УДК 519.8

О.А. БЕРЕЗОВСКИЙ

КРИТЕРИИ ТОЧНОСТИ *SDP*-РЕЛАКСАЦИЙ КВАДРАТИЧНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Аннотация. Исследованы условия получения точных решений квадратичных экстремальных задач общего вида с помощью *SDP*-релаксаций. На основе известных результатов относительно точности двойственных оценок (лагранжевых релаксаций) и их взаимосвязи с *SDP*-релаксациями сформулирован ряд условий, при которых оптимальные значения целевых функций квадратичной экстремальной задачи и ее *SDP*-релаксации равны.

Ключевые слова: квадратичная экстремальная задача, *SDP*-релаксация, двойственная оценка, функция Лагранжа, точная релаксация.

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи оптимального управления, планирования, проектирования, моделирования, анализа сетевых структур и другие допускают представление в виде квадратичных экстремальных задач, т.е. задач оптимизации, целевые функции и все функции ограничений которых квадратичные (quadratically constrained quadratic programming — *QCQP*):

$$f_{QCQP} = \inf_{x \in T \subseteq R^n} f_0(x), \tag{1}$$

где $T = \{x : f_i(x) \le 0,\ i \in I^{LQ},\ f_i(x) = 0,\ i \in I^{EQ};\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in R^n\}$ — допустимое множество решений задачи; $f_i(x) = x^{\mathrm{T}} A_i x + b_i^{\mathrm{T}} x + c_i$, $i \in \{0\} \cup \cup I^{LQ} \cup I^{EQ}$, — квадратичные функции, определенные в n-мерном пространстве; $m = |I^{LQ}| + |I^{EQ}|$ — общее количество ограничений. Далее будем считать, что $T \ne \{\varnothing\}$ и $f_{QCQP} > -\infty$. В общем случае *QCQP*-задача многоэкстремальна. В связи с этим представляет интерес проблема получения оценок глобального экстремума данной задачи путем решения выпуклых релаксированных задач и точности этих оценок, т.е. их отклонений от оптимального значения целевой функции исходной задачи. Использование в этих целях задач полуопределенного программирования, разрешимых за полиномиальное время [1], может обеспечить для некоторых классов задач точные оценки [2–5]. Приведенные в данной работе результаты представляют собой условия получения точных *SDP*-релаксаций квадратичных задач общего вида. Эти условия, возможно, обладают меньшей прикладной направленностью, чем в отмеченных работах, но их применение в ряде случаев позволяет делать существенные практические выводы [6].

SDP-РЕЛАКСАЦИЯ И ДВОЙСТВЕННАЯ ОЦЕНКА

В широком смысле под *SDP*-релаксацией *QCQP*-задачи часто понимают некоторую задачу полуопределенного программирования — задачу выпуклого программирования, минимальное значение целевой функции которой является оценкой снизу глобального минимума исходной *QCQP*-задачи. Отметим, что *SDP*-релаксаций одной и той же задачи в таком широком понимании может быть много. Это объясняется, по крайней мере, неоднозначностью постановки *QCQP*-задачи (например, достаточно распространен прием расширения постановки задачи за счет различных семейств избыточных ограничений). Здесь используем следующее определение *SDP*-релаксации, которая однозначно определяется конкретной постановкой *QCQP*-задачи (в случае релаксации исходной постановки задачи ее иногда называют базовой *SDP*-релаксацией):

$$f_{SDP} = \inf_X M_0 \bullet X \le f_{QCQP}, \tag{2}$$

$$M_i \bullet X = c_i, \; i \in I^{EQ},$$

$$M_i \bullet X \le c_i, \; i \in I^{LQ},$$

$$X_{n+1,\, n+1} = 1, \; X \succeq 0,$$

где символ $\bullet$ обозначает скалярное произведение двух матриц $A \bullet B = $ $= \operatorname{trace}(A^{\mathrm T} B)$, $A \succeq 0$ $(A \succ 0)$ — положительная полуопределенность (положительная определенность) матрицы A, X — симметрическая $(n+1) \times (n+1)$-матрица переменных, $M_i = \begin{pmatrix} A_i & b_i/2 \\ b_I^{\mathrm T}/2 & 1 \end{pmatrix}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$, $m = |I^{LQ}| + |I^{EQ}|$.

Приведем задачу, двойственную к *SDP*-задаче (далее *DSDP*-задача). Она записывается следующим образом:

$$f_{DSDP} = \sup_{u \in R^{m+1}} (u, c), \tag{3}$$

$$M_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i M_i + u_{m+1} e_{m+1}^{\mathrm T} e_{m+1} \succeq 0,$$

$$u_i \ge 0, \; i \in I^{LQ},$$

где $c = (c_1, c_2, \ldots, c_m, -1)^{\mathrm T}$, e_{m+1} — вектор, все координаты которого равны 0, за исключением $(m+1)$-й координаты, равной 1.

Согласно теории двойственности для прямой и двойственной задач справедливо соотношение $f_{SDP} \ge f_{DSDP}$. Причем для задачи выпуклого программирования при выполнении условия Слейтера имеет место сильная двойственность, т.е. $f_{SDP} = f_{DSDP}$ [7]. В случае задачи полуопределенного программирования этот результат можно усилить: для сильной двойственности достаточно, чтобы допустимые множества прямой и двойственной задач были непусты [8] (можно говорить о некоторой аналогии с линейным программированием).

Для оценки снизу глобального минимума *QCQP*-задачи также используют двойственную оценку [9, 10], которая определяется решением следующей *DQCQP*-задачи (как и в случае определения *SDP*-задачи, чтобы избежать неоднозначности, предполагаем, что *QCQP*-задача (1) окончательно сформирована):

$$f_{DQCQP} = \sup_{u \in R^m} (\psi(u) = \inf_{x \in R^n} L(x, u)) \le f_{QCQP}, \tag{4}$$

$$A(u) \succeq 0,$$

$$u_i \ge 0, \; i \in I^{LQ},$$

где $L(x, u) = x^{\mathrm T} A(u) x + b^{\mathrm T}(u) x + c(u)$ — функция Лагранжа для *QCQP*-задачи (1), $A(u) = A_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i A_i$, $b(u) = b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i$, $c(u) = c_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i c_i$. Другими словами, двойственная оценка определяется *DQCQP*-задачей, которая является не чем иным, как лагранжевой релаксацией исходной *QCQP*-задачи по всем ограничениям с выписанным в явном виде условием, описывающим эффективное множество двойственных переменных (множество, где функция $\psi(u)$ не равна $-\infty$). Задачу (4) иногда называют двойственной оценкой Шора [11] или релаксацией Шора [12]. В ряде случаев при определении двойственной оценки в (4) полезно заменить условие неотрицательной определенности матрицы $A(u)$ условием ее положительной определенности (например, когда нужно подчеркнуть необходимость существования внутренней точки допустимого множества).

Далее используем следующее свойство двойственных оценок.

Свойство 1 [11]. Двойственные оценки произвольной квадратичной задачи (1) и соответствующей ей эквивалентной однородной квадратичной задачи

$$f_{QCQP} = \inf_{(x,y)\in\widetilde{T}\subseteq R^{n+1}} \widetilde{f}_0(x, y), \tag{5}$$

где $\widetilde{T} = \{(x, y) : \widetilde{f}_i(x, y) \le 0,\ i \in I^{LQ},\ \widetilde{f}_i(x, y) = 0,\ i \in I^{EQ},\ y^2 = 1; x \in R^n,\ y \in R^1\}$, $\widetilde{f}_i(x, y) = x^{\mathrm{T}} A_i x + b_i^{\mathrm{T}} xy + c_i$, $i \in \{0\} \cup I^{LQ} \cup I^{EQ}$, совпадают. ■

Задача (5) построена из задачи (1) с помощью дополнительной бинарной переменной $y \in R^1$ домножением на нее линейных членов всех квадратичных форм задачи. При этом оптимальное значение f_{QCQP} не меняется, а множество решений увеличивается вдвое: если x^* является решением первой задачи, то решением второй будут $(x^*, 1)$ и $(-x^*, -1)$.

Нетрудно видеть, что *DSDP*-задача (3) представляет собой двойственную задачу к однородной квадратичной задаче (5), полученной из *QCQP*-задачи (1) домножением на дополнительную переменную x_{n+1} всех ее линейных членов (для однородной задачи решение внутренней задачи в *DQCQP*-задаче (4) достигается в нулевой точке, соответственно функцию $\psi(u)$ можно выписать в явном виде $\psi(u) = (c, u)$). При этом исходная задача и полученная таким путем однородная задача согласно свойству 1 имеют как одинаковые оптимальные значения целевой функции, так и одинаковые значения двойственных оценок (отличие будет лишь во множестве решений). Таким образом, $f_{DQCQP} = f_{DSDP} \le f_{SDP} \le f_{QCQP}$ (при непустых допустимых множествах решений в *SDP*- и *DSDP*-задачах $f_{DQCQP} = f_{DSDP} = f_{SDP} \le f_{QCQP}$). Как следствие, результаты об условиях нахождения точных двойственных оценок для квадратичных экстремальных задач можно перенести на их *SDP*-релаксации. Используя этот факт, сформулируем несколько критериев для определения случаев, когда *SDP*-релаксация дает точное значение глобального экстремума исходной *QCQP*-задачи, а также приведем некоторые примеры их применения. Отметим, что далее ссылки при теоремах указывают на соответствующие результаты, полученные для двойственных оценок *QCQP*-задачи, в определении которых использовалось условие $A(u) \succ 0$ для удовлетворения требованию существования внутренней точки допустимого множества *DQCQP*-задачи.

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ПОЛУЧЕНИЯ ТОЧНОЙ *SDP*-РЕЛАКСАЦИИ

Теорема 1 [13, теорема 4]. Пусть $f_{QCQP} > -\infty$ и $\{u: A(u) \succ 0,\ u \in R^m;\ u_i \ge 0,\ i \in I^{LQ}\} \ne \{\varnothing\}$. Для того чтобы $f_{SDP} = f_{QCQP}$, необходимо и достаточно существования такого вектора множителей Лагранжа u^*, при котором функция $L(u^*, x) - f_{QCQP}$ представима в виде суммы квадратов линейных форм: $\exists\, u^*$ такое, что $L(u^*, x) - f_{QCQP} = \sum_{j=1}^{k} l_j^2(x)$, $k \le n$. ■

Отметим, что из условия $f_{QCQP} > -\infty$ кроме ограниченности снизу целевой функции на допустимом множестве в *QCQP*-задаче (1) также следует существование допустимой точки *SDP*-задачи. Значимость условия $\{u: A(u) \succ 0, u \in R^m; u_i \geq 0, i \in I^{LQ}\} \neq \{\varnothing\}$ (соответствует требованию существования внутренней точки допустимой области *DSDP*-задачи) иллюстрирует простой пример: для задачи линейного программирования *SDP*-релаксация и двойственная оценка точные, но разложения на сумму квадратов не существует.

В случае практического применения сформулированного критерия (теорема 1) можно значительно упростить доказательство теоремы о нахождении глобального минимума полинома [10, 11]. Для определения глобального минимума P_0^* ограниченного снизу полинома $P_0(x)$ ($x \in R^n$, s — вектор старших степеней полинома $P_0(x)$) Н.З Шором было предложено следующее сведение исходной полиномиальной задачи к квадратичной задаче:

1) для всех $\alpha^{(i)} \leq \overline{\alpha} = s/2$ вводятся переменные $R(\alpha^{(i)}) = R(\alpha^{(j)})R(\alpha^{(k)})$, $\alpha^{(i)} = \alpha^{(j)} + \alpha^{(k)}$, $\alpha^{(r)} \leq \overline{\alpha}$ (неотрицательный целочисленный вектор $\alpha^{(r)} = (\alpha_1^{(r)}, \alpha_2^{(r)}, \ldots, \alpha_n^{(r)})^{\mathrm{T}} \leq \overline{\alpha}$ определяет переменную $R(\alpha^{(r)})$, которой в исходном пространстве R^n соответствует моном $R(\alpha^{(r)}) = x_1^{\alpha_1^{(r)}} x_2^{\alpha_2^{(r)}} \ldots x_n^{\alpha_n^{(r)}}$), в результате чего получаем полный набор переменных, покрывающих все мономы степени $\alpha^{(i)} \leq \overline{\alpha}$, а полином $P_0(x)$ представим в виде квадратичной функции $f_0(R)$;

2) к квадратичным ограничениям, определяющим новые переменные, добавляется полное семейство ограничений вида $R(\alpha^{(i)})R(\alpha^{(j)}) - R(\alpha^{(k)})R(\alpha^{(l)}) = 0$ для всех $\alpha^{(i)} + \alpha^{(j)} = \alpha^{(k)} + \alpha^{(l)}$; таким образом, с помощью их линейной комбинации можно получить все возможные представления в новых переменных (степени меньше или равной двум) любого монома $x_1^{\alpha_1^{(r)}} x_2^{\alpha_2^{(r)}} \ldots x_n^{\alpha_n^{(r)}}$ степени $\alpha^{(r)} \leq s$, а значит, и полинома $P_0(x)$.

В результате задача $P_0^* = \min_{x \in R^n} P_0(x)$ сведена к квадратичной оптимизационной задаче

$$P_0^* = \min_R f_0(R) \tag{6}$$

при ограничениях

$$R(\alpha^{(i)})R(\alpha^{(j)}) - R(\alpha^{(k)})R(\alpha^{(l)}) = 0, \ \alpha^{(i)} + \alpha^{(j)} = \alpha^{(k)} + \alpha^{(l)}, \tag{7}$$

$$0 \leq \alpha^{(r)} = (\alpha_1^{(r)}, \alpha_2^{(r)}, \ldots, \alpha_n^{(r)})^{\mathrm{T}} \leq s/2.$$

Отметим, что ограничения (7) включают ограничения как из п. 2, так и из п. 1, поскольку $R(0) = 1$.

Теорема 2 [9, с. 141]. Для того чтобы *SDP*-релаксация квадратичной задачи (6), (7), соответствующей нахождению глобального минимума ограниченного снизу полинома $P_0(x)$, была точной ($f_{SDP} = P_0^*$), необходимо и достаточно, чтобы полином $P_0(x) - P_0^*$ был представим в виде суммы квадратов полиномов. ■

Доказательство этой теоремы, приведенное в [9, 10], достаточно громоздкое. Применение утверждения теоремы 1 позволяет существенно его упростить [13].

Аналогично упрощается доказательство теоремы, используемой в работе [14] при обосновании алгоритма решения системы полиномиальных уравнений на множестве комплексных чисел:

$$\{z: P_i(z) = 0, \ i = 1, \ldots, k; z \in C^n\},$$

где $P_i(z)$ — полиномиальные функции произвольных степеней, $z = x + iy \in C^n$, $x, y \in R^n$.

В ряде случаев более удобно переформулировать общее условие точности для *SDP*-релаксации следующим образом.

Теорема 3. Пусть $f_{QCQP} > -\infty$ и $\{u\colon A(u) \succ 0,\ u \in R^m;\ u_i \geq 0,\ i \in I^{LQ}\} \neq \{\varnothing\}$. Для выполнения равенства $f_{SDP} = f_{QCQP}$ необходимо и достаточно, чтобы матрица $\begin{pmatrix} A_0 & b_0/2 \\ b_0^{\mathrm{T}}/2 & -f_{QCQP} \end{pmatrix}$ была представима в виде разности неотрицательно-определенной матрицы и линейной комбинации матриц $\overline{A}_i = \begin{pmatrix} A_i & b_i/2 \\ b_i^{\mathrm{T}}/2 & c_i \end{pmatrix}$, $i = \overline{1, m}$, с коэффициентами из множества $\{u\colon u_i \geq 0,\ i \in I^{LQ},\ u \in R^m\}$. ■

Из формулировки необходимого и достаточного условия точности в виде теоремы 3 следует, например, результат Н.З. Шора для задачи минимизации квадратичной функции на положительном ортанте.

Теорема 4 [10, с. 117]. Если $f^* = \min\limits_{x \in R^n} \{(x^{\mathrm{T}} A_0 x + b_0^{\mathrm{T}} x)\colon x \geq 0\} > -\infty$, то значение минимума *SDP*-релаксации эквивалентной квадратичной задачи $\min\limits_{x \in R^n} \{(x^{\mathrm{T}} A_0 x + b_0^{\mathrm{T}} x)\colon x \geq 0,\ x_i x_j \geq 0,\ i, j = \overline{1, n}\}$ совпадает с f^* тогда и только тогда, когда матрица $\begin{pmatrix} A_0 & b_0/2 \\ b_0^{\mathrm{T}}/2 & r \end{pmatrix}$ для некоторого $r > 0$ представима в виде суммы неотрицательной и неотрицательно-определенной матрицы. ■

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ПОЛУЧЕНИЯ ТОЧНОЙ *SDP*-РЕЛАКСАЦИИ

Пусть Γ^+ — множество граничных точек множества $\{u\colon A(u) \succeq 0,\ u \in R^m\}$, удовлетворяющих условию $u_i \geq 0$, $i \in I^{LQ}$. Определим для каждого $u \in \Gamma^+$ множество $J(u) = \{j\colon \lambda_j(u) = 0,\ j \in \{1, \dots, n\}\}$, где $\lambda_j(u)$, $j \in \{1, \dots, n\}$, — собственные числа матрицы $A(u)$. Пусть $\xi_j(u)$ — собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda_j(u)$.

В принятых обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема 5 [6]. Пусть $\{u\colon A(u) \succ 0,\ u \in R^m;\ u_i \geq 0,\ i \in I^{LQ}\} \neq \{\varnothing\}$. Если существуют такой вектор p и такое положительное число $\widetilde{\varepsilon} > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon})$

$$\forall u \in \Gamma^+ \ \ \exists j \in J(u) \text{ такое, что } \xi_j^{\mathrm{T}}(u) \left(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i + \varepsilon p \right) \neq 0, \tag{8}$$

то $f_{SDP} = f_{QCQP}$. Причем если условие (8) выполняется при $p = 0$, то $X_* = \begin{pmatrix} x_* x_*^{\mathrm{T}} & x_* \\ x_*^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}$, где X_* — точка решения *SDP*-задачи (2), x_* — точка решения *QCQP*-задачи (1). ■

Следует заметить, что условие (8) теоремы 5 достаточно жесткое. Но оно позволяет получать некоторые конкретные результаты. В качестве примера рассмотрим задачу построения шара минимального объема с фиксированным центром в начале координат, описанного вокруг пересечения шаров:

$$f^* = \min_{x \in R^n} \{(-x^{\mathrm{T}} x)\colon x^{\mathrm{T}} x + b_i^{\mathrm{T}} x + c_i \leq 0,\ i = \overline{1, m}\}. \tag{9}$$

В задаче (9) для матрицы в функции Лагранжа

$$A(u)=\begin{pmatrix} -1+\sum\limits_{i=1}^m u_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1+\sum\limits_{i=1}^m u_i \end{pmatrix}$$

известны все собственные векторы: они направлены по координатным осям и не зависят от двойственных переменных. Соответствующие им собственные числа определяются как $\lambda_j=-1+\sum\limits_{i=1}^m u_i,\ j=\overline{1,n}$.

Для рассматриваемой задачи условие (8) теоремы 5 примет следующий вид:

$$\xi_j^{\mathrm{T}}(u)(b_0+\sum_{i=1}^m u_i b_i+\varepsilon p)=\left(\sum_{i=1}^m u_i b_i+\varepsilon p\right)_j\neq 0,\ \ j=\overline{1,n},$$

т.е. все координаты вектора $\sum\limits_{i=1}^m u_i b_i+\varepsilon p$ не могут одновременно обращаться в ноль при $u\in\Gamma^+=\{u: -1+\sum\limits_{i=1}^m u_i=0,\ u\geq 0\}$. Согласно теореме 5 имеем, что при $0\notin \operatorname{int}(\operatorname{co}\{b_i,\ i=1,\ldots,m\})$ *SDP*-релаксация точная ($f_{SDP}=f^*$), а при $0\notin \operatorname{co}\{b_i,\ \ i=1,\ldots,m\}$ решение *SDP*-задачи, кроме точного значения глобального минимума задачи (9), дает точку, в которой этот минимум достигается.

Пример применения критерия точности, сформулированного в виде теоремы 5, также можно найти в [6] при решении одной специальной задачи невыпуклой оптимизации, которая встречается при синтезе управления, минимизирующего область локализации инвариантного множества семейства нелинейных систем. Для решения этой задачи использовалась эквивалентная ей квадратичная постановка задачи, для нахождения нижней оценки оптимального значения целевой функции которой был применен двойственный подход. На основе теоремы 5 сформулировано достаточное условие того, что данный подход определяет оптимальное значение целевой функции и точку глобального экстремума исходной задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование релаксаций для решения квадратичных экстремальных задач приводит к необходимости оценки качества получаемых оценок. В данной работе сформулирован ряд условий, при которых оптимальные значения целевых функций квадратичной экстремальной задачи и ее *SDP*-релаксации равны. Применение этих результатов может быть полезным при решении конкретных практических задач. Приводится ряд примеров такого использования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nesterov Y., Nemirovskii A., Ye Y. Interior-point polynomial algorithms in convex programming. — Philadelphia: Society for industrial and applied mathematics, 1994. — 405 p.
2. Vanderberghe L., Boyd S. Semidefinite programming // SIAM Rev. — 1996. — N 38. — P. 49–95.

3. Nesterov Y., Wolkowicz H., Ye.Y. Semidefinite programming relaxations of nonconvex quadratic optimization // Handbook of semidefinite programming. — New York: Springer US, 2000. — P. 361–419.

4. Lasserre J.B. Global optimization with polynomials and the problem of moments // SIAM J. Optim. — 2001. — **11**, N 3. — P. 796–817.

5. Laurent M., Rendl F. Semidefinite programming and integer programming // Handbooks in Operations Research and Management Science. — 2005. — **12**. — P. 393–514.

6. Berezovskyi O.A. On solving of a special optimization problem connected with determination of invariant sets of dynamical systems // Journal of Automation and Information Sciences. — 2015. — **47**, N 5. — P. 69–77. — DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v47.i5.60.

7. Глушков В.М., Амосов Н.М., Артеменко И.А. и др. Энциклопедия кибернетики. — К.: Гл. ред. укр. сов. энциклопедии, 1974. — Т. 1. — 583 с.

8. Alizadeh F. Optimization over the positive-definite cone: interior point methods and combinatorial applications // Advances in Optimization and Parallel Computing / Ed. P.M. Pardalos. — Amsterdam: Elsevier Science, 1992. — P. 1–25.

9. Шор Н.З., Стеценко С.И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. — К.: Наук. думка, 1989. — 208 с.

10. Shor N.Z. Nondifferentiable optimization and polynomial problems. — Dordrecht: Kluwer, 1998. — 394 p.

11. Berezovskyi O.A., Stetsyuk P.I. An approach to determining Shor's dual quadratic estimates // Cybernetics and Systems Analysis. — 2008. — **44**, N 2. — P. 225–233.

12. Anstreicher K., Wolkowicz H. On Lagrangian relaxation of quadratic matrix constraints // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — **22**, N 1. — P. 41–55.

13. Berezovskyi O.A. On the accuracy of dual bounds for quadratic extremum problems // Cybernetics and Systems Analysis. — 2012. — **48**, N 1. — P. 26–30.

14. Shor N.Z., Berezovskyi O.A. Using the method of dual quadratic solutions to solve systems of polynomial equations in the complex domain // Cybernetics and Systems Analysis. — 1994. — **30**, N 5. — P. 686–692.

Надійшла до редакції 10.05.2016

О.А. Березовський

КРИТЕРІЇ ТОЧНОСТІ *SDP*-РЕЛАКСАЦІЙ КВАДРАТИЧНИХ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАДАЧ

Анотація. Досліджено умови отримання точних розв'язків квадратичних екстремальних задач загального вигляду за допомогою *SDP*-релаксацій. На основі відомих результатів стосовно точності двоїстих оцінок (лагранжевих релаксацій) і їхнього взаємозв'язку з *SDP*-релаксаціями сформульовано ряд умов, при яких оптимальні значення цільових функцій квадратичної екстремальної задачі та її *SDP*-релаксації рівні.

Ключові слова: квадратична екстремальна задача, *SDP*-релаксація, двоїста оцінка, функція Лагранжа, точна релаксація.

O.A. Berezovskyi

EXACTNESS CRITERIA FOR *SDP*-RELAXATIONS OF QUADRATIC EXTREMUM PROBLEMS

Abstract. The author analyzes the conditions of obtaining exact solutions to quadratic extremum problems of general type by using *SDP*-relaxations. Based on the known results for exactness of dual bounds (lagrangian relaxations) and their relationship with *SDP*-relaxations, several conditions are formulated, under which the values of optimal objective function of the quadratic extremal problem and its *SDP*-relaxation are equal.

Keywords: quadratic extremal problem, *SDP*-relaxation, dual bound, lagrangian, exact relaxation.

Березовский Олег Анатольевич,
кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: berezovskyi@mail.ru.