СИСТЕМНИЙ
АНАЛІЗ

И.В. СЕРГИЕНКО, Е.Ф. ГАЛБА

УДК 512.61

ВЗВЕШЕННАЯ ПСЕВДОИНВЕРСИЯ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ВЕСАМИ

Аннотация. Статья носит обзорный характер и посвящена развитию теории взвешенной псевдоинверсии. Определяются и исследуются взвешенные псевдообратные матрицы с вырожденными весами. Приведены теоремы существования и единственности этих матриц. Установлена связь взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами со взвешенными нормальными псевдорешениями. Дано представление взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметричных и симметризуемых матриц, получены разложения этих матриц в матричные степенные ряды и произведения, предельные представления этих матриц, получены взвешенные сингулярные разложения матриц с вырожденными весами, на основе которых определены разложения взвешенных псевдообратных матриц.

Ключевые слова: взвешенные псевдообратные матрицы с вырожденными весами, матричные степенные ряды и произведения, предельные представления взвешенных псевдообратных матриц, взвешенное сингулярное разложение матриц с вырожденными весами.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] впервые дано определение одного из вариантов взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами (с положительно-полуопределенными весовыми матрицами), а также определены необходимые и достаточные условия существования и единственности рассмотренного варианта взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами. В работах [2–4] исследованы другие варианты псевдообратных матриц с вырожденными весами. Определены необходимые и достаточные условия существования и единственности рассмотренных вариантов взвешенных псевдообратных матриц, а также определены взвешенные нормальные псевдорешения с вырожденными весами и установлена их связь со взвешенными псевдообратными матрицами. В упомянутых работах получены представления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметричных и симметризуемых матриц, разложения этих матриц в матричные степенные ряды и произведения, предельные представления этих матриц. В работах [5–7] впервые получены различные варианты взвешенного сингулярного разложения матриц с вырожденными весами. Определены необходимые и достаточные условия существования одного из рассмотренных вариантов взвешенных сингулярных разложений матриц с вырожденными весами. На основе взвешенных сингулярных разложений матриц получены разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами. В работе [8] введено понятие ML-взвешеннной псевдообратной матрицы, а в работах [9, 10] используется взвешенная псевдоинверсия с вырожденными весами, когда веса представляют диагональные матрицы, при построении итерационных методов для решения линейных задач. В дальнейшем будут рассматриваться взвешенные псевдообратные матрицы с вырожденными весами, определенные в работах [1–4].

Настоящая статья включает семь разделов. В разд. 1 вводятся необходимые для дальнейшего изложения обозначения, определения, приводятся известные факты и вспомогательные утверждения. В разд. 2 приведены теоремы существования и единственности различных вариантов взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами. При доказательстве использована теорема Гамильтона–Кэли, на ее основе получено представление взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в терминах коэффициентов характеристичесих многочленов симметризуемых и симметричных матриц. В разд. 3 приведены теоремы существования единственных взвешенных нормальных псевдорешений, определяемых на основе взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами. В разд. 4 представлены различные варианты взвешенного сингулярного разложения матриц с вырожденными весами. Определены необходимые и достаточные условия существования рассмотренных вариантов взвешенных сингулярных разложений матриц. Приведены разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, которые получены на основе взвешенных сингулярных разложений матриц. В разд. 5 и 6 на основе свойств симметризуемых матриц, представления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых и симметричных матриц и сингулярного разложения матриц представлены разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные ряды и произведения соответственно с положительными и отрицательными показателями степеней. На основе разложений взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и произведения с отрицательными показателями степеней получены многочленные предельные представления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами. В разд. 7 даны представления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами через другие псевдообратные матрицы.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ, ИЗВЕСТНЫЕ ФАКТЫ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Отметим, что в дальнейшем везде предполагается вещественность используемых скаляров, векторов, матриц и пространств. Обозначим $\mathbb{R}^n$ n-мерное векторное пространство над полем действительных чисел, где векторы — матрицы размера $n\times 1$. Пусть H — симметричная положительно-определенная или положительно-полуопределенная матрица. Обозначим $\mathbb{R}^n(H)$ евклидово пространство в случае положительно-определенной метрики или псевдоевклидово пространство в случае неотрицательной метрики, введенной скалярным произведением $(u, v)_H = (Hu, v)_E$, где $(u, v)_E = u^{\mathrm{T}} v$. Норму (полунорму) в $\mathbb{R}^n(H)$ введем соотношением $\| u \|_H = (u, u)_H^{1/2}$. В случае положительно-полуопределенной матрицы H будем обозначать через $\overline{\mathbb{R}}^n(H) \subset \mathbb{R}^n(H)$ и $\overline{\mathbb{R}}^n(H_{EE}^+) \subset \mathbb{R}^n(H_{EE}^+)$ подпространство векторов u, удовлетворяющих условию $HH_{EE}^+ u = H^{1/2} H_{EE}^{+1/2} u = u$, где $H_{EE}^{+1/2} = (H^{1/2})_{EE}^+$, E — единичная матрица, H_{EE}^+ — псевдообратная матрица Мура–Пенроуза к матрице H [11, 12]. В дальнейшем для матриц A будем использовать обозначение $A_{EE}^{+p} = (A^p)_{EE}^+$, где p — целое или дробное число. Так как нуль-пространства матриц H, H_{EE}^+, HH_{EE}^+ и $H^{1/2} H_{EE}^{+1/2}$ совпадают [13], то полунормы $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_{H_{EE}^+}$ для векторов в $\mathbb{R}^n(H)$, $\mathbb{R}^n(H_{EE}^+)$ становятся нормами в $\overline{\mathbb{R}}^n(H)$, $\overline{\mathbb{R}}^n(H_{EE}^+)$.

Определим норму прямоугольной матрицы [14]. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $H \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — симметричная положительно-определенная или положительно-полуопределенная матрица, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симметричная положительно-определенная или положительно-полуопределенная матрица, x — произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$. Предполагаем выполнение условий $rk(HA) = rk(A)$, $rk(AV) = rk(A)$. Для множества матриц A, удовлетворяющих этим условиям, норму введем соотношением

$$|| A ||_{HV} = \sup_{x\neq 0} \frac{|| H^{1/2} AVx ||_{E_m}}{|| x ||_{E_n}}, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, а нижний индекс при единичной матрице означает ее размер.

При таком определении норма матрицы A определяется как $|| A ||_{HV} = [\lambda_{\max}(VA^{\mathrm{T}} HAV)]^{1/2}$, где $\lambda_{\max}(L)$ — максимальное собственное значение матрицы L.

В [14] показано, что вещественная функция $||\cdot||_{HV}$, определенная формулой (1), при выполнении отмеченных условий является аддитивной (обобщенной) матричной нормой.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$, а $H \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $M \in \mathbb{R}^{p\times p}$ — симметричные положительно-полуопределенные матрицы, причем удовлетворяется одно из условий: $AMM_{EE}^{+} = AM_{EE}^{+}M = A$, $MM_{EE}^{+}B = M_{EE}^{+}MB = B$, тогда (см. [14, 15]) из определения нормы матриц соотношением (1) следует $|| AB ||_{HV} \leq \leq || A ||_{HM} \, || B ||_{M_{EE}^{+2}V}$.

В [16] определена взвешенная норма для квадратной матрицы, а также определены условия, при которых эта норма является мультипликативной матричной нормой. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — произвольная квадратная матрица, а $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симметричная положительно-полуопределенная матрица, которые удовлетворяют условиям $rk(HA) = rk(AH) = rk(A)$. Тогда норма матрицы A определяется соотношением

$$|| A ||_H = \sup_{x\neq 0} \frac{|| Ax ||_H}{|| x ||_H} = \sup_{x\neq 0} \frac{|| H^{1/2} AH_{EE}^{+1/2} H^{1/2} x ||_E}{|| H^{1/2} x ||_E}, \ x \in \overline{\mathbb{R}}^n(H).$$

В ряде работ определялись симметризуемые матрицы и изучались их свойства. В качестве симметризаторов, в основном, выступают положительно-определенные матрицы, а в работах [17–19] изучались H-симметричные матрицы, где H предполагается симметричной невырожденной знаконеопределенной матрицей. Определим симметризуемые матрицы с положительно-полуопределенными симметризаторами [16].

Определение 1. Квадратную матрицу U будем называть симметризуемой слева или справа с помощью симметричных положительно-полуопределенных матриц M и N, если выполняются соответственно условия

$$MU = U^{\mathrm{T}} M, \ rk(MU) = rk(U); \ UN = NU^{\mathrm{T}}, \ rk(UN) = rk(U).$$

Определение 2. Матрицу Q, определенную равенством $Q^{\mathrm{T}}HQ = I(H)$, где H — симметричная положительно-определенная (положительно-полуопределенная) матрица, $I(H)$ — матрица инерции для H, будем называть H-взвешенной ортогональной (псевдоортогональной).

Отметим основные вспомогательные утверждения, на основе которых исследовались фундаментальные свойства взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами.

При исследовании вопроса существования единственного решения взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами используются следующие утверждения [2].

Лемма 1. Пусть для квадратных матриц K, L, M выполняются условия $KM = MK$, $LM = ML$. Тогда из равенства $KM^2 = LM^2$ следует равенство $KM = LM$.

Лемма 2. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, а $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симметричные положительно-полуопределенные матрицы. Пусть матрицы $A^{\mathrm{T}}B$, AC, A^{T} имеют одинаковый ранг. Тогда матрица $A^{\mathrm{T}}BACA^{\mathrm{T}}$ имеет тот же ранг.

При исследовании разложений взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и произведения с положительными показателями степеней используются утверждения из [2].

Лемма 3. Для любых матриц $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $W \in \mathbb{R}^{n\times m}$ и действительного числа $0 < \sigma < \infty$ имеет место тождество

$$\sigma \prod_{k=0}^{n-1} \{E + (E - \sigma P)^{2^k}\} W = \sigma \sum_{k=0}^{2^n - 1} (E - \sigma P)^k W, \quad n = 1, 2, \ldots$$

При исследовании разложений взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и произведения с отрицательными показателями степеней используются утверждения из [20].

Лемма 4. Для любых матриц $P \in R^{n\times n}$, $W \in R^{n\times m}$ и действительного числа $0 < \delta < \infty$ имеет место тождество

$$\prod_{k=0}^{n-1} \{E + \delta^{2^k} (P + \delta E)^{-(2^k)}\} (P + \delta E)^{-1} W = \sum_{k=1}^{2^n} \delta^{k-1} (P + \delta E)^{-k} W, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Лемма 5. Для любых матриц $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ и действительного числа $0 < \delta < \infty$ имеет место тождество

$$M (L + \delta E)^{-1} \prod_{k=0}^{n-1} \{E + \delta^{2^k} (L + \delta E)^{-(2^k)}\} = M \sum_{k=1}^{2^n} \delta^{k-1} (L + \delta E)^{-k}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

В [21, 22] определены условия, при которых матрица-произведение двух эрмитовых матриц будет диагонализуемой матрицей простой структуры. Сформулируем этот результат в виде леммы для произведения двух симметричных действительных матриц, которая используется при доказательстве теорем о взвешенном сингулярном разложении матриц.

Лемма 6. Пусть A и B — симметричные матрицы, причем одна из них положительно-определенная. Тогда собственные значения матрицы AB — действительные числа, при этом матрица AB имеет простую структуру.

При доказательстве теоремы о сингулярном разложении матриц на основе взвешенных ортогональных матриц и взвешенных псевдоортогональных матриц используются лемма 6 и лемма о приведении к диагональной форме симметризуемой вырожденным симметризатором матрицы, доказанная в [5].

Лемма 7. Симметризуемая слева положительно-полуопределенным симметризатором $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ матрица $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ при выполнении условия $H_{EE}^{+} HL = L$ приводится к диагональной форме с помощью K-взвешенного ортогонального преобразования, т.е. существуют такие невырожденные матрицы U и K, $U^{\mathrm{T}} KU = E$, что $U^{\mathrm{T}} KLU = \Lambda$, $U^{\mathrm{T}} HLU = \Lambda$, а матрица L представляется в виде $L = U \Lambda U^{\mathrm{T}} K$, где $K = QD^2 Q^{\mathrm{T}}$, Q — ортогональная матрица, которая диагонализует матрицу H, т.е. $Q^{\mathrm{T}} HQ = \Phi$, $\Phi = DI(H)D = \mathrm{diag}\,(\varphi_i)$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r > 0$, $\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n = 0$ — собственные значения матрицы H, r — ранг матрицы H, $D = \mathrm{diag}\,(+\sqrt{\varphi_1}, \ldots, +\sqrt{\varphi_r}, 1, \ldots, 1)$, $I(H)$ — матрица инерции для H, столбцы матрицы U образуют линейно независимую систему собственных векторов матрицы L, а диагональные элементы матрицы Λ являются соответствующими собственными значениями матрицы L.

При доказательстве теоремы о сингулярном разложении матриц на основе взвешенных ортогональных матриц используется лемма, доказанная в [23].

Лемма 8. Симметризуемая слева положительно-полуопределенным симметризатором $H_{EE}^{+} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ матрица $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ при выполнении условия $HH_{EE}^{+}L = L$ приводится к диагональной форме с помощью S-взвешенного ортогонального преобразования, т.е. существуют такие невырожденные матрицы G и S, $G^{\mathrm{T}}SG = E$, что $G^{\mathrm{T}}SLG = \Lambda$, $G^{\mathrm{T}}H_{EE}^{+}LG = \Lambda$, а матрица L представляется в виде $L = G\Lambda G^{\mathrm{T}}S$, где $S = QD^{-2}Q^{\mathrm{T}}$, Q — ортогональная матрица, которая диагонализует матрицу H, т.е. $Q^{\mathrm{T}}HQ = \Phi$, $\Phi = DI(H)D = \mathrm{diag}\,(\varphi_i)$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r > 0$, $\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n = 0$ — собственные значения матрицы H, r — ранг матрицы H, $D = \mathrm{diag}\,(+\sqrt{\varphi_1}, \ldots, +\sqrt{\varphi_r}, 1, \ldots, 1)$, $I(H)$ — матрица инерции для H, столбцы матрицы G образуют линейно независимую систему собственных векторов матрицы L, а диагональные элементы матрицы Λ являются соответствующими собственными значениями матрицы L.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ВЕСАМИ

Рассмотрим теоремы существования и единственности различных вариантов взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами. При доказательстве использована теорема Гамильтона–Кэли и на ее основе получено представление взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых и симметричных матриц.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$, а $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симметричные положительно-полуопределенные матрицы. Тогда взвешенная псевдообратная матрица для матрицы A в работе [1] определяется как матрица $X = A_{BC}^{+}$, удовлетворяющая четырем условиям:

$$AXA = A,\ \ XAX = X,\ \ (BAX)^{\mathrm{T}} = BAX,\ \ (XAC)^{\mathrm{T}} = XAC, \tag{2}$$

т.е. рассматривается случай, когда идемпотентные матрицы AX и XA симметризуемые соответственно слева симметризатором B и справа симметризатором C.

В работе [1] определены условия, при которых система матричных уравнений (2) имеет единственное решение.

Теорема 1. Система уравнений (2) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда выполняются следующие соотношения для рангов матриц:

$$rk(BA) = rk(A),\ \ rk(AC) = rk(A). \tag{3}$$

В работе [24] получено представление взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (2), (3), в терминах коэффициентов характеристического многочлена симметризуемой матрицы.

Теорема 2. Матрица A_{BC}^{+}, удовлетворяющая (2), (3), представима в виде $A_{BC}^{+} = CSA^{\mathrm{T}}B$, где $S = f(A^{\mathrm{T}}BAC)$ — многочлен от матрицы $A^{\mathrm{T}}BAC$ вида $S = -\alpha_k^{-1}[(A^{\mathrm{T}}BAC)^{k-1} + \alpha_1(A^{\mathrm{T}}BAC)^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1}E]$, α_p, $p = 1, \ldots, n$, — коэффициенты характеристического многочлена $f(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n = \det[\lambda E - A^{\mathrm{T}}BAC]$, а α_k — последний, отличный от нуля коэффициент этого многочлена.

Следствие 1. Взвешенная псевдообратная матрица, определенная условиями (2), (3), имеет представления

$$A_{BC}^{+}=S_1CA^{\mathrm{T}}B=CA^{\mathrm{T}}BS_2=CA^{\mathrm{T}}S_3B=C^{1/2}S_4C^{1/2}A^{\mathrm{T}}B=CA^{\mathrm{T}}B^{1/2}S_5B^{1/2},$$

где S_1, S_2 , S_3 — многочлены от симметризуемых матриц, а S_4, S_5 — многочлены от симметричных матриц вида

$$S_1=-\alpha_k^{-1}[(CA^{\mathrm{T}}BA)^{k-1}+\alpha_1(CA^{\mathrm{T}}BA)^{k-2}+\ldots+\alpha_{k-1}E],$$
$$S_2=-\alpha_k^{-1}[(ACA^{\mathrm{T}}B)^{k-1}+\alpha_1(ACA^{\mathrm{T}}B)^{k-2}+\ldots+\alpha_{k-1}E],$$
$$S_3=-\alpha_k^{-1}[(BACA^{\mathrm{T}})^{k-1}+\alpha_1(BACA^{\mathrm{T}})^{k-2}+\ldots+\alpha_{k-1}E],$$
$$S_4=-\alpha_k^{-1}[(C^{1/2}A^{\mathrm{T}}BAC^{1/2})^{k-1}+\alpha_1(C^{1/2}A^{\mathrm{T}}BAC^{1/2})^{k-2}+\ldots+\alpha_{k-1}E],$$
$$S_5=-\alpha_k^{-1}[(B^{1/2}ACA^{\mathrm{T}}B^{1/2})^{k-1}+\alpha_1(B^{1/2}ACA^{\mathrm{T}}B^{1/2})^{k-2}+\ldots+\alpha_{k-1}E].$$

Следствие 2. Симметризуемые идемпотентные матрицы $A_{BC}^{+}A$ и AA_{BC}^{+} имеют следующие представления:

$$A_{BC}^{+}A=CSA^{\mathrm{T}}BA=f(CA^{\mathrm{T}}BA)=$$
$$=-\alpha_k^{-1}[(CA^{\mathrm{T}}BA)^{k}+\alpha_1(CA^{\mathrm{T}}BA)^{k-1}+\ldots+\alpha_{k-1}CA^{\mathrm{T}}BA],$$
$$AA_{BC}^{+}=ACSA^{\mathrm{T}}B=f(ACA^{\mathrm{T}}B)=$$
$$=-\alpha_k^{-1}[(ACA^{\mathrm{T}}B)^{k}+\alpha_1(ACA^{\mathrm{T}}B)^{k-1}+\ldots+\alpha_{k-1}ACA^{\mathrm{T}}B].$$

Следствие 3. Имеют место равенства $A^{\mathrm{T}}BAA_{BC}^{+}=A^{\mathrm{T}}B$, $A_{BC}^{+}ACA^{\mathrm{T}}=CA^{\mathrm{T}}$.

Следствие 4. При $rk(A)=1$ имеем формулу $A_{BC}^{+}=[\mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}BAC)]^{-1}CA^{\mathrm{T}}B$ для вычисления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (2), (3), где $\mathrm{tr}\,(L)$ — след матрицы L.

В работе [2] изучалась взвешенная псевдообратная матрица с вырожденными весами, определенная системой матричных уравнений

$$AXA=A,\ XAX=X,\ (BAX)^{\mathrm{T}}=BAX,\ (CXA)^{\mathrm{T}}=CXA, \tag{4}$$

т.е. случай, когда обе идемпотентные матрицы AX и XA симметризуемы слева соответственно вырожденными симметризаторами B и C.

В работе [2] определены условия, при которых система матричных уравнений (4) имеет единственное решение и получено представление взвешенных псевдообратных матриц в терминах коэффициентов характеристического многочлена симметризуемых матриц.

Теорема 3. Для того чтобы система (4) имела единственное решение $X=A_{BC}^{+}$, необходимо и достаточно выполнение условий

$$rk(BA)=rk(A),\ AC_{EE}^{+}C=A, \tag{5}$$

причем матрица A_{BC}^{+}, удовлетворяющая (4), (5), представима в виде $A_{BC}^{+}=$ $=C_{EE}^{+}SA^{\mathrm{T}}B$, где $S=f(A^{\mathrm{T}}BAC_{EE}^{+})$ — многочлен от матрицы $A^{\mathrm{T}}BAC_{EE}^{+}$ вида

$$S=-\alpha_k^{-1}[(A^{\mathrm{T}}BAC_{EE}^{+})^{k-1}+\alpha_1(A^{\mathrm{T}}BAC_{EE}^{+})^{k-2}+\ldots+\alpha_{k-1}E],$$

α_p, $p=1,\ldots,n$, — коэффициенты характеристического многочлена $f(\lambda)=\lambda^n++\alpha_1\lambda^{n-1}+\ldots+\alpha_n=\det[\lambda E-A^{\mathrm{T}}BAC_{EE}^{+}]$, а α_k — последний, отличный от нуля коэффициент этого многочлена, C_{EE}^{+} — псевдообратная матрица Мура–Пенроуза к матрице C.

Следствие 1. Взвешенная псевдообратная матрица, определенная условиями (4), (5), имеет также следующие представления:

$$A_{BC}^{+} = S_1 C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B = C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B S_2 =$$
$$= C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} S_3 B = C_{EE}^{+1/2} S_4 C_{EE}^{+1/2} A^{\mathrm{T}} B = C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B^{1/2} S_5 B^{1/2},$$

где S_1, S_2 , S_3 — многочлены от симметризуемых матриц, S_4, S_5 — многочлены от симметричных матриц вида

$$S_1 = -\alpha_k^{-1}[(C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} BA)^{k-1} + \alpha_1 (C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} BA)^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1} E],$$
$$S_2 = -\alpha_k^{-1}[(AC_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B)^{k-1} + \alpha_1 (AC_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B)^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1} E],$$
$$S_3 = -\alpha_k^{-1}[(BAC_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}})^{k-1} + \alpha_1 (BAC_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}})^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1} E],$$
$$S_4 = -\alpha_k^{-1}[(C_{EE}^{+1/2} A^{\mathrm{T}} BAC_{EE}^{+1/2})^{k-1} + \alpha_1 (C_{EE}^{+1/2} A^{\mathrm{T}} BAC_{EE}^{+1/2})^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1} E],$$
$$S_5 = -\alpha_k^{-1}[(B^{1/2} AC_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B^{1/2})^{k-1} + \alpha_1 (B^{1/2} AC_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B^{1/2})^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1} E].$$

Следствие 2. Симметризуемые идемпотентные матрицы $A_{BC}^{+} A$ и AA_{BC}^{+} имеют следующие представления:

$$A_{BC}^{+} A = C_{EE}^{+} S A^{\mathrm{T}} BA = f(C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} BA) =$$
$$= -\alpha_k^{-1}[(C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} BA)^{k} + \alpha_1 (C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} BA)^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1} (C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} BA)],$$
$$AA_{BC}^{+} = AC_{EE}^{+} S A^{\mathrm{T}} B = f(AC_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B) =$$
$$= -\alpha_k^{-1}[(AC_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B)^{k} + \alpha_1 (AC_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B)^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1} (AC_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B)].$$

Следствие 3. Имеют место равенства $A^{\mathrm{T}} BAA_{BC}^{+} = A^{\mathrm{T}} B$, $A_{BC}^{+} AC_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} = C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}}$.

Следствие 4. При $rk(A) = 1$ имеем формулу $A_{BC}^{+} = [\mathrm{tr}\,(A^{\mathrm{T}} BAC_{EE}^{+})]^{-1} \times \times C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B$ для вычисления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (4), (5).

Замечание 1. Если матрицы B и C (или одна из этих матриц) нулевые, то система матричных уравнений (4) при условиях (5) имеет решение тогда и только тогда, когда A — нулевая матрица, причем псевдообратная к ней матрица также нулевая.

Замечание 2. Если матрицы B и C положительно-определенные, то в предыдущих утверждениях (теорема 3, следствия 1–4) вместо псевдообратных матриц к этим матрицам необходимо использовать обратные. Тогда условия (5) заведомо выполняются и получим представления взвешенных псевдообратных матриц с положительно-определенными весами (см., например, [25]). Из соответствующего представления взвешенной псевдообратной матрицы для невырожденных весов следует представление псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза, полученное в статье [26].

В работе [3] изучалась взвешенная псевдообратная матрица с вырожденными весами, определенная системой матричных уравнений

$$AXA = A,\ XAX = X,\ (AXB)^{\mathrm{T}} = AXB,\ (CXA)^{\mathrm{T}} = CXA, \tag{6}$$

т.е. случай, когда идемпотентная матрица AX симметризуема справа симметризатором B, а идемпотентная матрица XA симметризуема слева симметризатором C. В этой работе определены условия, при которых система матричных уравнений (6) имеет единственное решение, и получено представление взвешенных псевдообратных матриц в терминах коэффициентов характеристического многочлена симметризуемых матриц.

Теорема 4. Для того чтобы система (6) имела единственное решение $X = A^{+}_{BC}$, необходимо и достаточно выполнение условий

$$B^{+}_{EE}BA = A, \ AC^{+}_{EE}C = A, \tag{7}$$

причем матрица A^{+}_{BC}, удовлетворяющая (6), (7), представима в виде $A^{+}_{BC} = C^{+}_{EE}SA^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE}$, где $S = f(A^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE}AC^{+}_{EE})$ — многочлен от матрицы $A^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE}AC^{+}_{EE}$ вида

$$S = -\alpha_k^{-1}[(A^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE}AC^{+}_{EE})^{k-1} + \alpha_1(A^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE}AC^{+}_{EE})^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1}E],$$

α_p, $p = 1, \ldots, n$, — коэффициенты характеристического многочлена $f(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n = \det[\lambda E - A^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE}AC^{+}_{EE}]$, а α_k — последний, отличный от нуля коэффициент этого многочлена, B^{+}_{EE}, C^{+}_{EE} — псевдообратные матрицы Мура–Пенроуза к матрицам B и C соответственно.

Следствие 1. Взвешенная псевдообратная матрица, определенная условиями (6), (7), имеет также следующие представления:

$$A^{+}_{BC} = S_1C^{+}_{EE}A^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE} = C^{+}_{EE}A^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE}S_2 = C^{+}_{EE}A^{\mathrm{T}}S_3B^{+}_{EE} =$$
$$= C^{+1/2}_{EE}S_4C^{+1/2}_{EE}A^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE} = C^{+}_{EE}A^{\mathrm{T}}B^{+1/2}_{EE}S_5B^{+1/2}_{EE},$$

где S_1, S_2, S_3 — многочлены от симметризуемых матриц, а S_4, S_5 — многочлены от симметричных матриц вида

$$S_1 = -\alpha_k^{-1}[(C^{+}_{EE}A^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE}A)^{k-1} + \alpha_1(C^{+}_{EE}A^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE}A)^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1}E],$$
$$S_2 = -\alpha_k^{-1}[(AC^{+}_{EE}A^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE})^{k-1} + \alpha_1(AC^{+}_{EE}A^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE})^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1}E],$$
$$S_3 = -\alpha_k^{-1}[(B^{+}_{EE}AC^{+}_{EE}A^{\mathrm{T}})^{k-1} + \alpha_1(B^{+}_{EE}AC^{+}_{EE}A^{\mathrm{T}})^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1}E],$$
$$S_4 = -\alpha_k^{-1}[(C^{+1/2}_{EE}A^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE}AC^{+1/2}_{EE})^{k-1} + \alpha_1(C^{+1/2}_{EE}A^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE}AC^{+1/2}_{EE})^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1}E],$$
$$S_5 = -\alpha_k^{-1}[(B^{+1/2}_{EE}AC^{+}_{EE}A^{\mathrm{T}}B^{+1/2}_{EE})^{k-1} + \alpha_1(B^{+1/2}_{EE}AC^{+}_{EE}A^{\mathrm{T}}B^{+1/2}_{EE})^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1}E].$$

Следствие 2. Симметризуемые идемпотентные матрицы $A^{+}_{BC}A$ и AA^{+}_{BC} имеют следующие представления:

$$A^{+}_{BC}A = C^{+}_{EE}SA^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE}A = f(C^{+}_{EE}A^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE}A) =$$
$$= -\alpha_k^{-1}[(C^{+}_{EE}A^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE}A)^{k} + \alpha_1(C^{+}_{EE}A^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE}A)^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1}(C^{+}_{EE}A^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE}A)],$$
$$AA^{+}_{BC} = AC^{+}_{EE}SA^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE} = f(AC^{+}_{EE}A^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE}) =$$
$$= -\alpha_k^{-1}[(AC^{+}_{EE}A^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE})^{k} + \alpha_1(AC^{+}_{EE}A^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE})^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1}(AC^{+}_{EE}A^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE})].$$

Следствие 3. Имеют место равенства

$$A^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE}AA^{+}_{BC} = A^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE}, \qquad A^{+}_{BC}AC^{+}_{EE}A^{\mathrm{T}} = C^{+}_{EE}A^{\mathrm{T}}.$$

Следствие 4. При $rk(A) = 1$ имеем формулу $A^{+}_{BC} = [\mathrm{tr}\,(A^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE}AC^{+}_{EE})]^{-1} \times C^{+}_{EE}A^{\mathrm{T}}B^{+}_{EE}$ для вычисления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (6), (7).

В работе [4] изучалась взвешенная псевдообратная матрица с вырожденными весами, определенная системой матричных уравнений

$$AXA = A, \ XAX = X, \ (AXB)^{\mathrm{T}} = AXB, \ (XAC)^{\mathrm{T}} = XAC, \tag{8}$$

т.е. случай, когда обе идемпотентные матрицы AX и XA симметризуемы справа соответственно симметризаторами B и C. В этой работе определены условия, при которых система матричных уравнений (3) имеет единственное решение, и получено представление взвешенных псевдообратных матриц в терминах коэффициентов характеристического многочлена симметризуемых матриц.

Теорема 5. Для того чтобы система (8) имела единственное решение $X = A_{BC}^{+}$, необходимо и достаточно выполнение условий

$$B_{EE}^{+} BA = A, \;\; rk(AC) = rk(A), \tag{9}$$

причем матрица A_{BC}^{+}, удовлетворяющая (8), (9), представима в виде $A_{BC}^{+} = CSA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+}$, где $S = f(A^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} AC)$ — многочлен от матрицы $A^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} AC$ вида

$$S = -\alpha_k^{-1} [(A^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} AC)^{k-1} + \alpha_1 (A^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} AC)^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1} E],$$

α_p, $p = 1, \ldots, n$, — коэффициенты характеристического многочлена $f(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n = \det [\lambda E - A^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} AC]$, а α_k — последний, отличный от нуля коэффициент этого многочлена, B_{EE}^{+} — псевдообратная матрица Мура–Пенроуза к матрице B.

Следствие 1. Взвешенная псевдообратная матрица, определенная условиями (8), (9), имеет также следующие представления:

$$A_{BC}^{+} = S_1 CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} = CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} S_2 = CA^{\mathrm{T}} S_3 B_{EE}^{+} =$$
$$= C^{1/2} S_4 C^{1/2} A^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} = CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+1/2} S_5 B_{EE}^{+1/2},$$

где S_1, S_2, S_3 — многочлены от симметризуемых матриц, S_4, S_5 — многочлены от симметричных матриц вида

$$S_1 = -\alpha_k^{-1} [(CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A)^{k-1} + \alpha_1 (CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A)^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1} E],$$
$$S_2 = -\alpha_k^{-1} [(ACA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+})^{k-1} + \alpha_1 (ACA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+})^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1} E],$$
$$S_3 = -\alpha_k^{-1} [(B_{EE}^{+} ACA^{\mathrm{T}})^{k-1} + \alpha_1 (B_{EE}^{+} ACA^{\mathrm{T}})^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1} E],$$
$$S_4 = -\alpha_k^{-1} [(C^{1/2} A^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} AC^{1/2})^{k-1} + \alpha_1 (C^{1/2} A^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} AC^{1/2})^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1} E],$$
$$S_5 = -\alpha_k^{-1} [(B_{EE}^{+1/2} ACA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+1/2})^{k-1} + \alpha_1 (B_{EE}^{+1/2} ACA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+1/2})^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1} E].$$

Следствие 2. Симметризуемые идемпотентные матрицы $A_{BC}^{+} A$ и AA_{BC}^{+} имеют следующие представления:

$$A_{BC}^{+} A = CSA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A = f(CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A) =$$
$$= -\alpha_k^{-1} [(CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A)^k + \alpha_1 (CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A)^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1} (CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A)],$$
$$AA_{BC}^{+} = ACSA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} = f(ACA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+}) =$$
$$= -\alpha_k^{-1} [(ACA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+})^k + \alpha_1 (ACA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+})^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1} (ACA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+})].$$

Следствие 3. Имеют место равенства $A^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} AA_{BC}^{+} = A^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+}$, $A_{BC}^{+} ACA^{\mathrm{T}} = CA^{\mathrm{T}}$.

Следствие 4. При $rk(A) = 1$ имеем формулу $A_{BC}^{+} = [\mathrm{tr}\,(A^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} AC)]^{-1} CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+}$ для вычисления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (8), (9).

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВЗВЕШЕННЫХ НОРМАЛЬНЫХ ПСЕВДОРЕШЕНИЙ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ВЕСАМИ

Пусть

$$Ax = f, \;\; x \in \mathbb{R}^n, \;\; f \in \mathbb{R}^m, \tag{10}$$

— система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с произвольной матрицей $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

В работе [16] определена система матричных уравнений, решение которой определяет решение СЛАУ по методу взвешенных наименьших квадратов. Там же установлена связь между взвешенными псевдообратными матрицами, определенных условиями (2), (3), и взвешенными нормальными псевдорешениями.

Пусть $Y = A_B^{(1,3)} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ — матрица, удовлетворяющая условиям $AYA = A$, $(BAY)^{\mathrm{T}} = BAY$, $rk(BA) = rk(A)$, где $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, а $B = B^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — положительно-полуопределенная матрица.

Теорема 6. Вектор $x^{(1,3)} = A_B^{(1,3)} f$ является решением по методу взвешенных наименьших квадратов системы (10) с весовой матрицей $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, т.е. удовлетворяет условию

$$|| Ax^{(1,3)} - f ||_B = \min_{x\in\mathbb{R}^n} || Ax - f ||_B . \tag{11}$$

Решение системы (10) по методу взвешенных наименьших квадратов с положительно-полуопределенным весом в общем случае не является единственным. Общий вид такого решения устанавливает следующее утверждение.

Теорема 7. Множество векторов, удовлетворяющих (11), определяется формулой $z = A_B^{(1,3)} f + (E - A^{(1)} A) y$, где $A^{(1)}$ — матрица, удовлетворяющая первому условию в (2), y — произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$.

Теорема 8. Вектор $x^+ = A_{BC}^+ f$, где матрица A_{BC}^+ определена условиями (2), (3), является в $\overline{\mathbb{R}}^n (C_{EE}^+)$ взвешенным нормальным псевдорешением СЛАУ (10) с положительно-полуопределенными весами B и C_{EE}^+, а именно единственным решением задачи: найти

$$\min_{x\in\overline{\mathbb{R}}^n (C_{EE}^+)\cap\Omega} || x ||_{C_{EE}^+} , \ \Omega = \operatorname{Arg} \min_{x\in\mathbb{R}^n} || Ax - f ||_B .$$

В работе [2] установлена связь между взвешенными псевдообратными матрицами, определенными условиями (4), (5), и взвешенными нормальными псевдорешениями.

Теорема 9. Вектор $x^+ = A_{BC}^+ f$, где матрица A_{BC}^+ определена условиями (4), (5), является взвешенным нормальным псевдорешением задачи (10) с положительно-полуопределенными весами B и C, а именно единственным решением задачи: найти

$$\min_{x\in\overline{\mathbb{R}}^n (C)\cap\Omega} || x ||_C , \ \Omega = \operatorname{Arg} \min_{x\in\mathbb{R}^n} || Ax - f ||_B .$$

Отметим, что задача нахождения взвешенного нормального псевдорешения с вырожденными весами обобщает задачу нахождения взвешенного нормального псевдорешения с положительно-определенными весами [27, 28] и задачу нахождения нормального псевдорешения [29]. Задача нахождения взвешенного нормального псевдорешения с вырожденными весами по формулировке близка к задаче нахождения *ML*-взвешенного псевдорешения [30]. Значительное внимание уделено исследователями изучению свойств и построению методов вычисления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (2), (3) в настоящей статье, и соответствующих взвешенных нормальных псевдорешений (см. [31]), нахождению *L*-псевдорешений [32] и связанных нормальных псевдорешений [33], решению задач наименьших квадратов с линейными и нелинейными связями [30]. Решение ряда задач наименьших квадратов с линейными и нелинейными связями представляется с помощью *ML*-взвешенных [30] и взвешенных [16] псевдообратных матриц.

В работе [3] установлена связь между взвешенными псевдообратными матрицами, определенными условиями (6), (7), и взвешенными нормальными псевдорешениями. Доказаны утверждения относительно решений по методу взвешенных наименьших квадратов.

Пусть $Y = A_{B^+}^{(1,3)} \in R^{n\times m}$ — матрица, удовлетворяющая условиям $AYA = A$, $(AYB)^{\mathrm{T}} = AYB$, $B_{EE}^{+} BA = A$, где $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, а $B = B^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — положительно-полуопределенная матрица.

Теорема 10. Вектор $x^{(1,3)} = A_{B^+}^{(1,3)} f$ является решением по методу взвешенных наименьших квадратов с положительно-полуопределенным весом $B_{EE}^{+} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ СЛАУ (10), т.е. удовлетворяет условию

$$\| Ax^{(1,3)} - f \|_{B_{EE}^{+}} = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \| Ax - f \|_{B_{EE}^{+}} . \tag{12}$$

Теорема 11. Множество векторов, удовлетворяющих (12), определяется формулой $z = A_{B^+}^{(1,3)} f + (E - A^{(1)} A) y$, где $A^{(1)}$ — матрица, удовлетворяющая первому условию в (6), y — произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$.

Теорема 12. Вектор $x^{+} = A_{BC}^{+} f$, где матрица A_{BC}^{+} определена условиями (6), (7), является в $\overline{\mathbb{R}}^n(C)$ взвешенным нормальным псевдорешением СЛАУ (10) с положительно-полуопределенными весами B_{EE}^{+} и C, а именно единственным решением задачи: найти

$$\min_{x\in\overline{\mathbb{R}}^n(C)\cap\Omega} \| x \|_C , \quad \Omega = \operatorname{Arg} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \| Ax - f \|_{B_{EE}^{+}} .$$

В работе [4] установлена связь между взвешенными псевдообратными матрицами, определенными условиями (8), (9), и взвешенными нормальными псевдорешениями.

Теорема 13. Вектор $x^{+} = A_{BC}^{+} f$, где матрица A_{BC}^{+} определена условиями (8), (9), является взвешенным нормальным псевдорешением СЛАУ (10) с положительно-полуопределенными весами B_{EE}^{+} и C_{EE}^{+}, а именно единственным решением задачи: найти

$$\min_{x\in\overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^{+})\cap\Omega} \| x \|_{C_{EE}^{+}}, \quad \Omega = \operatorname{Arg} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \| Ax - f \|_{B_{EE}^{+}} .$$

4. ВЗВЕШЕННОЕ СИНГУЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МАТРИЦ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ВЕСАМИ И ВЗВЕШЕННОЕ ПСЕВДООБРАЩЕНИЕ МАТРИЦ

В работе [5] получено взвешенное сингулярное разложение матриц с вырожденными весами на основе взвешенных ортогональных матриц и взвешенных псевдоортогональных матриц. Определены достаточные условия существования предложенного варианта взвешенного сингулярного разложения матриц. Приведен также обзор литературы по использованию взвешенного сингулярного разложения матриц с положительно-определенными весами для теоретических исследований взвешенных псевдообратных матриц и построения методов вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с положительно-определенными весами, а также для анализа влияния возмущений исходных данных на решения задач наименьших квадратов (см., например, [34–36]).

Теорема 14. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и выполняются равенства

$$B_{EE}^{+} BA = A, \; AC_{EE}^{+} C = A, \tag{13}$$

тогда для матрицы A существуют взвешенная ортогональная матрица $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и взвешенная псевдоортогональная матрица $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ соответственно с весами $K \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ такие, что

$$U^{\mathrm{T}} BAV = \Sigma = \begin{cases} \left\| \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0) \quad O_m^{n-m} \right\|, & \text{если} \quad m \le n, \\ \left\| \begin{matrix} \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0) \\ O_{m-n}^{n} \end{matrix} \right\|, & \text{если} \quad m \ge n, \end{cases}$$

и

$$A = U \Sigma V^{\mathrm{T}} C,$$

где r — ранг матрицы A, столбцы матрицы U — ортонормированные в $\mathbb{R}^m (K)$ собственные векторы матрицы $AC_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B$, столбцы матрицы V состоят из системы ортонормированных и изотропных в $\overline{\mathbb{R}}^n (C)$ собственных векторов матрицы $C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} BA$, σ_i, $i = 1, \ldots, r$, — квадратные корни из ненулевых собственных значений матрицы $AC_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B$, $O_k^l \in \mathbb{R}^{k \times l}$ — нулевая матрица, $B = B^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ — положительно-полуопределенная матрица, матрица $K \in \mathbb{R}^{m \times m}$ определена в лемме 7, где следует положить $H = B$.

Замечание 3. Отметим, что впервые сингулярное разложение квадратных матриц получено в [37]. В работах [38, 39] получено взвешенное сингулярное разложение матриц с положительно-определенными весами. Из сингулярного разложения матриц, определенного в теореме 14, следует сингулярное разложение матриц, полученное в [39], а из [39] следует сингулярное разложение матриц, полученное в [37].

Замечание 4. Легко убедиться, что из первого условия в (13) следует первое условие в (5), поэтому все свойства взвешенных псевдообратных матриц, определенных условием (4), (5), будут иметь место для матриц, определенных условием (4), (13).

В [5] получены разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (4), (13), на основе взвешенного сингулярного разложения матриц, полученного в теореме 14.

Теорема 15. Взвешенная псевдообратная матрица к матрице A, определенной условиями (4), (13), имеет разложение $A_{BC}^{+} = V \Sigma_{EE}^{+} U^{\mathrm{T}} B$, где матрицы V, U, B, Σ определены в теореме 14, матрица Σ_{EE}^{+} является псевдообратной матрицей Мура–Пенроуза к матрице Σ.

В работах [6, 7] получено взвешенное сингулярное разложение матриц с вырожденными весами на основе ортогональных матриц. Определены необходимые и достаточные условия существования этого разложения.

Теорема 16. Пусть $A \in R^{m \times n}$ и выполняются равенства (13), тогда:

1) для матрицы A существуют ортогональные матрицы $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ такие, что

$$U^{\mathrm{T}} B^{1/2} AC_{EE}^{+1/2} V = \Sigma = \begin{cases} \left\| \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0) \quad O_m^{n-m} \right\|, & \text{если} \quad m \le n, \\ \left\| \begin{matrix} \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0) \\ O_{m-n}^{n} \end{matrix} \right\|, & \text{если} \quad m \ge n, \end{cases}$$

и

$$A = B_{EE}^{+1/2} U \Sigma V^{\mathrm{T}} C^{1/2}, \tag{14}$$

где r — ранг матрицы A, столбцы матрицы U — ортонормированные в $\mathbb{R}^m(E)$ собственные векторы матрицы $B^{1/2}AC_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}B^{1/2}$, столбцы матрицы V — ортонормированные в $\mathbb{R}^n(E)$ собственные векторы матрицы $C_{EE}^{+1/2}A^{\mathrm{T}}BAC_{EE}^{+1/2}$, σ_i, $i=1,\ldots,r$, — квадратные корни из ненулевых собственных значений матрицы $B^{1/2}AC_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}B^{1/2}$, $O_k^l \in \mathbb{R}^{k\times l}$ — нулевая матрица;

2) условия (13) являются необходимыми и достаточными для существования взвешенного сингулярного разложения матрицы A вида (14).

В [6, 7] получены разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (4), (5), на основе взвешенного сингулярного разложения матриц, определенного в теореме 16.

Теорема 17. Взвешенная псевдообратная матрица для матрицы A при выполнении условий (13) имеет разложение $A_{BC}^{+}=C_{EE}^{+1/2}V\Sigma_{EE}^{+}U^{\mathrm{T}}B^{1/2}$, где матрицы V, U, B, C, Σ определены в теореме 16.

В работе [23] получено два варианта взвешенного сингулярного разложения матриц с вырожденными весами на основе взвешенных ортогональных матриц. Определены достаточные условия существования этих разложений.

Теорема 18. Пусть $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ — произвольная матрица и выполняются условия (13), где $B=B^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ и $C=C^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ — положительно-полуопределенные матрицы, тогда для матрицы A существуют взвешенные ортогональные матрицы $U\in\mathbb{R}^{m\times m}$ и $W\in\mathbb{R}^{n\times n}$ соответственно с положительно-определенными весами $M\in\mathbb{R}^{m\times m}$ и $N\in\mathbb{R}^{n\times n}$ такие, что

$$U^{\mathrm{T}}BAW=\Sigma=\begin{cases}\left\|\operatorname{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_r,0,\ldots,0)\quad O_m^{n-m}\right\|, & \text{если}\quad m\le n,\\ \left\|\begin{matrix}\operatorname{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_r,0,\ldots,0)\\ O_{m-n}^{n}\end{matrix}\right\|, & \text{если}\quad m\ge n,\end{cases}$$

и

$$A=U\Sigma W^{\mathrm{T}}N,$$

где r — ранг матрицы A, столбцы матрицы U — ортонормированные в $\mathbb{R}^m(M)$ собственные векторы матрицы $AC_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}B$, столбцы матрицы W — ортонормированные в $\mathbb{R}^n(N)$ собственные векторы матрицы $C_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}BA$, $M=K\in\mathbb{R}^{m\times m}$, $N=K\in\mathbb{R}^{n\times n}$, матрица K определена в лемме 7, где следует положить $H=B\in\mathbb{R}^{m\times m}$ в случае матрицы M и $H=C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ в случае матрицы N, σ_i, $i=1,\ldots,r$, — квадратные корни из ненулевых собственных значений матрицы $AC_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}B$, $O_k^l\in\mathbb{R}^{k\times l}$ — нулевая матрица.

В [23] получены разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (4), (13), на основе взвешенного сингулярного разложения матриц, полученного в теореме 18.

Теорема 19. Взвешенная псевдообратная матрица, определенная условиями (4), (13), имеет разложение $A_{BC}^{+}=W\Sigma_{EE}^{+}U^{\mathrm{T}}B$, где матрицы W, U, B, Σ определены в теореме 18.

Теорема 20. Пусть $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ — произвольная матрица и выполняются условия (13), где $B=B^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ и $C=C^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ — положительно-полуопределенные матрицы, тогда для матрицы A существуют взвешенные ортогональные матрицы $G\in\mathbb{R}^{m\times m}$ и $V\in\mathbb{R}^{n\times n}$ соответственно с положительно-определенными весами $M\in\mathbb{R}^{m\times m}$ и $N\in\mathbb{R}^{n\times n}$ такие, что

$$G^{\mathrm T} B_{EE}^{+} AV = \Sigma = \begin{cases} \left\| \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0) \quad O_m^{n-m} \right\|, & \text{если} \quad m \le n, \\ \left\| \begin{matrix} \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0) \\ O_{m-n}^{n} \end{matrix} \right\|, & \text{если} \quad m \ge n, \end{cases}$$

и

$$A = G \Sigma V^{\mathrm T} N,$$

где r — ранг матрицы A, столбцы матрицы G — ортонормированные в $\mathbb{R}^m (M)$ собственные векторы матрицы $ACA^{\mathrm T} B_{EE}^{+}$, столбцы матрицы V — ортонормированные в $\mathbb{R}^n (N)$ собственные векторы матрицы $CA^{\mathrm T} B_{EE}^{+} A$, $M = S \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $N = S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, матрица S определена в лемме 8, где следует положить $H = B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ в случае матрицы M и $H = C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ в случае матрицы N, σ_i, $i = 1, \ldots, r$, — квадратные корни из ненулевых собственных значений матрицы $ACA^{\mathrm T} B_{EE}^{+}$, $O_k^l \in \mathbb{R}^{k \times l}$ — нулевая матрица.

В [23] получены разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (8), (13), на основе взвешенного сингулярного разложения матриц, полученного в теореме 20.

Теорема 21. Взвешенная псевдообратная матрица для матрицы A, определенная условиями (8), (13), имеет разложение $A_{BC}^{+} = V \Sigma_{EE}^{+} G^{\mathrm T} B_{EE}^{+}$, где матрицы V, G, B, Σ определены в теореме 20.

5. РАЗЛОЖЕНИЯ В МАТРИЧНЫЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ СТЕПЕНЕЙ

Рассмотрим разложения в матричные степенные ряды и произведения с положительными показателями степеней взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами.

Для взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (2), (3), в работе [14] получены разложения в матричные степенные ряды с положительными показателями степеней на основе представления взвешенных псевдообратных матриц в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц, определенного в теореме 2.

Теорема 22. Для произвольной матрицы $A \ne 0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, симметричных положительно-полуопределенных матриц $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, удовлетворяющих условиям (3), и действительного числа σ, $0 < \sigma < 2[\lambda_{\max}(C^{1/2} A^{\mathrm T} BAC^{1/2})]^{-1}$ имеет место соотношение

$$A_{BC}^{+} = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} C^{1/2} (E - \sigma C^{1/2} A^{\mathrm T} BAC^{1/2})^k C^{1/2} A^{\mathrm T} B. \tag{15}$$

Следствие 1. Из (15) вытекают соотношения

$$A_{BC}^{+} = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} (E - \sigma CA^{\mathrm T} BA)^k CA^{\mathrm T} B = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} C (E - \sigma A^{\mathrm T} BAC)^k A^{\mathrm T} B =$$

$$= \sigma \sum_{k=0}^{\infty} CA^{\mathrm T} B (E - \sigma ACA^{\mathrm T} B)^k = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} CA^{\mathrm T} (E - \sigma BACA^{\mathrm T})^k B =$$

$$= \sigma \sum_{k=0}^{\infty} CA^{\mathrm T} B^{1/2} (E - \sigma B^{1/2} ACA^{\mathrm T} B^{1/2})^k B^{1/2}.$$

В работе [40] для взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (2), (3), получены следующие разложения в матричные степенные произведения.

Теорема 23. Для произвольной матрицы $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, симметричных положительно-полуопределенных матриц $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющих условиям (3), и для действительного числа σ, $0 < \sigma < 2d_{\max}^{-2}$, имеет место соотношение

$$A_{BC}^{+} = \sigma C^{1/2} \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E - \sigma C^{1/2} A^{\mathrm{T}} BAC^{1/2})^{2^k}\} C^{1/2} A^{\mathrm{T}} B, \tag{16}$$

где $d_{\max}$ — максимальное сингулярное число матрицы $B^{1/2} AC^{1/2}$.

Следствие 1. Из равенства (16) вытекает справедливость соотношений

$$A_{BC}^{+} = \sigma C \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E - \sigma A^{\mathrm{T}} BAC)^{2^k}\} A^{\mathrm{T}} B = \sigma \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E - \sigma CA^{\mathrm{T}} BA)^{2^k}\} CA^{\mathrm{T}} B =$$

$$= \sigma CA^{\mathrm{T}} B \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E - \sigma ACA^{\mathrm{T}} B)^{2^k}\} = \sigma CA^{\mathrm{T}} \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E - \sigma BACA^{\mathrm{T}})^{2^k}\} B =$$

$$= \sigma CA^{\mathrm{T}} B^{1/2} \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E - \sigma B^{1/2} ACA^{\mathrm{T}} B^{1/2})^{2^k}\} B^{1/2}.$$

Для взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (4), (5), в работе [2] получены следующие разложения в матричные степенные ряды и произведения с положительными показателями степеней.

Теорема 24. Для произвольной матрицы $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, симметричных положительно-полуопределенных матриц $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющих условиям (5), и действительного числа σ, $0 < \sigma < 2[\lambda_{\max}(C_{EE}^{+1/2} A^{\mathrm{T}} BAC_{EE}^{+1/2})]^{-1}$, имеют место соотношения

$$A_{BC}^{+} = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} C_{EE}^{+1/2} (E - \sigma C_{EE}^{+1/2} A^{\mathrm{T}} BAC_{EE}^{+1/2})^k C_{EE}^{+1/2} A^{\mathrm{T}} B, \tag{17}$$

$$\| A_{BC}^{+} - A_{\sigma,p}^{+} \|_{CB_{EE}^{+1/2}} \leq \max_{\lambda_i \neq 0} \{\lambda_i^{-1/2} |1 - \sigma\lambda_i|^p\}, \tag{18}$$

где $A_{\sigma,p}^{+} = \sigma \sum_{k=0}^{p-1} C_{EE}^{+1/2} (E - \sigma C_{EE}^{+1/2} A^{\mathrm{T}} BAC_{EE}^{+1/2})^k C_{EE}^{+1/2} A^{\mathrm{T}} B$, $p = 1, 2, \ldots$, λ_i — собственные значения матрицы $L = C_{EE}^{+1/2} A^{\mathrm{T}} BAC_{EE}^{+1/2}$.

Следствие 1. Из (17) вытекают следующие соотношения:

$$A_{BC}^{+} = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} (E - \sigma C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} BA)^k C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} C_{EE}^{+} (E - \sigma A^{\mathrm{T}} BAC_{EE}^{+})^k A^{\mathrm{T}} B =$$

$$= \sigma \sum_{k=0}^{\infty} C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B (E - \sigma AC_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B)^k = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} (E - \sigma BAC_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}})^k B =$$

$$= \sigma \sum_{k=0}^{\infty} C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B^{1/2} (E - \sigma B^{1/2} AC_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B^{1/2})^k B^{1/2}.$$

В силу следствия 1 и леммы 3 имеем следующее разложение взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричное степенное произведение:

$$A_{BC}^{+} = \sigma \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E - \sigma C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} BA)^{2^k}\} C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B. \tag{19}$$

Обозначим $A_{\sigma,n}^{+}=\sigma\prod_{k=0}^{n-1}\{E+(E-\sigma C_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}BA)^{2^k}\}C_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}B,\quad n=1,2,\ldots$ Тогда в силу леммы 3 и соотношения (18) получим

$$||\,A_{BC}^{+}-A_{\sigma,n}^{+}\,||_{CB_{EE}^{+1/2}}\le\max_{\lambda_i\neq 0}\{\lambda_i^{-1/2}|1-\sigma\lambda_i|^{2^n}\}.$$

На основании (19) можно получить другие виды разложений взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные произведения:

$$A_{BC}^{+}=\sigma C_{EE}^{+}\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E-\sigma A^{\mathrm{T}}BAC_{EE}^{+})^{2^k}\}A^{\mathrm{T}}B=$$

$$=\sigma C_{EE}^{+1/2}\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E-\sigma C_{EE}^{+1/2}A^{\mathrm{T}}BAC_{EE}^{+1/2})^{2^k}\}C_{EE}^{+1/2}A^{\mathrm{T}}B=$$

$$=\sigma C_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}B\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E-\sigma AC_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}B)^{2^k}\}=\sigma C_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E-\sigma BAC_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}})^{2^k}\}B=$$

$$=\sigma C_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}B^{1/2}\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E-\sigma B^{1/2}AC_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}B^{1/2})^{2^k}\}B^{1/2}.$$

Для взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (6), (7), в работе [3] получены следующие разложения в матричные степенные ряды и произведения с положительными показателями степеней на основе представления взвешенных псевдообратных матриц в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых и симметричных матриц, определенного в теореме 4.

Теорема 25. Для произвольной матрицы $A\neq 0\in\mathbb{R}^{m\times n}$, симметричных положительно-полуопределенных матриц $B\in\mathbb{R}^{m\times m}$, $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющих условиям (6), (7), и действительного числа σ, $0<\sigma<2[\lambda_{\max}(C_{EE}^{+1/2}A^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}AC_{EE}^{+1/2})]^{-1}$, имеют место соотношения

$$\begin{gathered}A_{BC}^{+}=\sigma\sum_{k=0}^{\infty}C_{EE}^{+1/2}(E-\sigma C_{EE}^{+1/2}A^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}AC_{EE}^{+1/2})^{k}C_{EE}^{+1/2}A^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+},\\ ||\,A_{BC}^{+}-A_{\sigma,p}^{+}||_{CB^{1/2}}\le\max_{\lambda_i\neq 0}\{\lambda_i^{-1/2}|1-\sigma\lambda_i|^{p}\},\end{gathered}\tag{20}$$

где $A_{\sigma,p}^{+}=\sigma\sum_{k=0}^{p-1}C_{EE}^{+1/2}(E-\sigma C_{EE}^{+1/2}A^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}AC_{EE}^{+1/2})^{k}C_{EE}^{+1/2}A^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}$, $p=1,2,\ldots$; λ_i — собственные значения матрицы $L=C_{EE}^{+1/2}A^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}AC_{EE}^{+1/2}$.

Следствие 1. Из (20) имеем следующие соотношения:

$$A_{BC}^{+}=\sigma\sum_{k=0}^{\infty}(E-\sigma C_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}A)^{k}C_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}=$$

$$=\sigma\sum_{k=0}^{\infty}C_{EE}^{+}(E-\sigma A^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}AC_{EE}^{+})^{k}A^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}=$$

$$=\sigma\sum_{k=0}^{\infty}C_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}(E-\sigma AC_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+})^{k}=\sigma\sum_{k=0}^{\infty}C_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}(E-\sigma B_{EE}^{+}AC_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}})^{k}B_{EE}^{+}=$$

$$=\sigma\sum_{k=0}^{\infty}C_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+1/2}(E-\sigma B_{EE}^{+1/2}AC_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+1/2})^{k}B_{EE}^{+1/2}.$$

В [3] также получены формулы разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные произведения

$$A_{BC}^{+}=\sigma\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E-\sigma C_{EE}^{+}A^{\mathrm T}B_{EE}^{+}A)^{2^k}\}C_{EE}^{+}A^{\mathrm T}B_{EE}^{+}=$$

$$=\sigma C_{EE}^{+}\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E-\sigma A^{\mathrm T}B_{EE}^{+}AC_{EE}^{+})^{2^k}\}A^{\mathrm T}B_{EE}^{+}=$$

$$=\sigma C_{EE}^{+1/2}\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E-\sigma C_{EE}^{+1/2}A^{\mathrm T}B_{EE}^{+}AC_{EE}^{+1/2})^{2^k}\}C_{EE}^{+1/2}A^{\mathrm T}B_{EE}^{+}=$$

$$=\sigma C_{EE}^{+}A^{\mathrm T}B_{EE}^{+}\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E-\sigma AC_{EE}^{+}A^{\mathrm T}B_{EE}^{+})^{2^k}\}=$$

$$=\sigma C_{EE}^{+}A^{\mathrm T}\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E-\sigma B_{EE}^{+}AC_{EE}^{+}A^{\mathrm T})^{2^k}\}B_{EE}^{+}=$$

$$=\sigma C_{EE}^{+}A^{\mathrm T}B_{EE}^{+1/2}\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E-\sigma B_{EE}^{+1/2}AC_{EE}^{+}A^{\mathrm T}B_{EE}^{+1/2})^{2^k}\}B_{EE}^{+1/2}$$

и оценка

$$\|A_{BC}^{+}-A_{\sigma,n}^{+}\|_{CB^{1/2}}\le\max_{\lambda_i\ne0}\{\lambda_i^{-1/2}|1-\sigma\lambda_i|^{2^n}\},$$

где $A_{\sigma,n}^{+}=\sigma\prod_{k=0}^{n-1}\{E+(E-\sigma C_{EE}^{+}A^{\mathrm T}B_{EE}^{+}A)^{2^k}\}C_{EE}^{+}A^{\mathrm T}B_{EE}^{+},\ n=1,2,\dots$

Для взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (8), (9), в работе [4] получены разложения с положительными показателями степеней в матричные степенные ряды и произведения.

Теорема 26. Для произвольной матрицы $A\ne0\in\mathbb{R}^{m\times n}$, симметричных положительно-полуопределенных матриц $B\in\mathbb{R}^{m\times m}$, $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющих условиям (9), и действительного числа σ, $0<\sigma<2[\lambda_{\max}(C^{1/2}A^{\mathrm T}B_{EE}^{+}AC^{1/2})]^{-1}$, имеют место соотношения

$$A_{BC}^{+}=\sigma\sum_{k=0}^{\infty}C^{1/2}(E-\sigma C^{1/2}A^{\mathrm T}B_{EE}^{+}AC^{1/2})^{k}C^{1/2}A^{\mathrm T}B_{EE}^{+},$$
$$\|A_{BC}^{+}-A_{\sigma,p}^{+}\|_{C_{EE}^{+}B^{1/2}}\le\max_{\lambda_i\ne0}\{\lambda_i^{-1/2}|1-\sigma\lambda_i|^{p}\},\qquad(21)$$

где $A_{\sigma,p}^{+}=\sigma\sum_{k=0}^{p-1}C^{1/2}(E-\sigma C^{1/2}A^{\mathrm T}B_{EE}^{+}AC^{1/2})^{k}C^{1/2}A^{\mathrm T}B_{EE}^{+},\quad p=1,2,\dots$;

λ_i — собственные значения матрицы $L=C^{1/2}A^{\mathrm T}B_{EE}^{+}AC^{1/2}$.

Следствие 1. Из (21) вытекают следующие соотношения:

$$A_{BC}^{+}=\sigma\sum_{k=0}^{\infty}(E-\sigma CA^{\mathrm T}B_{EE}^{+}A)^{k}CA^{\mathrm T}B_{EE}^{+}=\sigma\sum_{k=0}^{\infty}C(E-\sigma A^{\mathrm T}B_{EE}^{+}AC)^{k}A^{\mathrm T}B_{EE}^{+}=$$

$$=\sigma\sum_{k=0}^{\infty}CA^{\mathrm T}B_{EE}^{+}(E-\sigma ACA^{\mathrm T}B_{EE}^{+})^{k}=\sigma\sum_{k=0}^{\infty}CA^{\mathrm T}(E-\sigma B_{EE}^{+}ACA^{\mathrm T})^{k}B_{EE}^{+}=$$

$$=\sigma\sum_{k=0}^{\infty}CA^{\mathrm T}B_{EE}^{+1/2}(E-\sigma B_{EE}^{+1/2}ACA^{\mathrm T}B_{EE}^{+1/2})^{k}B_{EE}^{+1/2}.$$

В [4] получены формулы разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные произведения

$$A_{BC}^{+}=\sigma C\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E-\sigma A^{\mathrm T}B_{EE}^{+}AC)^{2^k}\}A^{\mathrm T}B_{EE}^{+}=$$

$$=\sigma C^{1/2}\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E-\sigma C^{1/2}A^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}AC^{1/2})^{2^k}\}C^{1/2}A^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}=$$

$$=\sigma CA^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E-\sigma ACA^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+})^{2^k}\}=\sigma CA^{\mathrm{T}}\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E-\sigma B_{EE}^{+}ACA^{\mathrm{T}})^{2^k}\}B_{EE}^{+}=$$

$$=\sigma CA^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+1/2}\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E-\sigma B_{EE}^{+1/2}ACA^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+1/2})^{2^k}\}B_{EE}^{+1/2}=$$

$$=\sigma\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E-\sigma CA^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}A)^{2^k}\}CA^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}$$

и оценка

$$\| A_{BC}^{+}-A_{\sigma,n}^{+}\|_{C_{EE}^{+}B^{1/2}}\leq\max_{\lambda_i\neq 0}\{\lambda_i^{-1/2}|1-\sigma\lambda_i|^{2^n}\},$$

где $A_{\sigma,n}^{+}=\sigma\prod_{k=0}^{n-1}\{E+(E-\sigma CA^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}A)^{2^k}\}CA^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}$, $n=1,2,\ldots$

6. РАЗЛОЖЕНИЯ В МАТРИЧНЫЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ СТЕПЕНЕЙ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ

Для взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (2), (3), в работе [20] получены разложения в матричные степенные ряды и произведения с отрицательными показателями степеней на основе представления взвешенных псевдообратных матриц в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц, определенного в теореме 1, а также свойства псевдообращения по Муру–Пенроузу для произведения двух матриц.

Теорема 27. Для произвольной матрицы $A\neq 0\in\mathbb{R}^{m\times n}$, симметричных положительно-полуопределенных матриц $B\in\mathbb{R}^{m\times m}$ и $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющих условиям (3), и для действительного числа δ, $0<\delta<\infty$, имеют место соотношения

$$A_{BC}^{+}=\sum_{k=1}^{\infty}\delta^{k-1}C^{1/2}(C^{1/2}A^{\mathrm{T}}BAC^{1/2}+\delta E)^{-k}C^{1/2}A^{\mathrm{T}}B=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\delta^{k-1}(CA^{\mathrm{T}}BA+\delta E)^{-k}CA^{\mathrm{T}}B=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\delta^{k-1}C(A^{\mathrm{T}}BAC+\delta E)^{-k}A^{\mathrm{T}}B=\sum_{k=1}^{\infty}\delta^{k-1}CA^{\mathrm{T}}B^{1/2}(B^{1/2}ACA^{\mathrm{T}}B^{1/2}+\delta E)^{-k}B^{1/2}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\delta^{k-1}CA^{\mathrm{T}}B(ACA^{\mathrm{T}}B+\delta E)^{-k}=\sum_{k=1}^{\infty}\delta^{k-1}CA^{\mathrm{T}}(BACA^{\mathrm{T}}+\delta E)^{-k}B,$$

причем

$$\| A_{BC}^{+}-A_{\delta,p}^{+}\|_{C_{EE}^{+}V}\leq\delta^{p}[\lambda_{\min}^{*}(C^{1/2}A^{\mathrm{T}}BAC^{1/2})+\delta]^{-p}\,\| A_{BC}^{+}\|_{C_{EE}^{+}V},\qquad(22)$$

где $A_{\delta,p}^{+}=\sum_{k=1}^{p}\delta^{k-1}C^{1/2}(C^{1/2}A^{\mathrm{T}}BAC^{1/2}+\delta E)^{-k}C^{1/2}A^{\mathrm{T}}B$, $p=1,2,\ldots$;

V — любая положительно-определенная или положительно-полуопределенная матрица, которая удовлетворяет условию $rk\,[(A_{BC}^{+}-A_{\delta,p}^{+})V]=rk(A_{BC}^{+}-A_{\delta,p}^{+})$, $\lambda_{\min}^{*}(L)$ — минимальное ненулевое собственное значение матрицы L.

Следствие 1. Из (22) имеем оценку

$$\| A^{+}_{BC} - A^{+}_{\delta,p} \|_{C^{+}_{EE}V} \le \delta^{p} [\lambda^{*}_{\min}(CA^{\mathrm{T}}BA) + \delta]^{-p} \| A^{+}_{BC} \|_{C^{+}_{EE}V}, \tag{23}$$

где $A^{+}_{\delta,p} = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (CA^{\mathrm{T}}BA + \delta E)^{-k} CA^{\mathrm{T}}B$, $A^{+}_{\delta,p} = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} CA^{\mathrm{T}}B(ACA^{\mathrm{T}}B + \delta E)^{-k}$, $p = 1, 2, \ldots$

Из оценки (23) имеем для любого $p = 1, 2, \ldots$ следующие предельные представления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами:

$$\begin{gathered} A^{+}_{\delta,p} = \lim_{\delta \to +0} \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (CA^{\mathrm{T}}BA + \delta E)^{-k} CA^{\mathrm{T}}B, \\ A^{+}_{\delta,p} = \lim_{\delta \to +0} \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} CA^{\mathrm{T}}B(ACA^{\mathrm{T}}B + \delta E)^{-k}. \end{gathered} \tag{24}$$

На основании следствия 1 из теоремы 27 и леммы 4 имеем следующее разложение взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричное степенное произведение

$$A^{+}_{BC} = \prod_{k=0}^{\infty} \{E + \delta^{2^k} (CA^{\mathrm{T}}BA + \delta E)^{-(2^k)}\} (CA^{\mathrm{T}}BA + \delta E)^{-1} CA^{\mathrm{T}}B.$$

В силу леммы 4 и оценки (23) получим

$$\| A^{+}_{BC} - A^{+}_{\delta,n} \|_{C^{+}_{EE}V} \le \delta^{2^n} [\lambda^{*}_{\min}(CA^{\mathrm{T}}BA) + \delta]^{-(2^n)} \| A^{+}_{BC} \|_{C^{+}_{EE}V}, \tag{25}$$

где $A^{+}_{\delta,n} = \prod_{k=0}^{n-1} \{E + \delta^{2^k} (CA^{\mathrm{T}}BA + \delta E)^{-(2^k)}\} (CA^{\mathrm{T}}BA + \delta E)^{-1} CA^{\mathrm{T}}B$, $n = 1, 2, \ldots$

Из оценки (25) для любого $n = 1, 2, \ldots$ имеем следующее предельное представление взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами:

$$A^{+}_{BC} = \lim_{\delta \to +0} \prod_{k=0}^{n-1} \{E + \delta^{2^k} (CA^{\mathrm{T}}BA + \delta E)^{-(2^k)}\} (CA^{\mathrm{T}}BA + \delta E)^{-1} CA^{\mathrm{T}}B. \tag{26}$$

Определение 3. Предельные представления (24), (26) в работе [20] названы многочленными предельными представлениями взвешенных псевдообратных матриц.

При $p = 1$ из (24) имеем одночленные предельные представления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, исследованные в работе [15]. Разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения при $\delta \equiv 1$ исследованы соответственно в работах [16] и [40], при $p = 1$, $B = C = E$ имеем предельное представление псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза, предложенное и исследованное в работе [41]. Разложения взвешенных псевдообратных матриц с положительно-определенными весами в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения при $\delta \equiv 1$ исследованы соответственно в работах [42, 43].

В работах [44, 45] исследованы другие виды разложений взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (2), (3), соответственно в матричные степенные ряды и в матричные степенные произведения. Они могут служить альтернативой рассмотренным выше разложениям.

Теорема 28. Для произвольной матрицы $A \ne 0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, симметричных положительно-полуопределенных матриц $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, удовлетворяющих условиям (3), и для действительного числа $0 < \alpha < \infty$ имеют место следующие разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные ряды:

$$A_{BC}^{+}=\alpha\sum_{k=1}^{\infty}C^{1/2}(E+\alpha C^{1/2}A^{\mathrm T}BAC^{1/2})^{-k}C^{1/2}\;A^{\mathrm T}B=\alpha\sum_{k=1}^{\infty}(E+\alpha CA^{\mathrm T}BA)^{-k}CA^{\mathrm T}B,$$

причем

$$\| A_{BC}^{+}-A_{\alpha,p}^{+}\|_{C_{EE}^{+}E_m}\le[1+\alpha\lambda_{\min}^{*}(CA^{\mathrm T}BA)]^{-p}\| A_{BC}^{+}\|_{C_{EE}^{+}E_m},$$

где $A_{\alpha,p}^{+}=\alpha\sum\limits_{k=1}^{p}(E+\alpha CA^{\mathrm T}BA)^{-k}CA^{\mathrm T}B$, $\lambda_{\min}^{*}(L)$ — минимальное ненулевое собственное значение матрицы L.

Следствие 1. Для любого $p=1,2,\dots$ имеем следующее предельное представление взвешенной псевдообратной матрицы, определенной условиями (2), (3):

$$A_{BC}^{+}=\lim_{\alpha\to\infty}\alpha\sum_{k=1}^{p}(E+\alpha CA^{\mathrm T}BA)^{-k}CA^{\mathrm T}B.$$

Теорема 29. Для произвольной матрицы $A\ne 0\in\mathbb{R}^{m\times n}$, симметричных положительно-полуопределенных матриц $B\in\mathbb{R}^{m\times m}$ и $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющих условиям (3), и для действительного числа $0<\alpha<\infty$ имеют место следующие разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные произведения:

$$A_{BC}^{+}=\alpha C^{1/2}(E+\alpha C^{1/2}A^{\mathrm T}BAC^{1/2})^{-1}\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E+\alpha C^{1/2}A^{\mathrm T}BAC^{1/2})^{-(2^k)}\}C^{1/2}A^{\mathrm T}B=$$
$$=\alpha(E+\alpha CA^{\mathrm T}BA)^{-1}\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E+\alpha CA^{\mathrm T}BA)^{-(2^k)}\}CA^{\mathrm T}B,$$

причем

$$\| A_{BC}^{+}-A_{\alpha,n}^{+}\|_{C_{EE}^{+}E_m}\le[1+\alpha\lambda_{\min}^{*}(C^{1/2}A^{\mathrm T}BAC^{1/2})]^{-(2^n)}\| A_{BC}^{+}\|_{C_{EE}^{+}E_m},$$

где

$$A_{\alpha,n}^{+}=\alpha C^{1/2}(E+\alpha C^{1/2}A^{\mathrm T}BAC^{1/2})^{-1}\prod_{k=0}^{n-1}\{E+(E+\alpha C^{1/2}A^{\mathrm T}BAC^{1/2})^{-(2^k)}\}C^{1/2}A^{\mathrm T}B,$$
$$n=1,2,\dots$$

Следствие 1. Для любого $n=1,2,\dots$ имеем следующее предельное представление взвешенной псевдообратной матрицы, определенной условиями (2), (3):

$$A_{BC}^{+}=\lim_{\alpha\to\infty}\alpha(E+\alpha CA^{\mathrm T}BA)^{-1}\prod_{k=0}^{n-1}\{E+(E+\alpha CA^{\mathrm T}BA)^{-(2^k)}\}CA^{\mathrm T}B.$$

В дальнейшем будем предполагать, что для весовых матриц B и C выполняются условия (13).

Для взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (8), (13), в работе [23] получены разложения в матричные степенные ряды и произведения с отрицательными показателями степеней на основе взвешенного сингулярного разложения матриц и разложения взвешенных псевдообратных матриц, определенных соответственно в теоремах 20, 21 настоящей статьи.

Теорема 30. Для произвольной матрицы $A\ne 0\in\mathbb{R}^{m\times n}$, симметричных положительно-полуопределенных матриц $B\in\mathbb{R}^{m\times m}$ и $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющих условиям (27), и для действительного числа $0<\delta<\infty$ имеют место следующие разложения взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (8), (13), в матричные степенные ряды:

$$A_{BC}^{+} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+1/2} (B_{EE}^{+1/2} ACA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+1/2} + \delta E)^{-k} B_{EE}^{+1/2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} (CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A + \delta E)^{-k} CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} (ACA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} + \delta E)^{-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} C (A^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} AC + \delta E)^{-k} A^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} C^{1/2} (C^{1/2} A^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} AC^{1/2} + \delta E)^{-k} C^{1/2} A^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} CA^{\mathrm{T}} (B_{EE}^{+} ACA^{\mathrm{T}} + \delta E)^{-k} B_{EE}^{+},$$

причем

$$\| A_{BC}^{+} - A_{\delta,p}^{+} \|_{C_{EE}^{+} B^{1/2}} \le \sigma_*^{-1} \delta^{p} (\delta + \sigma_*^{2})^{-p},$$

где $A_{\delta,p}^{+} = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+1/2} (B_{EE}^{+1/2} ACA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+1/2} + \delta E)^{-k} B_{EE}^{+1/2}$, $p = 1, 2, \ldots$;

σ_* — минимальный ненулевой диагональный элемент матрицы Σ, определенной в теореме 20.

На основании теоремы 30 и леммы 4 имеем следующее разложение взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами в матричное степенное произведение:

$$A_{BC}^{+} = \prod_{k=0}^{\infty} \{E + \delta^{2^k} (CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A + \delta E)^{-(2^k)}\} (CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A + \delta E)^{-1} CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+}.$$

Обозначим $A_{\delta,n}^{+} = \prod_{k=0}^{n-1} \{E + \delta^{2^k} (CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A + \delta E)^{-(2^k)}\} (CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A + \delta E)^{-1} CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+}$,

$n = 1, 2, \ldots$ Тогда

$$\| A_{BC}^{+} - A_{\delta,n}^{+} \|_{C_{EE}^{+} B^{1/2}} \le \sigma_*^{-1} \delta^{2^n} (\delta + \sigma_*^{2})^{-(2^n)}.$$

Для взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, определенных условиями (4), (13), в работе [7] получены разложения в матричные степенные ряды и произведения с отрицательными показателями степеней на основе взвешенного сингулярного разложения матриц и разложения взвешенных псевдообратных матриц, определенных соответственно в теоремах 16, 17 настоящей статьи.

Теорема 31. Для произвольной матрицы $A \ne 0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, симметричных положительно-полуопределенных матриц $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, удовлетворяющих условиям (13), и для действительного числа $0 < \delta < \infty$ имеют место следующие разложения взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (4), (13), в матричные степенные ряды:

$$A_{BC}^{+} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B^{1/2} (B^{1/2} AC_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B^{1/2} + \delta E)^{-k} B^{1/2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} (C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} BA + \delta E)^{-k} C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B (AC_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B + \delta E)^{-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} C_{EE}^{+} (A^{\mathrm{T}} BAC_{EE}^{+} + \delta E)^{-k} A^{\mathrm{T}} B =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} C_{EE}^{+1/2} (C_{EE}^{+1/2} A^{\mathrm{T}} BAC_{EE}^{+1/2} + \delta E)^{-k} C_{EE}^{+1/2} A^{\mathrm{T}} B =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} (BAC_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} + \delta E)^{-k} B,$$

причем

$$\| A^+_{BC} - A^+_{\delta,p} \|_{CB^{+1/2}_{EE}} \le \sigma_*^{-1} \delta^p (\delta + \sigma_*^2)^{-p}, \qquad (27)$$

где $A^+_{\delta,p} = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} C^+_{EE} A^{\mathrm{T}} B^{1/2} (B^{1/2} A C^+_{EE} A^{\mathrm{T}} B^{1/2} + \delta E)^{-k} B^{1/2}$; $p = 1, 2, \ldots$,

σ_* — минимальный ненулевой диагональный элемент матрицы Σ, определенной в теореме 16.

На основании теоремы 31 и леммы 4 имеем разложение взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами в матричное степенное произведение

$$A^+_{BC} = \prod_{k=0}^{\infty} \{E + \delta^{2^k} (C^+_{EE} A^{\mathrm{T}} BA + \delta E)^{-(2^k)}\} (C^+_{EE} A^{\mathrm{T}} BA + \delta E)^{-1} C^+_{EE} A^{\mathrm{T}} B.$$

Обозначим

$$A^+_{\delta,n} = \prod_{k=0}^{n-1} \{E + \delta^{2^k} (C^+_{EE} A^{\mathrm{T}} BA + \delta E)^{-(2^k)}\} (C^+_{EE} A^{\mathrm{T}} BA + \delta E)^{-1} C^+_{EE} A^{\mathrm{T}} B, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда

$$\| A^+_{BC} - A^+_{\delta,n} \|_{CB^{+1/2}_{EE}} \le \sigma_*^{-1} \delta^{2^n} (\delta + \sigma_*^2)^{-(2^n)}. \qquad (28)$$

Из оценки (27) следует, что для любого $p = 1, 2, \ldots$ имеем предельное представление взвешенной псевдообратной матрицы

$$A^+_{BC} = \lim_{\delta \to +0} \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (C^+_{EE} A^{\mathrm{T}} BA + \delta E)^{-k} C^+_{EE} A^{\mathrm{T}} B,$$

а из оценки (28) для любого $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$A^+_{BC} = \lim_{\delta \to +0} \prod_{k=0}^{n-1} \{E + \delta^{2^k} (C^+_{EE} A^{\mathrm{T}} BA + \delta E)^{-(2^k)}\} (C^+_{EE} A^{\mathrm{T}} BA + \delta E)^{-1} C^+_{EE} A^{\mathrm{T}} B.$$

7. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ ЧЕРЕЗ ДРУГИЕ ПСЕВДООБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ

Изложим формулы для представления взвешенной псевдообратной матрицы с положительно-полуопределенными весами, определенной условиями (2), (3), через псевдообратную матрицу Мура–Пенроуза и частные виды взвешенных псевдообратных матриц [46].

Теорема 32. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — симметричные положительно-полуопределенные матрицы, которые удовлетворяют условиям (3). Тогда взвешенная псевдообратная матрица A^+_{BC}, определенная условиями (2), (3), представляется в виде

$$A^+_{BC} = C^{1/2} (B^{1/2} A C^{1/2})^+_{EE} B^{1/2} = C^{1/2} (C^{1/2} A^{\mathrm{T}} BAC^{1/2})^+_{EE} C^{1/2} A^{\mathrm{T}} B =$$

$$= CA^{\mathrm{T}} B^{1/2} (B^{1/2} ACA^{\mathrm{T}} B^{1/2})^+_{EE} B^{1/2} = CA^{\mathrm{T}} B (ACA^{\mathrm{T}} B)^+_{BB^+_{EE}} =$$

$$= CA^{\mathrm{T}} (BACA^{\mathrm{T}})^+_{B^+_{EE} B} = (CA^{\mathrm{T}} BA)^+_{C^+_{EE} C} CA^{\mathrm{T}} B =$$

$$= C (A^{\mathrm{T}} BAC)^+_{CC^+_{EE}} A^{\mathrm{T}} B = (A^{\mathrm{T}} BA)^+_{CC} A^{\mathrm{T}} B = CA^{\mathrm{T}} (ACA^{\mathrm{T}})^+_{BB}.$$

Для доказательства теоремы 32 используются предельные представления псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза [13] и взвешенной псевдообратной матрицы [15], представление взвешенной псевдообратной матрицы в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц, полученное в теореме 2 настоящей статьи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье приведен обзор основных работ, в которых исследованы фундаментальные свойства взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, а именно получены необходимые и достаточные условия существования и единственности этих матриц, установлена связь взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами со взвешенными нормальными псевдорешениями, дано представление взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметричных и симметризуемых матриц, получены и исследованы разложения этих матриц в матричные степенные ряды и произведения, предельные представления этих матриц, представления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами через другие псевдообратные матрицы, получены взвешенные сингулярные разложения матриц с вырожденными весами, на основе которых определены разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами. Исследованные свойства взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами использованы в цитируемых выше публикациях и в других работах при построении и исследовании прямых и итерационных методов для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами, решения задач наименьших квадратов с ограничениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ward J.F., Boullion T.L., Lewis T.O. Weighted pseudoinverses with singular weights // SIAM J. Appl. Math. — 1971. — **21**, N 3. — P. 480–482.
2. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Взвешенные псевдообратные матрицы и взвешенные нормальные псевдорешения с вырожденными весами // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2009. — **49**, № 8. — С. 1347–1363.
3. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Существование и единственность взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами // Український математичний журнал. — 2011. — **63**, № 1. — С. 80–101.
4. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Теоремы существования и единственности в теории взвешенной псевдоинверсии с вырожденными весами // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 1. — С. 14–33.
5. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Взвешенное сингулярное разложение и взвешенное псевдообращение матриц с вырожденными весами // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — **52**, № 12. — С. 2115–2132.
6. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Необходимые и достаточные условия существования одного из вариантов взвешенного сингулярного разложения матриц с вырожденными весами // Доклады РАН. — 2014. — **455**, № 3. — С. 261–264.
7. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Необходимые и достаточные условия существования взвешенного сингулярного разложения матриц с вырожденными весами // Український математичний журнал. — 2015. — **67**, № 3. — С. 406–426.
8. Mitra S.K., Rao C.R. Projections under seminorms and generalized Moore–Penroze inverses // Linear Algebra and Appl. — 1974. — **9.** — P. 155–167.
9. Censor Y., Elfving T. Block-iterative algorithms with diagonally skaled oblique projections for the linear feasibility problem // SIAM J. Matrix. Anal. — 2002. — **24**, N 1. — P. 40–58.
10. Censor Y., Elfving T. Iterative algorithms with seminorm-induced oblique projections // Abstr. Appl. Anal. — 2003. — N 7. — P. 387–406.
11. Moore E.H. On the reciprocal of the general algebraic matrix // Abstract. Bull. Amer. Math. Soc. — 1920. — **26.** — P. 394–395.
12. Penrose R. A generalized inverse for matrices // Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1955. — **51**, N 3. — P. 406–413.
13. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. — М.: Наука, 1977. — 223 с.
14. Галба Е.Ф., Молчанов И.Н., Скопецкий В.В. Итерационные методы для вычисления взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 5. — С. 150–169.
15. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Предельные представления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами и регуляризация задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2004. — **44**, № 11. — С. 1928–1946.

16. Галба Е.Ф. Итерационные методы для вычисления взвешенного нормального псевдорешения с вырожденными весами // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1999. — **39**, № 6. — С. 882–896.
17. Lancaster P., Rozsa P. Eigenvectors of H-self-adjoint matrices // Z. Angew. Math. und Mech. — 1984. — **64**, N 9. — S. 439–441.
18. Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. Indefinite linear algebra and applications. — Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser Verlag, 2005. — 357 p.
19. Икрамов Х.Д. Об алгебраических свойствах классов псевдоперестановочных и H-самосопряженных матриц // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1992. — **32**, № 8. — С. 155–169.
20. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Разложения и многочленные предельные представления взвешенных псевдообратных матриц // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2007. — **47**, № 5. — С. 747–766.
21. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. — М.: Наука, 1975. — 320 с.
22. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — 656 с.
23. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф. Взвешенное сингулярное разложение матриц с вырожденными весами на основе взвешенных ортогональных преобразований // Кибернетика и системный анализ. — 2015. — **51**, № 4. — С. 28–43.
24. Галба Е.Ф. Взвешенное псевдообращение матриц с вырожденными весами // Український математичний журнал. — 1994. — **46**, № 10. — С. 1323–1327.
25. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Предельные представления взвешенных псевдообратных матриц с положительно-определенными весами и регуляризация задач // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 6. — С. 46–65.
26. Decell H.P. An application of the Cayley–Hamilton theorem to generalized matrix inversion // SIAM Rev. — 1965. — **7**, N 4. — P. 526–528.
27. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Представления и разложения взвешенных псевдообратных матриц, итерационные методы и регуляризация задач. I. Положительно-определенные веса // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 1. — С. 47–73.
28. Ben-Israel A., Greville T.N.E. Generalized inverses: Theory and applications. — New York: Springer-Verlag, Inc., 2003. — 420 p.
29. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1974. — 288 с.
30. Elden L. A weighted pseudoinverse generalized singular values and constrained least squares problems // BIT. — 1982. — **22**, N 4. — P. 487–502.
31. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Представления и разложения взвешенных псевдообратных матриц, итерационные методы и регуляризация задач. II. Вырожденные веса // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 3. — С. 75–102.
32. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. — М.: Наука, 1987. — 240 с.
33. Архаров Е.В., Шафиев Р.А. Методы регуляризации задачи связанного псевдообращения с приближенными данными // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2003. — **43**, № 3. — С. 347–353.
34. Химич А.Н. Оценки возмущений для решения задачи наименьших квадратов // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 3. — С. 142–145.
35. Химич А.Н., Николаевская Е.А. Анализ достоверности компьютерных решений систем линейных алгебраических уравнений с приближенно заданными исходными данными // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 6. — С. 83–95.
36. Николаевская Е.А., Химич А.Н. Оценка погрешности взвешенного нормального псевдорешения с положительно-определенными весами // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2009. — **49**, № 3. — С. 422–430.
37. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. — М.: Мир, 1969. — 168 с.
38. Van Loan C.F. Generalizing the singular value decomposition // SIAM J. Numer. Anal. — 1976. — **13**, N 1. — P. 76–83.
39. Галба Е.Ф. Взвешенное сингулярное разложение и взвешенное псевдообращение матриц // Український математичний журнал. — 1996. — **48**, № 10. — С. 1426–1430.
40. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Итерационные методы высоких скоростей сходимости для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2005. — **45**, №10. — С. 1731–1755.
41. Broeder G.G., Charnes A. Contributions to the theory generalized inverses for matrices // ONR Res. Memo N 39, Northwestern Univ., 1962.

42. Г а л б а Е . Ф . Итерационные методы для вычисления взвешенной псевдообратной матрицы // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1996. — **36**, № 6. — С. 28–39.

43. С е р г и е н к о И . В . , Г а л б а Е . Ф . , Д е й н е к а В . С . Разложение взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные произведения // Український математичний журнал. — 2004. — **56**, № 11. — С. 1539–1556.

44. С е р г и е н к о И . В . , Г а л б а Е . Ф . , Д е й н е к а В . С . Разложение в ряды взвешенных псевдообратных матриц и итерационные методы для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 1. — С. 32–62.

45. С е р г и е н к о И . В . , Г а л б а Е . Ф . , Д е й н е к а В . С . Разложение взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные произведения и итерационные методы // Український математичний журнал. — 2007. — **59**, № 9. — С. 1269–1290.

46. Г а л б а Е . Ф . Представление взвешенной псевдообратной матрицы через другие псевдообратные матрицы // Доповіді НАН України. — 1997. — № 4. — С. 12–17.

Надійшла до редакції 22.02.2016

І.В. Сергієнко, Є.Ф. Галба

ЗВАЖЕНА ПСЕВДОІНВЕРСІЯ З ВИРОДЖЕНИМИ ВАГАМИ

Анотація. Стаття носить оглядовий характер і присвячена розвитку теорії зваженої псевдоінверсії. Визначаються та досліджуються зважені псевдообернені матриці з виродженими вагами. Наведено теореми існування та єдиності цих матриць. Встановлено зв’язок зважених псевдообернених матриць з виродженими вагами зі зваженими нормальними псевдорозв’язками. Наведено представлення зважених псевдообернених матриць з виродженими вагами в термінах коефіцієнтів характеристичних многочленів симетричних матриць та матриць, що симетризуються, одержано розклад цих матриць в матричні степеневі ряди та добутки, граничні представлення цих матриць, одержано зважені сингулярні розклади матриць з виродженими вагами, на основі яких визначено розклади зважених псевдообернених матриць.

Ключові слова: зважені псевдообернені матриці з виродженими вагами, матричні степеневі ряди і добутки, граничні зображення зважених псевдообернених матриць, зважений сингулярний розклад матриць з виродженими вагами.

I.V. Sergienko, E.F. Galba

WEIGHTED PSEUDOINVERSION WITH SINGULAR WEIGHTS

Abstract. The paper reviews the development of the theory of weighted pseudoinversion. Weighted pseudoinverse matrices with singular weights are determined and investigated. Theorems of the existence and uniqueness of these matrices are provided. Weighted pseudoinverse matrices with singular weights are related with weighted normal pseudosolutions. Weighted pseudoinverse matrices with singular weights are represented in therms of coefficients of characteristic polynomials of symmetric and symmetrizable matrices. Their expansions in matrix power series and products and limit representations are obtained. Decompositions of weighed pseudoinverse matrices are determined on the basis of the obtained weighed singular decomposition of matrices with singular weights.

Keywords: weighted pseudoinverse matrices with singular weights, matrix power series and products, limit representations of weighted pseudoinverse matrices, weighed singular decomposition of matrices with singular weights.

Сергиенко Иван Васильевич,
академик НАН Украины, директор Института киберентики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: aik@public.icyb.kiev.ua.

Галба Евгений Федорович,
доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института киберентики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: e.f.galba@ukr.net.