УДК 621.37

А.П. РОТШТЕЙН

РАНЖИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКОГО ОТНОШЕНИЯ ВЛИЯНИЯ И ТРАНЗИТИВНОГО ЗАМЫКАНИЯ

Аннотация. Предложен метод ранжирования элементов многофункциональной системы с применением теории нечетких отношений. Задача сведена к автоматической классификации на основе транзитивного замыкания нечеткого отношения сходства. Исходная информация о системе задана в виде нечеткого отношения влияния отказов элементов на выполнение функций. Степени влияния элементов на функции системы вычисляются путем сравнения с наименьшим влиянием по девятибалльной шкале Саати. Рассмотренный метод не имеет ограничений, связанных с допущениями о бинарном свойстве надежности: «есть отказ — нет отказа», его можно применять в многофункциональных системах с плохо определенной структурой — организационных, эргатических, военных и др.

Ключевые слова: многофункциональная система, неопределенность, важность элемента, нечеткое отношение, автоматическая классификация.

ВВЕДЕНИЕ

На ранних этапах проектирования системы возникает необходимость оценки рангов ее элементов, т.е. количественной характеристики их важности, которая учитывается при решении следующих задач:

— формирование требований к надежности элементов согласно заданным требованиям к надежности системы в целом;

— распределение средств между элементами системы на повышение ее надежности.

Классический подход к вычислению рангов использует чувствительность функции надежности системы к изменению надежности ее элементов. Альтернативой этому подходу являются экспертные оценки, формализуемые средствами нечеткой (fuzzy) математики.

В настоящей статье анализируются подходы к ранжированию элементов системы и предлагается метод вычисления рангов на основе теории нечетких отношений. Предполагается, что важность элемента определяется его влиянием на возможность выполнения функций системы, т.е. чем больше влияние, тем больше важность.

Исходная информация о структуре системы формализуется в виде нечеткого отношения влияния, которое преобразуется в нечеткое отношение сходства и его транзитивное замыкание. Это позволяет разбить множество элементов системы на классы, эквивалентные по важности.

Для вычисления степеней влияния элемента системы на возможность выполнения функций предлагается специальный метод наименьшего влияния, использующий информацию о наименьшем влиянии и сравнение с ним по девятибалльной шкале Саати.

Структура статьи следующая: в разд. 1 анализируются подходы к ранжированию элементов системы, исходя из причинно-следственных связей между отказами; в разд. 2 вводится нечеткое отношение влияния как структурно-функциональная модель системы; в разд. 3 предлагается метод наименьшего влияния для формализации экспертных знаний о системе; в разд. 4 определяется переход от нечеткого отношения влияния к нечеткому отношению сходства; в разд. 5

приводятся формулы для транзитивного замыкания нечеткого отношения сходства и его α-уровней, позволяющие выявлять классы элементов, эквивалентных по важности; в разд. 6 рассматривается пример алгоритма применения предложенного метода для системы, состоящей из шести элементов и предназначенной для выполнения пяти функций.

1. ВНЕШНИЙ И ВНУТРЕННИЙ ПОДХОДЫ

Исходя из типа причинно-следственных связей между отказами, известные подходы к ранжированию элементов системы можно разделить на два класса: внешний и внутренний. При использовании внешнего подхода в результате отказа *i*-го элемента происходит отказ системы, а при использовании внутреннего подхода — отказ *j*-го элемента.

1.1. Внешний подход. Этот подход, впервые предложенный в [1], использует чувствительность надежности системы к изменению надежности ее элементов (см. также [2]). Рассмотрим следующую функцию надежности:

$$P_S = f(P_1, P_2, \ldots, P_n), \tag{1}$$

связывающую вероятности безотказной работы системы P_S и ее элементов P_i. Представим эту функцию в виде ряда

$$P_S = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i P_i + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} P_i P_j + \ldots,$$

коэффициенты которого имеют смысл частных производных

$$b_i = \frac{\partial P_S}{\partial P_i}, \quad b_{ij} = \frac{\partial^2 P_S}{\partial P_i \partial P_j}. \tag{2}$$

Здесь коэффициент b_i соответствует индексу важности *i*-го элемента (reliability importance index), введенному в [1], а b_{ij} — индексу важности совместного влияния *i*-го и *j*-го элементов (joint reliability importance), введенному в [3].

Для систем, надежность которых моделируется методом Monte Carlo, индексы важности (2) вычисляются в [4, 5].

В работе [6] приведен метод вычисления важности элементов системы непосредственно на основе логической (или структурной [2]) функции

$$\alpha_S = f_L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \tag{3}$$

где $\alpha_S (\alpha_i) = 1(0)$, если система (*i*-й элемент) работает (отказал), f_L — булева функция.

Ограничения рассмотренных методов состоят в следующем:

— бинарное свойство модели надежности (1 — нет отказа, 0 — есть отказ) не позволяет учитывать промежуточных состояний элементов, которые лишь снижают эффективность работы системы, но не приводят к ее полному отказу;

— предположение о независимости элементов не позволяет учитывать взаимовлияния нарушений в работе элементов;

— адекватность модели надежности (1), на основе которой вычисляются индексы важности (2), сильно зависит от квалификации эксперта, записывающего структурную функцию (3).

Последнее ограничение порождает противоречие между строгостью операции дифференцирования (2) и субъективизмом модели (1), к которой данная операция применяется. В результате получаемые индексы важности элементов могут не иметь свойства робастности: они слишком чувствительны к изменениям в структуре и параметрах модели (1). В общем виде такие противоречия сформулированы в [7] как принцип несовместимости (incompatibility) высокой сложности и высокой точности. Применительно к индексам важности (2) это означает, что с повышением сложности и неопределенности системы стремление к точности вычислений теряет смысл. Здесь уместно процитировать известный афоризм: «математики делают все так, как нужно, но только то, что можно».

1.2. Внутренний подход. Этот подход базируется на оценке значимости элементов с использованием теории отношений и графов. Впервые теорию отношений применил для теории надежности В.И. Нечипоренко [8].

Внутренний подход не требует построения структурной функции (3) и функции надежности (1). Он основан на информации о структуре системы, т.е. о составе ее элементов и связей между ними. При этом можно использовать знания о влиянии нарушений в одних элементах на возникновение нарушений в других. Например, изменение параметров i-го элемента приводит к изменению параметров j-го элемента, что в свою очередь вызывает отказ k-го элемента, и т.д. Таким образом, учитывается «эффект домино».

Носителем информации для вычисления рангов в [8] является матрица связей

$$A = [a_{ij}], \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \tag{4}$$

в которой $a_{ij} = 1(0)$, если i-й элемент связан (не связан) с j-м элементом. Ранг i-го элемента вычисляется как сумма элементов i-й строки матрицы

$$D = A + A^2, \tag{5}$$

учитывающей одношаговые и двухшаговые влияния нарушений в i-м элементе системы.

Ограничение подхода [8] состоит в бинарном свойстве матрицы (4), которое не позволяет учитывать силу связей (или влияний) между элементами. Поэтому возникает интерес к обобщению этого подхода на случай нечетких отношений [7]. Отметим, что соотношение (5) по своей структуре подобно отношению транзитивного замыкания (transitive closure), используемому в кластерном анализе [9]. Это привело к выводу в [10], что задачу ранжирования элементов можно формулировать как задачу автоматической классификации, которая состоит в разбиении множества элементов на классы, эквивалентные по важности.

Упомянутые работы ориентированы на однофункциональные системы, допускающие построение структурной функции [2], необходимой для вычисления рангов элементов.

Понятие обобщенной динамической системы, определяемой как совокупность объектов и процессов, ввел в системный анализ В.М. Глушков [11]. Такие системы относятся к классу многофункциональных, для которых построение структурной функции (в смысле [2]) невозможно, поскольку не все элементы одинаково загружены выполнением различных функций.

Далее предлагается решение задачи ранжирования элементов многофункциональной системы на основе нечеткого транзитивного замыкания [12, 13] и специальных процедур построения нечетких отношений влияния и сходства.

2. НЕЧЕТКОЕ ОТНОШЕНИЕ ВЛИЯНИЯ

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — множество элементов системы, а $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ — множество выполняемых ею функций. Влияние элемента $x_i \in X$ на выполнение функции $y_j \in Y$ зададим нечетким множеством

$$I_i = \left\{ \frac{\mu_{i1}}{y_1}, \frac{\mu_{i2}}{y_2}, \dots, \frac{\mu_{im}}{y_m} \right\}, \tag{6}$$

где μ_{ij} — число в интервале [0, 1], которое характеризует степень влияния элемента $x_i \in X$ на выполнение функции $y_j \in Y$.

Отметим, что для учета влияния элемента системы не только на ее функции, но и на другие элементы, как это делается в [10], нечеткое множество типа (6) должно дополняться соответствующими парами вида (γ_{ik} / x_k), где γ_{ik} — степень влияния элемента $x_i \in X$ на элемент $x_k \in X$.

Пусть ρ_i — ранг элемента $x_i \in X$. Определим его так:

$$\rho_i = \sum_{i=1}^{m} \mu_{ij}, \tag{7}$$

что соответствует общему влиянию *i*-го элемента на выполнение всех функций системы.

Совокупность степеней влияния μ_{ij} из (6) для всех элементов $x_i \in X$ и функций $y_j \in Y$ образует нечеткое отношение влияния I, заданное на декартовом произведении $X \times Y$, т.е. $I \subset X \times Y$:

$$I = \left[\frac{\mu_{ij}}{(x_i, y_j)} \right], \; i = 1, 2, \ldots, n, \; j = 1, 2, \ldots, m. \tag{8}$$

Число μ_{ij}, которое ставится в соответствие каждой паре элементов (x_i, y_j), можно задавать экспертно с учетом частоты использования системой ее функций либо методом наименьшего влияния, предложенным далее. Подобная процедура вычисления степеней принадлежности применялась в [14].

3. МЕТОД НАИМЕНЬШЕГО ВЛИЯНИЯ

Пусть f_{ij} — сила влияния элемента $x_i \in X$ на функцию $y_j \in Y$, причем выполняется условие: «чем больше сила f_{ij}, тем больше степень влияния μ_{ij}», т.е. имеет место соотношение

$$\frac{\mu_{i1}}{f_{i1}} = \frac{\mu_{i2}}{f_{i2}} = \ldots = \frac{\mu_{il}}{f_{il}} = \ldots = \frac{\mu_{im}}{f_{im}}. \tag{9}$$

Пусть y_l — функция, на которую элемент x_i имеет наименьшее влияние. Из (9) получаем

$$\mu_{i1} = \mu_{il} \frac{f_{i1}}{f_{il}}, \; \mu_{i2} = \mu_{il} \frac{f_{i2}}{f_{il}}, \ldots, \; \mu_{im} = \mu_{il} \frac{f_{im}}{f_{il}}. \tag{10}$$

Подставляя (10) в требование $\mu_{i1} + \mu_{i2} + \ldots + \mu_{in} = 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$, находим наименьшую степень влияния элемента $x_i \in X$ в системе

$$\mu_{il} = \left(\frac{f_{i1}}{f_{il}} + \frac{f_{i2}}{f_{il}} + \ldots + \frac{f_{im}}{f_{il}} \right)^{-1}. \tag{11}$$

Соотношения (10) и (11) позволяют вычислять степени влияния в нечетком отношении (8) путем сравнения сил влияний f_{ij} с наименьшей силой влияния f_{il} для каждого элемента $x_i \in X$. Для этого используется девятибалльная шкала Саати [15]: $\frac{f_{ij}}{f_{il}} = 1, 3, 5, 7, 9$, где 1 — влияние *ij* (элемента x_i на функцию y_j) по сравнению с наименьшим влиянием *il* (элемента x_i на функцию y_l) такое же, 3 — немного больше, 5 — больше, 7 — значительно больше, 9 — абсолютно больше (возможны промежуточные оценки: 2, 4, 6, 8).

4. НЕЧЕТКОЕ ОТНОШЕНИЕ СХОДСТВА

Меру сходства по степени влияния между элементами $x_i \in X$ и $x_j \in X$ определим величиной $r_{ij} = 1 - d_{ij}$, где d_{ij} — расстояние между нечеткими множествами влияния элементов x_i и x_j:

$$I_i = \left\{ \frac{\mu_{i1}}{x_1}, \frac{\mu_{i2}}{x_2}, \ldots, \frac{\mu_{in}}{x_n} \right\},$$

$$I_j = \left\{ \frac{\mu_{j1}}{x_1}, \frac{\mu_{j2}}{x_2}, \ldots, \frac{\mu_{jn}}{x_n} \right\}.$$

Для вычисления d_{ij} можно использовать относительные расстояния Хэмминга ($d_{ij}^{(h)}$) или Евклида ($d_{ij}^{(e)}$):

$$d_{ij}^{(h)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} | \mu_{ik} - \mu_{jk} |, \tag{12}$$

$$d_{ij}^{(e)} = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\mu_{ik} - \mu_{jk})^2}.$$

Возможно применение и других мер расстояния и подобия, принятых в кластерном анализе [9].

Совокупность величин r_{ij} для всех пар $(x_i, x_j) \in X \times X$ образует нечеткое отношение сходства $R \subset X \times X$:

$$R = [r_{ij} / (x_i, x_j)], \tag{13}$$

которое имеет свойства рефлексивности, т.е. $r_{ii} = 1$ для всех $x_i \in X$, и симметричности, т.е. $r_{ij} = r_{ji}$ для всех $x_i, x_j \in X$.

5. КЛАССИФИКАЦИЯ И РАНЖИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ

Для разбиения множества X на непересекающиеся классы элементов, сходных по степени влияния, необходимо придать исходному нетранзитивному отношению сходства R свойство транзитивности. Такое преобразование обеспечивает операция транзитивного замыкания нечеткого отношения, впервые рассмотренная в [12, 13].

Транзитивным замыканием отношения R называется отношение $\hat{R}$, определяемое как

$$\hat{R} = R^1 \cup R^2 \cup \ldots \cup R^k \cup \ldots, \tag{14}$$

где отношения R^k находятся рекурсивно: $R^1 = R$, $R^k = R^{k-1} \circ R$, $k = 2, 3, \ldots, n$; $\cup$ — операция объединения нечетких отношений; $\circ$ — операция нечеткой композиции.

Операции над матрицами отношений выполняются по схеме

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \left[\frac{a \vee e \,|\, b \vee f}{c \vee g \,|\, d \vee h} \right],$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \left[\frac{(a \wedge e) \vee (b \wedge g) \,|\, (a \wedge f) \vee (b \wedge h)}{(c \wedge e) \vee (d \wedge g) \,|\, (c \wedge f) \vee (d \wedge h)} \right],$$

где $\wedge = \min$, $\vee = \max$.

Приведенная схема вычислений, которая для простоты изложения показана на примере матрицы 2×2, сохраняется для матриц произвольного размера.

Классы элементов, сходных по степени влияния, образуются разложением отношения $\hat{R}$ по α-уровням (срезам):

$$\hat{R}=\bigcup_{\alpha}\alpha\hat{R}_{\alpha},\ \alpha\in[0,1],$$

где $\hat{R}_{\alpha}$ — α-уровень отношения $\hat{R}$.

Для нечеткого отношения $\hat{R}$ (14), записанного в виде

$$\hat{R}=\left[\frac{\hat{r}_{ij}}{(x_i,x_j)}\right],\ (x_i,x_j)\in X\times X,\ i,j=1,2,\ldots,n,$$

обычное отношение $\hat{R}_{\alpha}$ состоит из таких пар (x_i,x_j), у которых степень принадлежности не меньше, чем α, т.е.

$$\hat{R}_{\alpha}=\left[\frac{1(0)}{(x_i,x_j)}\right],\ \text{если}\ \hat{r}_{ij}\geq\alpha\ (\hat{r}_{ij}<\alpha).$$

6. ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА НАИМЕНЬШЕГО ВЛИЯНИЯ

Рассмотрим систему из шести элементов и пяти функций, т.е. $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ и $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$. Экспертная информация, необходимая для вычисления отношения (8) методом наименьшего влияния, представлена в табл. 1.

Второй столбец y_l (см. табл. 1) содержит функции, на которые соответствующие элементы первого столбца x_i имеют наименьшее влияние: x_1 наименее влияет на y_4; x_2 наименее влияет на $y_5,\ldots$; x_6 наименее влияет на y_4. Источником этой информации является эксперт.

Ячейки (см. табл. 1) содержат экспертные сравнения сил влияний f_{ij} с наименьшими силами влияния f_{il}. Для краткости вместо f_{ij}/f_{il} записано ij/il:

— запись $\frac{11}{14}=9$ означает, что влияние элемента x_1 на функцию y_1 абсолютно больше (9), чем влияние x_1 на y_4;

Таблица 1. Исходные данные для метода наименьшего влияния

x_i	y_l	f_{ij}/f_{il}				
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	y_4	$\frac{11}{14}=9$	$\frac{12}{14}=7$	$\frac{13}{14}=9$	$\frac{14}{14}=1$	$\frac{15}{14}=1$
x_2	y_5	$\frac{21}{25}=9$	$\frac{22}{25}=9$	$\frac{23}{25}=9$	$\frac{24}{25}=1$	$\frac{25}{25}=1$
x_3	y_1	$\frac{31}{31}=1$	$\frac{32}{31}=9$	$\frac{33}{31}=7$	$\frac{34}{31}=9$	$\frac{35}{31}=5$
x_4	y_2	$\frac{41}{42}=3$	$\frac{42}{42}=1$	$\frac{43}{42}=7$	$\frac{44}{42}=1$	$\frac{45}{42}=9$
x_5	y_5	$\frac{51}{55}=9$	$\frac{52}{55}=5$	$\frac{53}{55}=7$	$\frac{54}{55}=1$	$\frac{55}{55}=1$
x_6	y_4	$\frac{61}{64}=9$	$\frac{62}{64}=5$	$\frac{63}{64}=9$	$\frac{64}{64}=1$	$\frac{65}{64}=1$

— запись $\frac{35}{31}=5$ означает, что влияние элемента x_3 на функцию y_5 больше (5), чем влияние x_3 на y_1; и т.д.

Пользуясь данными из табл. 1 и формулами (10) и (11), вычисляем степени влияния μ_{ij} для отношения (8).

Для элемента x_1 ($i = 1$, $l = 4$) имеем

$$\mu_{14}=\left(\frac{f_{11}}{f_{14}}+\frac{f_{12}}{f_{14}}+\frac{f_{13}}{f_{14}}+\frac{f_{14}}{f_{14}}+\frac{f_{15}}{f_{14}}\right)^{-1}=\frac{1}{9+7+9+1+1}=\frac{1}{27},$$

$$\mu_{11}=\mu_{14}\cdot\frac{f_{11}}{f_{14}}=\frac{1}{27}\cdot 9=\frac{9}{27},\ \mu_{12}=\mu_{14}\cdot\frac{f_{12}}{f_{14}}=\frac{7}{27},$$

$$\mu_{13}=\mu_{14}\cdot\frac{f_{13}}{f_{14}}=\frac{9}{27},\ \mu_{15}=\mu_{14}\cdot\frac{f_{15}}{f_{14}}=\frac{1}{27}.$$

Аналогично получены остальные степени принадлежности, которые образуют нечеткое отношение влияния

$$I=\begin{array}{c|ccccc|l} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & \\ \hline x_1 & 9/27 & 7/27 & 9/27 & 1/27 & 1/27 & \max=9/27 \\ x_2 & 9/29 & 9/29 & 9/29 & 1/29 & 1/29 & \max=9/29 \\ x_3 & 1/31 & 9/31 & 7/31 & 9/31 & 5/31 & \max=9/31 \\ x_4 & 3/21 & 1/21 & 7/21 & 1/21 & 9/21 & \max=9/21 \\ x_5 & 9/23 & 5/23 & 7/23 & 1/23 & 1/23 & \max=9/23 \\ x_6 & 9/25 & 5/25 & 9/25 & 1/25 & 1/25 & \max=9/25 \end{array} \qquad (15)$$

Для нормализации отношения (15) разделим элементы каждой строки на максимальное значение и получим

$$I=\begin{array}{c|ccccc|} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ \hline x_1 & 1.0 & 0.78 & 1.0 & 0.11 & 0.11 \\ x_2 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0.11 & 0.11 \\ x_3 & 0.11 & 1.0 & 0.78 & 1.0 & 0.56 \\ x_4 & 0.33 & 0.11 & 0.78 & 0.11 & 1.0 \\ x_5 & 1.0 & 0.56 & 0.78 & 0.11 & 0.11 \\ x_6 & 1.0 & 0.56 & 1.0 & 0.11 & 0.11 \end{array} \qquad (16)$$

Нечеткое отношение сходства (13), полученное из (16), имеет вид

$$R=\begin{array}{c|cccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 1.0 & 0.96 & 0.47 & 0.51 & 0.91 & 0.96 \\ x_2 & 0.96 & 1.0 & 0.51 & 0.47 & 0.87 & 0.91 \\ x_3 & 0.47 & 0.51 & 1.0 & 0.51 & 0.47 & 0.42 \\ x_4 & 0.51 & 0.47 & 0.51 & 1.0 & 0.6 & 0.56 \\ x_5 & 0.91 & 0.87 & 0.47 & 0.6 & 1.0 & 0.96 \\ x_6 & 0.96 & 0.91 & 0.42 & 0.56 & 0.96 & 1.0 \end{array} \qquad (17)$$

Степени принадлежности в (17) получены из (16) с использованием расстояния Хэмминга (12). Например, $r_{12} = 1 - d_{12} = 0.96$, где

$$d_{12} = \frac{1}{5}[(1.0, 0.78, 1.0, 0.11, 0.11) - (1.0, 1.0, 1.0, 0.11, 0.11) =$$

$$= \frac{1}{5}[|1.0-1.0| + |0.78-1.0| + |1.0-1.0| + |0.11-0.11| + |0.11-0.11|] =$$

$$= \frac{1}{5}[0 + 0.22 + 0 + 0 + 0] = 0.04.$$

Для получения транзитивного замыкания отношения сходства (14) из отношения (17), находим

$$R^2 = R \circ R = \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 1.0 & 0.96 & 0.51 & 0.6 & 0.96 & 0.96 \\ x_2 & 0.96 & 1.0 & 0.51 & 0.6 & 0.91 & 0.96 \\ x_3 & 0.51 & 0.51 & 1.0 & 0.51 & 0.51 & 0.51 \\ x_4 & 0.6 & 0.6 & 0.51 & 1.0 & 0.6 & 0.6 \\ x_5 & 0.96 & 0.91 & 0.51 & 0.6 & 1.0 & 0.96 \\ x_6 & 0.96 & 0.96 & 0.51 & 0.6 & 0.96 & 1.0 \end{array},$$

$$R^3 = R^2 \circ R = \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 1.0 & 0.96 & 0.51 & 0.6 & 0.96 & 0.96 \\ x_2 & 0.96 & 1.0 & 0.51 & 0.6 & 0.96 & 0.96 \\ x_3 & 0.51 & 0.51 & 1.0 & 0.51 & 0.51 & 0.51 \\ x_4 & 0.6 & 0.6 & 0.51 & 1.0 & 0.6 & 0.6 \\ x_5 & 0.96 & 0.96 & 0.51 & 0.6 & 1.0 & 0.96 \\ x_6 & 0.96 & 0.96 & 0.51 & 0.6 & 0.96 & 1.0 \end{array} = R^4 = R^5 = \ldots = R^{\infty}. \tag{18}$$

Поэтому транзитивное замыкание (14) в рассматривамом случае имеет вид

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^k \cup \ldots = R^3, \tag{19}$$

т.е. совпадает с отношением (18).

Согласно (7), суммируя значения строк матрицы (16), получаем количественные значения рангов элементов

$$\rho_1 = 1.0 + 0.78 + 1.0 + 0.11 + 0.11 = 3.0,$$

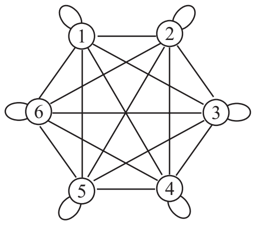
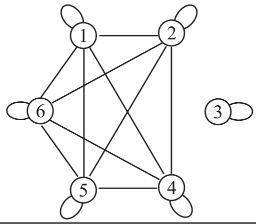
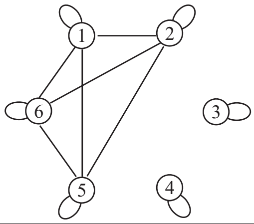
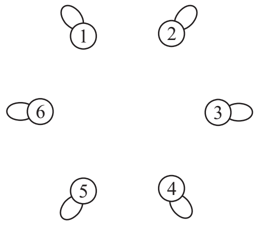
$$\rho_2 = 3.22,\ \rho_3 = 3.45,\ \rho_4 = 2.33,\ \rho_5 = 2.56,\ \rho_6 = 2.78. \tag{20}$$

Нечеткое отношение (19) можно разложить по α-уровням следующим образом:

$$\hat{R} = \bigcup_{\alpha} \alpha R_{\alpha} = 0.51 R_{0.51} \cup 0.6 R_{0.6} \cup 0.96 R_{0.96} \cup R_{1.0},$$

где R_{α} — четкие отношения α-уровня. Эти отношения и их графы представлены в табл. 2, в которой для краткости элемент x_i обозначается символом *i*. Четкие отношения α-уровня образуют классы элементов, эквивалентных по важности (табл. 3). Дерево декомпозиции множества элементов системы на классы эквивалентности представлено на рис. 1.

Т а б л и ц а 2. Отношения α-уровня и их графы

α	R_α	Граф
0.51	$\begin{array}{c\|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$	
0.6	$\begin{array}{c\|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$	
0.96	$\begin{array}{c\|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$	
1.0	$\begin{array}{c\|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$	

Т а б л и ц а 3. Классы элементов, эквивалентных по важности

Уровень	Число классов	Классы элементов
$\alpha = 0.51$	1	$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$
$\alpha = 0.6$	2	$\{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6\}$, $\{x_3\}$
$\alpha = 0.96$	3	$\{x_1, x_2, x_5, x_6\}$, $\{x_3\}$, $\{x_4\}$
$\alpha = 1$	6	$\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\{x_3\}$, $\{x_4\}$, $\{x_5\}$, $\{x_6\}$

Число α можно интерпретировать как уровень определенности знаний о системе, $(1-\alpha)$ — уровень неопределенности. Естественно, чем сложнее система и чем большее число реальных событий не учитывается при моделировании, тем больше неопределенность и меньше число α.

Из рис. 1 видно, что при максимальной определенности ($\alpha = 1$) каждый элемент x_i представляет собой уникальный класс важности. Однако на уровне $\alpha = 0.51$ все элементы системы не различимы по рангам. С учетом количественных оценок (20) для практических расчетов можно выбрать уровень определенности $\alpha = 0.96$, на котором $\rho_3 = 3.45$, $\rho_4 = 2.33$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_5 = \rho_6 \approx \frac{1}{4}(3.0+3.22+2.56+2.78) = 2.89$.

Если C_0 — допустимые затраты на обеспечение надежности системы, то пропорционально рангам эти затраты должны распределяться так:

$$\sum_{i=1}^{6} C_i = C_0,\ C_1 = C_2 = C_5 = C_6 = 0.17C_0,\ C_3 = 0.2C_0,\ C_4 = 0.12C_0.$$

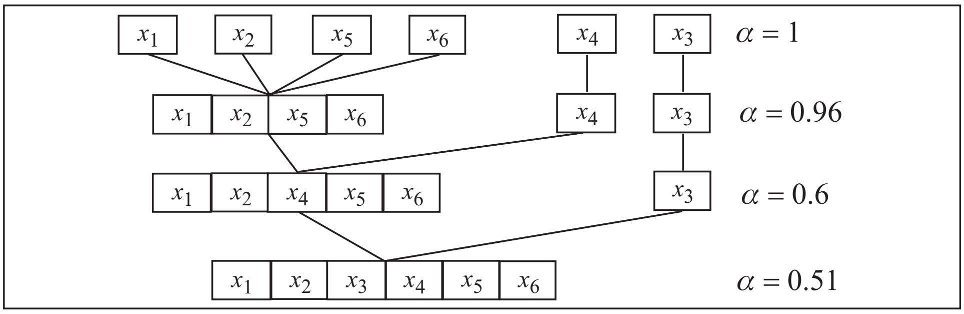


Рис. 1. Дерево декомпозиции на классы эквивалентности

Аналогично, если λ_0 — требуемая интенсивность отказов системы, то для экспоненциального закона надежности и простейшей последовательной схемы получаем требуемые λ-характеристики элементов:

$$\sum_{i=1}^{6} \lambda_i = \lambda_0, \ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0.17\lambda_0, \ \lambda_3 = 0.2\lambda_0, \ \lambda_4 = 0.12\lambda_0.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ранжирование элементов системы играет важную роль в обеспечении надежности на этапе проектирования. Многофункциональные системы, элементы которых не одинаково загружены выполнением различных функций, не допускают построения структурной функции надежности, необходимой для вычисления рангов элементов.

В настоящей статье предложен метод ранжирования элементов многофункциональной системы с применением теории нечетких отношений. Задача сведена к автоматической классификации на основе транзитивного замыкания нечеткого отношения сходства. Это позволяет разбивать множество элементов системы на непересекающиеся классы, не различимые по важности.

Исходная информация о системе задается в виде нечеткого отношения влияния отказов элементов на выполнение функций. Степени влияния элементов на функции системы вычисляются путем сравнения с наименьшим влиянием по девятибалльной шкале Саати. Мерой сходства пары элементов является расстояние между двумя векторами влияний.

Предложенный метод не имеет ограничений, связанных с допущениями о бинарном характере надежности: «есть отказ — нет отказа». Этот метод можно применять в многофункциональных системах с плохо определенной структурой: организационных, эргатических, военных и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Birnbaum Z.W. On the importance of different components in a multicomponent system. P.R. Krishnaiah (ed). Multivariate analysis-II. New York : Academic Press, 1969. P. 581–592.
2. Barlow R., Proschan F. Statistical theory of reliability and life testing. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1975. 327 p.
3. Hong J.S. and Lie C.H. Joint reliability importance of two edges in undirected network. *IEEE Transaction on Reliability*. 1993. Vol. 42, N 1. P. 17–23.
4. Gertsbakh I.B., Shpungin Y. Combinatorial approach to component importance indexes in coherent systems. Probability in the Engineering and Information Sciences. Cambrige University Press, 2011. P. 1–12.
5. Gertsbakh I. and Shpungin Y. Network reliability and resilience. Heidelberg: Springer, 2011. 74 p.
6. Ryabinin I. A. Reliability of engineering systems. Principles and Analysis. Moscow: Mir, 1976. 420 p.
7. Zadeh L.A. The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning. Memorandum No. ERL-M411, Electronic Research Lab., Berkely Univ. of Calif., October, 1973. 132 p.

8. Нечипоренко В.И. Структурный анализ систем. Эффективность и надежность. Москва: Сов. радио, 1977. 214 с.
9. Парницкий Г. Основы статистической информатики. Москва: Финансы и статистика, 1981. 199 с.
10. Ротштейн А.П. Ранжирование элементов системы на основе нечетких отношений: метод наименьшего влияния. *Надежность*. 2015. № 4(55). С. 16–29.
11. Глушков В.М. Введение в АСУ. Киев: Техника, 1974. 310 с.
12. Zadeh L. Similarity relations and fuzzy orderings. *Information Sciences*. 1971. Vol. 3. P. 177–200.
13. Tamura S., Higuchi S., Tanaka K. Pattern classification based on fuzzy relations. *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics.* 1971. Vol. SMC-1, N 1. P 61–66.
14. Rotshtein A., Shnaider E., Schneider M., Kandel A. Fuzzy multicriterial selection of alternatives: The worst-case method. *International Journal of Intelligent Systems.* 2010. Vol 25, N 9. P. 948–957.
15. Saaty T.L. Mathematical models of arms control and disarmament. New York: John Willey & Sons, 1968. 304 p.

Надійшла до редакції 07.06.2016

О.П. Ротштейн

РАНЖУВАННЯ ЭЛЕМЕНТІВ СИСТЕМИ НА ОСНОВІ НЕЧІТКОГО ВІДНОШЕННЯ ВПЛИВУ І ТРАНЗИТИВНОГО ЗАМИКАННЯ

Анотація. Запропоновано метод ранжування елементів багатофункціональної системи з використанням теорії нечітких відношень. Задачу зведено до автоматичної класифікації на базі транзитивного замикання нечіткого відношення схожості. Первинну інформацію про систему задано у вигляді нечіткого відношення впливу відмов елементів на виконання функцій. Ступінь впливу кожного елементу на функції системи обчислюють шляхом порівняння з найменшим впливом за дев'ятибальною шкалою Сааті. Запропонований метод не має обмежень, які пов'язані з бінарною властивістю надійності: «є відмова — немає відмови», його можна застосовувати в багато функціональних системах з погано визначеною структурою — організаційних, ергатичних, військових тощо.

Ключові слова: багатофункціональна система, невизначеність, важливість елемента, нечітке відношення, автоматична класифікація.

A.P. Rotshtein

RANKING OF SYSTEM ELEMENTS BASED ON FUZZY RELIATION OF INFLUENCE AND TRANSITIVE CLOSURE

Abstract. The author proposes a method of elements ranking in multi-functional system using the fuzzy relations theory. The problem is formulated as an automatic classification based on the transitive closure of the fuzzy similarity relation. This allows splitting the set of system elements into disjoint classes, which are similar in importance. The expert information about multi-functional system is given in the form of fuzzy relation of influence of the element's failures on the system's functions performance. To calculate the degree of element's influences on the functions performance we use the comparison of all influences with the least influence by 9-point Saaty scale. The proposed method relaxes the assumption about the independence and the binary-state (up-down) of elements. The possible fields of applications are multi-functional systems with ill-defined structures such as organizational, ergatic, military, etc.

Keywords: multi-functional system, uncertainty, importance of element, fuzzy relation, automation classification.

Ротштейн Александр Петрович,
доктор техн. наук, профессор Академического центра Lev — Иерусалимский технологический колледж, Израиль, e-mail: rothstei@g.jct.ac.il.