;t)\sim\lambda t$, $t\to 0$.

Этот факт согласуется с вероятностной интуицией: действительно, вероятность перехода процесса $\xi(t)$ из состояния 1 в состояние 2 может состояться с вероятностью $\lambda t+o(t)$, $t\to 0$.

Плотность $g(t)$ момента первого пересечения импульсов U и V_X находим дифференцированием $G(U,V_X\,;t)$:

$$g(t)=\frac{1}{c_2-c_1}[c_1(2\lambda+\mu-c_1)\,e^{-c_1t}+c_2(c_2-2\lambda-\mu)\,e^{-c_2t}\,].$$

Для вычисления характеристики $q(U,V_X)\tau(U,V_X)$ достаточно использовать формулу

$$q(U,V_X)\,\tau(U,V_X)=\int_0^T t g(t)\,dt\,.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

После введения понятий сложного импульса, сдвиговой меры пересечения двух импульсов, гребнеобразных импульсов, хаотичных импульсов в статье были даны оценки их сдвиговых характеристик, а именно оценки верхней и нижней границ вероятности хотя бы одного их пересечения сложных импульсов. Кроме того, найдена функция распределения и плотности момента первого перекрытия хаотичных импульсов. Также сформулирована и доказана теорема о верхних оценках при пересечении гребнеобразных импульсов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коба Е.В., Дышлюк О.Н. Системы обслуживания с ограниченным последействием и потоками заявок сложной структуры // Проблемы управления и информатики. — 2010. — № 4. — С. 113–118.
2. Дышлюк О.Н., Коба Е.В., Пустовая С.В. Исследование распределения времени ожидания в системе обслуживания со сдвоенными заявками // Проблемы управления и информатики. — 2011. — № 4. — С. 97–107.
3. Дышлюк О.Н., Коба Е.В., Пустовая С.В. Исследование распределения времени ожидания в системе обслуживания со сдвоенными заявками методом статистического моделирования // Проблемы управления и информатики. — 2011. — № 5. — С. 81–88.

Надійшла до редакції 09.02.2016

О.В. Коба, О.М. Кучерява

ПРО СКЛАДНІ ІМПУЛЬСИ ТА ЇХНІ ЗСУВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Анотація. Введено поняття складного імпульсу, зсувної міри перетину двох імпульсів, гребенеподібних імпульсів, хаотичних імпульсів. Наведено оцінку верхньої та нижньої границь ймовірності хоча б одного перетину імпульсів, сформульовано і доведено теорему про верхні оцінки при перетині гребенеподібних імпульсів. Визначено функцію розподілу та функцію щільності моменту першого перетину хаотичних імпульсів.

Ключові слова: складний імпульс, зсувна міра перетину складних імпульсів, гребенеподібні складні імпульси, складні хаотичні імпульси.

O.V. Koba, O.M. Kucheryava

COMPLEX IMPULSES AND THEIR SHEAR PERFORMANCE

Abstract. The paper introduces the concept of complex impulse, shear measure of intersection of two impulses, comb impulses, and chaotic impulses. The upper and lower boundaries for the probability of at least one intersection are estimated and the theorem on the upper estimates in crossing the comb impulses is formulated. The distribution function and the density function of the first overlap of chaotic pulses are determined.

Keywords: complex impulse, shear complex of crossing, of complex impulses, pulses intersection, measure comb complex pulses, complex chaotic impulses.

Коба Елена Викторовна,
доктор физ.-мат. наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: e-koba@yandex.ru.

Кучерявая Ольга Николаевна,
кандидат физ.-мат. наук, доцент Национального авиационного университета, Киев, e-mail: kucheryava_o@ukr.net.